# புள்ளியியல் மதிப்பீட்டுக் கொள்கையும் எடுகோள் சோதனையும்

ஆசிரியர்

**துரை. இரத்தினசபாபதி**, எம்.எஸ்ஸி., டி.ஐ.எஸ்.ஐ.,
*புள்ளியியல் இணைப் பேராசிரியர்,*
*மாநிலக் கல்லூரி,*
*சென்னை.*



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் - 841

# புள்ளியியல் மதிப்பீட்டுக் கொள்கையும் எடுகோள் சோதனையும்

ஆசிரியர்

**துரை. இரத்தினசபாபதி,** எம்.எஸ்ஸி., டி.ஐ.எஸ்.ஐ.,
*புள்ளியியல் இணைப் பேராசிரியர்,*
*மாநிலக் கல்லூரி,*
*சென்னை.*



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — February, 1979

Number of Copies — 1000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 841



# STATISTICAL THEORY OF ESTIMATION AND TEST OF HYPOTHESIS

D. RATNASABAPATHI

Price Rs. 17-50

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

*Printed by*

KUMARAN OFFSET PRINTERS,
193, Broadway,
Madras-600 001.

# அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினெட்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித்தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப்பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றுன புள்ளியியல் மதிப்பீட்டுக் கொள்கையும் எடுகோள் சோதனையும் என்னும் இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 841ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 876 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூகநல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயிலவேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளரவேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பது தான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக!

செ. அரங்கநாயகம்

# பொருளடக்கம்

# 1. நிகழ்தகவுக் கொள்கையும் அதைச் சார்ந்த பரவல்களும்

## (Probability Concept and Distributions)

### 1·1. அறிமுகம் (Introduction)

புள்ளியியல், நிச்சயிக்கப்பட முடியாத நிலையில் உள்ளவற்றைப்பற்றி ஒரு தீர்வான முடிவினைத் தரும் கருவிகளை அல்லது அறிமுறைகளைக் கொண்டுள்ளது. புள்ளியியலின் அறிமுறை, பயன்முறைக் கணிதத்தின் ஒரு கிளையாகும். தூய கணிதத்தின் முக்கிய பாடங்களில் ஒன்றான நிகழ்தகவுக் கொள்கையினை (Probability Theory) அது விளக்குகிறது. அதுமட்டுமன்றி சரிசம வாய்ப்புத் தத்துவங்கள் இயல் நிலைத் தோராய மதிப்புக் கொள்கைகள், புள்ளியியல் மதிப்பீட்டுத் தத்துவங்கள், எடுகோள்களின் சோதனைகள் உய்த்துணர்வு, சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகள் மற்றும் தொடர் அடுக்குச் சோதனைகள் போன்ற பலவற்றையும் புள்ளியியல் விளக்குகின்றது.

ஒரு புள்ளியியல் நிபுணர், ஆராய்ச்சியாளர்களுக்குத் தேவையான முறைகளைத் தயாரித்துக் கொடுப்பதில் பொதுவாக ஈடுபட்டுள்ளார். ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனைப் பிரச்சினையைப் பொறுத்தவரை, அவர் சோதனை நிலைக்கு ஏற்பச் சரியான ஒரு கணித உருவடிவத்தைத் (mathematical model) தயாரித்துக் கணித முறைப்படி ஆராய்ந்து சரியானத் தீர்வுகாணும் ஒரு முறையினை வழிவகுக்கின்றார். அவ் வேலையில் புள்ளியியல் அறிமுறைத் தத்துவங்கள் அவருக்குப் பெரிதும் உறுதுணை புரிகின்றன. புள்ளியியல் மதிப்பீட்டுக் கொள்கையானது, மாதிரிப் பண்பளவையிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் சுட்டுறுப்புக்கான மதிப்பீடுகளைக் காணப் பயன்படும் விதங்களை நன்கு விளக்குகிறது. புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை முறைகளின் முழுவளர்ச்சி மிகவும் பிரமிக்கத்தக்க வகையில் அமைந்துள்ளது. இந் நூல் புள்ளியியல் மதிப்பீட்டுக் கொள்கை, எடுகோள் சோதனைமுறைகள் இவ் விரண்டு முக்கிய அறிமுறைகளைப்பற்றி மட்டுமே விளக்கமாக விவரிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு நூலாகும். புள்ளியியலைச் சார்ந்த கோட்பாடுகளை விளக்கப் பல நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

இங்குக் குறிப்பாக மதிப்பீட்டுக் கொள்கைகளும், எடுகோள் சோதனைகளும், தீவிரமாக ஆராயப்பட்டுள்ளன. அதுமட்டுமன்றி, நம்பிக்கை இடைவெளி மதிப்பீடுகள், நேமன் - பியர்சன் எடு கோள்களைச் சோதிக்கும் முறை, சுட்டுறுப்பைச் சாராத (முறைகள்) சோதனைகள் தொடர் அடுக்குச் சோதனைகள் போன்ற பலவும் விளக்கமாக எழுதப்பட்டுள்ளது. இந் நூலிற்கு முன்தேவையாக (pre-requisite) நிகழ்தகவுக் கொள்கை (Probability concept), புள்ளியியல் பரவல்களின் தன்மைபற்றிய கொள்கைகள் முதலியன வாசகர்களுக்குத் தெரிந்திருக்க வேண்டியது அவசியமாகின்றது. எனவே, இந்த முன்தேவைகள் இந்த அத்தியாயத்தில் விளக்கமாக விவரிக்கப்படாவிடினும் சுருக்கமாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

## 1·2. நிகழ்தகவுக் கொள்கை (Probability Concept)

வாய்ப்பின் பயன்களைப் பற்றி வலியுறுத்தும் ஊக அளவுக் கொள்கை அல்லது நிகழ்தகவுக் கொள்கையானது பயன்முறைக் கணிதத்தின் ஒரு கிளையாகும். இந் நிகழ்தகவுக் கருத்து சுமார் 1600ஆம் ஆண்டிலேயே, முதன் முதலாக, வாய்ப்பின் விளையாட்டுகளை மேற்கொண்டுப் புகுத்தப்பட்டது. பாஸ்கல், ஃபெர்மட், பெர்நௌலி முதலானோர் இக் கொள்கையை மேலும் வளர்ச்சியுறச் செய்தனர். சரிசம வாய்ப்பின் நிபந்தனையையும் கணித நிகழ்தகவினையும் பெர்நௌலி முதலில் விளக்க, பின்னர் லாப்லேஸ் மற்றும் பல புள்ளியியல் நிபுணர்கள் இவ் விளக்கத்தைப் பின்பற்றினர்.

நிறைய சோதனைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யப்பட்டுத் தான் முடிவுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. ஓர் ஆய்வாளர் விவரங்களைத் (செய்திகளை) திரட்டுவதற்கு எப்போதும் சோதனையில் ஈடுபடுகிறார். சில நிபந்தனைகளின் கீழே நடத்தப்படும் சோதனையின்மூலம் அடையும் ஒரு தீர்மான முடிவை 'நிகழ்ச்சி' என்று கூறுகின்றோம். நிகழ்தகவினை வரையறுக்கும் முன்னர் சில குறிப்பான நிகழ்ச்சிகளை இங்கு விளக்குவோம்.

1. சரிசம வாய்ப்புகளுள்ள நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely Events) இரண்டு எதிர்பாராத நிலையிலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தனித்தனியே நிகழுதற்குரிய வாய்ப்பு சரிசமமானதாக இருக்குமானால், அவற்றைச் சரிசம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் என்று அழைக்கிறோம். உதாரணமாக, 6 பக்கங்களுடைய ஒரு பகடையை உருட்டுகையில் எப் பக்கம் வேண்டுமானாலும் மேல் வரலாமாயின், அந்த 6 நிகழ்ச்சிகளும் சரிசம வாய்ப்புடையவை யாகும்.

2. ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பொருந்திய நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events) : இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவது ஒன்று நிகழும்போது மற்ற நிகழ்ச்சி ஏற்படவில்லை என்றால், மேலும் முதல் நிகழ்ச்சி மற்ற நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதைத் தடுக்கவில்லை என்றால் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை வாய்ந்த நிகழ்ச்சிகளாகும்.

உதாரணமாக, ஒரு காசைச் சுண்டுகையில் தலை விழுதல், பூ விழுதல் என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் ஏற்படுகின்றன. தலை விழுவ தானது, பூ விழுவதைத் தடுத்துக் கொண்டு ஏற்படவில்லை. அது தானாகவே ஏற்படுகிறது. எனவே, தலை விழும்போது பூ விழும் நிகழ்ச்சி ஏற்படாது.

இதேபோல் பூ விழுந்தால், இந் நிகழ்ச்சி தலை விழுவதைத் தடை செய்யவில்லை. அது தானாக ஏற்படுகிறது. எனவே, பூ விழுகையில், தலை விழும் நிகழ்ச்சி ஏற்படாது. ஆதலால், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை யுடையன.

3. பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive Events) : நிகழ்ச் சிகள் யாவும் பூரணமாகக் கவனிக்கப்படுகையில் அவற்றில் ஏதாவது ஒன்று நிச்சயமாக நிகழுமானால், அந் நிகழ்ச்சிகளைப் பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் என்று அழைக்கிறோம். ஒரு காசைச் சுண்டினால் மொத்தமே இரண்டு நிகழ்ச்சிகள்தான் ஏற்படும்; அதாவது (i) தலை விழுதல் (ii) பூ விழுதல். இவை இரண்டில் ஏதாவது ஒன்று நிச்சயமாக நடக்கும். எனவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சி களும் பூரணமான நிகழ்ச்சிகளாகும்.

4. கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் (Compound Events) : இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒருங்கே (ஒரே சமயத்தில்) நிகழ்ந்தால் அவை கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இரு பகடைகளை உருட்டும்போது முதற் பகடையில் ஆறு எண்களில் ஏதாவது ஓர் எண்ணும், அதே சமயத்தில் இரண்டாம் பகடையிலும் ஆறு எண்களில் ஏதாவது ஓர் எண்ணும் வெளிப் படும். இந் நிகழ்ச்சி கூட்டு நிகழ்ச்சியாகும். இந்தக் கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் இருவகைப்படும். அவை : (i) சார்பற்ற நிகழ்ச் சிகள், (ii) சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள்.

5. சார்பற்ற (சார்பிலா) நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events) : நிகழ்ச்சிகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவது, மற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்

வொன்றும் ஏற்படுவதைப் பாதிக்காமலிருக்குமானால், நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். இரு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டுகையில், முதல் பகடையில் எந்த எண் விழுந்தாலும் இரண்டாம் பகடையில் விழும் எண்ணைப் பாதிக்காது. எனவே இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

**6.** சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் (Dependent Events): மேற்கூறிய நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று பாதிக்குமானால் அவை சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளாகும். ஒரு பையில் 5 பச்சைப் பந்துகளும் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இரு பந்துகளைத் தனித் தனியே பையிலிருந்து எடுத்தால், முதல் பந்து எடுக்கப்பட்டபின் பையில் திரும்ப வைக்கப்படாவிட்டால், இரண்டாம் பந்தின் நிகழ்ச்சியானது முதல் பந்தின் நிகழ்ச்சியைப் பொறுத்தவாறு அமையும். இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இப்போது கணித நிகழ்தகவு, புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (Apriori Probability, Aposteriori Probability) இவைகளை விளக்குவோம்.

கணித அல்லது கணக்கியல் நிகழ்தகவு (Mathematical probability or Apriori Probability)

ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவது, ஏற்படாமலிருப்பது ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கைகள் முன்கூட்டியே தெரிவிக்கப் படுவதானால் இவ்வித நிகழ்தகவினைக் கணித நிகழ்தகவு என்று கூறுகிறோம்.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை படைத்த, சமச்சீரான வாய்ப்புடைய, பூரணமான $n$-வகையில் $E$ எனும் விளைவு ஏற்படச் சாதகமான $r$ வகைகள் இருப்பின், $E$ விளைவுக்கான கணக்கியல் நிகழ்தகவு $= \frac{r}{n}$ ஆகும்.

அதாவது $E$-ன் கணித நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

எல்லா வகைகளும் $E$-க்குச் சாதகமாக இருந்தால் அந்த $E$ விளைவு ஏற்படுவது நிச்சயமானது. அதற்கான நிகழ்தகவு $= 1$ ஆகும். அது நிச்சயமாக நிகழாது என்றால், அதற்கான நிகழ் தகவு $= 0$ ஆகும். எனவே, நிகழ்தகவு $p$ என்பது $0 \leq p \leq 1$

என்றவாறு அமைந்து காணப்படும். இந்தக் கணித நிகழ்தகவின் உபயோகமானது ஒருசில கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்பட்டு அமைகிறது. அதாவது:

(i) 'சமச்சீரான வாய்ப்புடைய வகைகள்' என்ற வார்த்தை கணித நிகழ்தகவு வரையறையில் காணப்படுகிறது. சிற்சில சமயங்களில் சமச்சீரான வாய்ப்பு இல்லாத வகைகள் இருந்தால் என்ன ஏற்படும்? உதாரணமாக ஒரு காசு, தலைகளே விழும்படியாகப் பிறழ்ச்சியாக (biased) இருந்தால், அதாவது பூக்கள் விழும் வாய்ப்பு குறைவாகவும் தலைகள் விழும் வாய்ப்பு அதிகமாகவும் இருந்தால், அப்போது தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாக இருக்கும்? இச் சமயங்களில் இந்தக் கணித நிகழ்தகவு வரையறை பயன்படாது.

(ii) நிகழக்கூடிய எல்லா விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையானது முடிவிலியாக (infinite) இருந்தாலும், இந்த வரையறை தோல்வியுறுகிறது. மேலும் இவ் வரையறையானது நிகழ்தகவின் மதிப்பை விகிதமுறுகின்ற எண்களுக்கு மட்டுமே கட்டுப்படுத்துகிறது.

(iii) எல்லாச் சரிசம வாய்ப்பு வகைகளையும் நடைமுறையில் கணிக்க முடியாமல் போகலாம்.

இத்தகைய வரம்புகளுக்கு (கட்டுப்பாடுகட்கு) உட்பட்டுக் கணித நிகழ்தகவு வரையறை அமைகின்றது.

**புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (Statistical Probability or Aposteriori Probability)**

ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி எத்தனை தடவைகள் வெற்றியாகவும் தோல்வியாகவும் நிகழக்கூடும் என்று முன்கூட்டியே தெரியாமலிருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில், முயற்சியைப் பல தடவைகள் திரும்பத்திரும்பச் செய்து அவற்றின் மூலம் நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடலாம். இம் மதிப்பினைப் புள்ளியியல் நிகழ்தகவு என்கிறோம்.

விளக்கம்: ராண்டம் சோதனைகளை $N$ தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்து $f$ தடவைகள் $A$ என்ற நிகழ்ச்சி நடந்திருக்குமேயானால் $\frac{f}{N}$ என்ற விகிதத்தை $A$ நிகழ்ச்சிக்கான சார்பு அலைவெண் (relative frequency) என்கிறோம். $N$ சிறியதாக இருந்தால் சார்பு அலைவெண் மதிப்புச் சரியாக இராது. $N$ பெரிதாகப்

பெரிதாகச் சார்பு அலைவெண் நிலையான மதிப்பாக இருக்கும். இதை $p$ என்கிறோம். எனவே, $A$ நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு $= p$ ஆகிறது. இங்குப் புள்ளியியல் நிகழ்தகவு, கவனத்தில் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான சார்பு அலைவெண் ஒரு வரம்பினைக் குறிக்கிறது. இந்த வரம்பு ஒரு நிலையானதாகவும், ஒரே மதிப்புடையதாகவும் (finite and unique) உள்ளதைக் காண்கிறோம்.

**கணங்களின் இயற்கணிதம் (Algebra of Sets)**

ஒரு பொருள் (object) ஒரு கணத்தில் (set) இருந்தால் அப்பொருள் அக் கணத்தின் ஓர் உறுப்பு (element) ஆகும். பொதுவாக எண்களின் கணங்கள் அல்லது புள்ளிகளின் கணங்கள் நமக்குப் பயன்படுகின்றன. $A : \{ x ; 0 < x < 1 \}$ என்பது $x$ புள்ளிகளின் ஒருபடிக் கணம் ஆகும். இதேபோல $A : \{ (x,y),\ 0 < x < 1, 2 < y < 5 \}$ என்பது ஒரு $(x, y)$ ஜதையான புள்ளிகளின் இருபடிக் கணம் (Two dimensional set) ஆகும். இவை உதாரணங்களாகும்.

**வரையறை 1 :** $A_1$ கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பு $A_2$ கணத்தின் உறுப்பாயின் $A_1$ என்பது $A_2$-ன் உபகணம் ஆகும்.

இதை $A_1 \subset A_2$ எனலாம்.

$A_1 = A_2 \Longrightarrow A_1 \subset A_2,\ A_2 \subset A_1$ என்றால் மட்டுமே.

**வரையறை 2:** $A_1$-ல் ஓர் உறுப்பு இல்லையெனில், $A_1$ என்பது ஒரு பூஜ்ய கணமாகும்.

**வரையறை 3 :** $A_1, A_2$ இரு கணங்களானால் இரு கணங்களின் பிணைப்பு $A_1 \cup A_2$ ஆகும்.

**வரையறை 4 :** $A_1, A_2$ இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகள் அடங்கிய கணம் $A_1 \cap A_2$ ஆகும். இதை கணங்களின் வெட்டு என்கிறோம்.

**வரையறை 6 :** A என்ற பூத கணத்தின் உபகணம் $A$ என்றால், $A$-ல் இல்லாததும் A-ல் இருப்பதுமான உறுப்புகளைக் கொண்ட உபகணத்தை $A$-ன் கண நிரப்பி (Complement of $A$) என்றும் இதை $A^*$ என்றும் குறிக்கிறோம்.

**தேற்றம் 1 :**

$A_1, A_2$ என்பன $X$-ன் உபகணங்களானால், $A_1 \cup A_2$-ன் நிகழ்தகவு $= P_r (A_1 \cup A_2)$ என்றால் $P_r (A_1 \cup A_2)$

$$= P_r (A_1) + P_r (A_2) - P_r (A_1 \cap A_2)$$ ஆகும்.

இங்கும் கீழே வரும் தேற்றங்களுக்கு நிரூபணம் தரப்படவில்லை. முக்கிய விளைவுகளை மட்டும் இந்த அத்தியாயத்தில் குறிப்பிடுவதே நம் நோக்கமாகும். எனவே, வாசகர்கள் நிரூபணங்களைச் செய்துகொள்ள வேண்டி வாசகர்களின் நிரூபணத்துக்கு விடப்படுகின்றது.

**வரையறை 7 :**

(i) $P_r(A)$ என்பது $A$ கணத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட உப கணத்துக்கு வரையறுக்க மதிப்பானாலும்

(ii) $P_r(A) > 0$ என்றால்,

(iii) $P_r(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P_r(A_1) + P_r(A_2) + P_r(A_3) + \dots$ என்றால்,

(iv) மேலும் $P_r(A) = 1$ என்றாலும்,

$P_r(A)$ என்பதை நிகழ்தகவு கணச்சார்பலன் (Probability set function) என்று அழைக்கிறோம்.

**தேற்றம் 2**

$A$ எனும் மாதிரி கணத்தில் $A_1, A_2, \dots A_k$ என்பன $k$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பொருந்திய உபகணங்கள் என்றால்,

(i) $P_r(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_k) = P_r(A_1) + P_r(A_2) + \dots + P_r(A_k)$ ஆகும்.

(ii) அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெறாத உப கணங்களானால்

$$P_r(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P_r(A_i) - \sum_{\substack{i<j=1 \\ i \pm j}}^{k} P_r(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<l=1}^{k} P_r(A_i \cap A_j \cap A_l) - \dots + (-1)^{k-1} P_r(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k)$$ ஆகும்.

**ராண்டம் மாறியின் பரவலும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனும் (Distribution of Random Variable & Probability Function)**

A எனும் பூதகணத்தின் உபகணம் $A$ என்று கொள்க. A-ல் ஒரு ராண்டம் மாறி $X$-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$P_r(A) = P_r(X \in A)$ யுடைய நிகழ்தகவினை நிர்ணயிக்கலாம். A-ன் பல்வேறு உபகணங்களில் $X$ மாறி எவ்வாறு பரவியுள்ளது என்பதனை இந் நிகழ்தகவின்மூலம் அறிகின்றோம். இதை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் (probability density function, p.d.f. என்றும்) கூறலாம். இச் சார்பலன் இரு வகைப் படும். அவை (i) தனித்த வகை, (ii) தொடர் வகையாகும்.

(i) தனித்த வகை ராண்டம் மாறி

$x \in A$ என்றால், $f(x) > 0$ என்றால்,

$$\sum_{A} f(x) = 1 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, நிகழ்தகவு கணச் சார்பலன் $P_r(A)$ ஐ $f(x)$ சார்பலன் மூலமாக எழுதினால்,

$$P_r(A) = P_r(X \in A) = \sum_{A} f(x).$$

(ii) தொடர்வகை ராண்டம் மாறி

ஒருபடித்தான A கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(a) $f(x) > 0$, $x \in A$

(b) $A$-ன் உபகணமான ஒவ்வொரு முடிவுள்ள இடைவெளியிலும் தொடர்ச்சியின்மைகளின் ஒரு முடிவுடைய எண்ணிக்கையை $f(x)$ கொண்டிருந்தால், A-கணம் ரீமான்-தொகையைச் சார்ந்து விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\int_{A} f(x)\, dx = 1$$

$A$ எனும் மாறியின் கணத்தில் $A \subset A$ என்ற அளவில், $P(A)$ ஐ $f(x)$-ன் மூலமாக எழுதினால்,

$$P_r(A) = P_r(X \in A) = \int_{A} f(x)\, dx.$$

இத்தகைய $X$ மாறியை ஒரு தொடர்வகை ராண்டம் மாறி என்று அழைக்கின்றோம்.

பரவல் சார்பலன் (Distribution Function)

$A$ என்பது ஒருபடித்தான கணமானால், $X$ மாறியின் நிகழ்தகவு கணச் சார்பலன் $P_r(A)$ என்று நாம் அறிவோம்.

$A : \{X; -\infty < X < \infty\}$ என்று கொள்க.

இத்தகைய $A$ கணங்களுக்கு

$$P_r(A) = P_r(X \in A) = P_r(X < x)$$

இந்த நிகழ்தகவு $x$ என்ற புள்ளியைச் (மதிப்பைச்) சார்ந்துள்ளது. இந்தப் புள்ளிச் சார்பலனை $F(x) = P_r(X < x)$ என்கிறோம். இந்த $F(x)$ஐப் பரவல் சார்பலன் (distribution function) என்று கூறுகிறோம். இதையே $X$ மாறியின் 'திரள் பரவல் சார்பலன்' (Cumulative Distribution Function, c. d. f.) என்றும் கூறலாம்.

$$F(x) = P_r(X < x) = \sum_{w<x} f(w). \text{ [தனித்த வகைக்கானது]}$$

$$F(x) = P_r(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)\,dw. \text{ [தொடர் வகைக் கானது]}$$

$X$ மாறி தனித்த வகை (தொடர்வகை) மாறியானால், $F(X)$-ம் தனித்த வகைப்பட்ட (தொடர் வகைப்பட்ட) திரள் பரவல் சார்பலனாகும்.

**திரள் பரவல் சார்பலனின் குணப்பண்புகள்**

(i) $0 < F(X) < 1$ ஆகும்; ஏனென்றால் $0 < P_r(X < x) < 1$

(ii) $F(x)$ என்பது $x$-ன் குறையாத (non-decreasing) சார்பலன்.

(iii) $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$ ஆகும்.

(iv) $F(b) - F(a) = P_r(a < X < b)$ ஆகும்.

**கணக்கியல் எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு (Mathematical Expectation)**

$x$ என்ற ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x)$ என்றால், $u(x)$ என்பது $(x)$-ன் ஒரு சார்பலன் என்றால், $u(x)$-ன் எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கிறோம்.

$$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x)dx \text{ (தொடர் வகைக் கானது)}$$

$$E[u(x)] = \sum_{x} u(x) \cdot f(x) \text{ (தனித்த வகைக்கானது)}$$

இங்குத் தனித்த ராண்டம் மாறி $X$-ன் நிகழ்தகவு சார்பலனை $f(X)$ என்றால் $E(X) = \sum_{x} x f(x)$

$$= x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_n)$$

$$= \bar{X} = X\text{-ன் சராசரி மதிப்பாகும்.}$$

எனவே $E(x) = \bar{X}$.

இதைப்போலவே தொடர்மாறி $X$-ன் நிகழ்தகவு சார்பலன் $f(X)$ என்றால்,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \bar{X} \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு = சராசரி ஆகிறது.

**எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவின் பண்புகள்**

(i) $k$ என்பது ஒரு மாறிலி என்றால்,
$E(k) = k$

(ii) $v$ என்பது $x$-ன் ஒரு சார்பலன் என்றால்,
$E(kv) = k\,E(v)$ ஆகும்.

(iii) $k_1, k_2$ இரண்டும் மாறிலிகள் என்றால், $v_1, v_2$ இரண்டும் $x$-ன் சார்பலன்களானால்,

$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 \text{ என்றால்,}$$
$$E(u) = k_1 \cdot E(v_1) + k_2\, E(v_2) \text{ ஆகும்.}$$

(iv) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

(v) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$;
($X$, $Y$ இரண்டும் சார்பற்ற மாறிகளானால்)

**சிறப்புத் தன்மைகள்**

(1) $E(X) = \Sigma X \cdot f(X) = \mu$ ஆகும் (தனித்தவகை)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f(X)\, dX = \mu \quad \text{(தொடர்வகை).}$$

(2) மேலும் $u(X) = (X-\mu)^2$ என்றால்,

$$E(X-\mu)^2 = \sum_x (x-\mu)^2 \cdot f(x) \quad \text{(தனித்த வகை)}$$

$$= \sigma^2 \quad \text{மாறுபாடு ஆகும்.}$$

தொடர் வகை மாறிக்கு

$$E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \sigma^2$$

மாறுபாடு ஆகும்.

மேலும், $\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E[X-E(X)]^2$

$= E(X)^2 - [E(X)]^2$ ஆகிறது.

(3) திருப்புதிறனை உருவாக்கும் சார்பலன் (Moment Generating Function): $h$ என்பது நேர் எண் என்றால், $t$ என்ற பண் பளவை $-h < t < h$ என்றால், $X$ மாறியின் திருப்புதிறனை உருவாக்கும் சார்பலன் $M_x(t) = E(e^{tx})$ ஆகும்.

(a) $X$ தனித்த வகை மாறியானால்,

$$M_x(t) = E(e^{tx}) \sum_x e^{tx} \cdot f(x) \quad \text{ஆகும்.}$$

(b) $X$ ஒரு தொடர்வகை மாறியானால்,

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

ஒவ்வொரு பரவலும் ஒரு திருப்புதிறனை உருவாக்கும் சார்பலனைக் கொண்டிருக்கும் எனக் கூறமுடியாது. இச் சார் பலன் அமையப் பெறின், அது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த ஒன்றாகும். ஒரு ரசண்டம் மாறியின் பரவலுக்கு ஒரு திருப்பு திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்தான் உண்டு. அதேபோல ஒரு திருப்புதிறனை உருவாக்கும் சார்பலனைக் கொண்டு அம் மாறியின் பரவலைத் திட்டவட்டமாக நிர்ணயிக்கமுடியும். அதேபோல இரண்டு ராண்டம் மாறிகள் ஒரே மாதிரியான திருப்புதிறனை உருவக்ரகும் சார்பலனைக் கொண்டிருப்பின் அவை ஒரே பரவலைக் கொண்டிருக்கும். ஒரு திருப்புதிறனை உருவாக்கும் சார்பலனைப்

பயன்படுத்தி, $X$ மாறியின் திறப்புதிறன்களைக் கணிக்கமுடியும். மையமற்ற, மையமான திறப்புதிறன்களையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பொதுவாக $M_x(t)$-ன் $s$ஆவது வகைக்கெழு$M^{(s)}(t)$ என்றால்,

$$M^{(s)}(0) = E(X^s)$$

(c) $E(X^s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \; f(x)\, dx$ (தொடர் வகைக்கானது)

(d) $E(X^s) = \sum_x x^s . f(x)$ ஆகும். (தனித்த வகைக் கானது)

இங்கு $E(X^s) = s$-வது மையமற்ற திருப்புதிறன் ஆகும். இப்படி $M_x(t)$ யானது $t(X^s)$ $s = 1, 2, 3, ......$ என்ற திருப்பு திறன்களை உருவாக்குவதால் இதைத் திருப்புதிறன்களை உரு வாக்கும் சார்பலன் என்று அழைக்கிறோம்.

(e) $X_1$, $X_2$ இரு சார்பற்ற மாறிகளானால், $X_1 + X_2$ - ன் தி. உ. சா. ஆனது $X_1$, $X_2$ இவற்றின் தி. உ. சா.-க்களின் பெருக்கலாகும்,

அதாவது, $M_{x_1+x_2}(t) = M_{x_1}(t) . M_{x_2}(t)$. ($X_1$, $X_2$ சார்பற்ற வையானால்) என்று ஆகின்றது.

செபிச்சேவ்-வின் சம மின்மைக் கோட்பாடு (Tchebychev's Inequality)

முதலில் கீழ்க்கண்ட தேற்றம் விளக்கத்துக்காக எழுதப்படு கிறது.

தேற்றம் : $X$ ராண்டம் மாறியின் எதிர்மறையில்லாச் சார் பலன் (Non-negative function) $u(x)$ எனக் கொள்வோம். $E[u(x)]$-ன் மதிப்பு அமையப்பெறின், ஒவ்வொரு நேர் எண் $c$-க்கும்

$$P_r \; [u(x)c] < \frac{E[u(x)]}{c}$$

பிறகு அடுத்ததொரு தேற்றத்தின் மூலமாகச் செபிச்சேவின் சம மின்மையினை விளக்குவோம்.

தேற்றம் 2: ஒரு ராண்டம் மாறி $X$ நிலையான மாறுபாடு $\sigma^2$- ஐக் கொண்ட ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கொண்டிருப்பதாய்க்

கொள்வோம். $X$-ன் சராசரி $\mu$ என்றால், ஒவ்வொரு $k>0$-க்கும்

$$P_r\,|\,X-\mu\,|>k\sigma) < \frac{1}{k^2}$$ ஆகும்.

இது வாசகர்களின் நிருபணத்துக்கு விடப்படுகின்றது.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு: ஒரு ராண்டம் சோதனையில் ஏற்படும் மதிப்புகள் $C_1$-ன் மதிப்புகளாயிருப்பின், சோதனையில் ஏற்பட்ட மதிப்புகளை மட்டுமே எடுத்துக்கொள்வோம். $C_1$-ஐ மாதிரி கணம் என வைத்துக்கொண்டு $C$ என்ற பூத கணத்தின் மறு உபகணமான $C_2$-ன் நிகழ்தகவினைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இந்த நிகழ்தகவானது $C_1$ வினாவின் எண்மானத்தைச் (hypothesis) சார்ந்த $C_2$ வினாவின் 'நிபந்தனை நிகழ்தகவு' ஆகும். அதாவது $C_1$ தரப்பட்டபோது $C_2$-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு ஆகும். இதை $P_r\,(C_2/C_1)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

$C_1$-ன் மொத்த உறுப்புகளில் $C_2$-க்கும் பொதுவான உறுப்புகளை $C_1 \cap C_2$ என்று குறிக்கலாம்.

$$\therefore \quad P_r\,(C_2/C_1) = P_r\,(C_1 \cap C_2/C_1)$$ ஆகும்.

மேலும், $P_r\,(C_1 \cap C_2/C_1) = \dfrac{P_r\,(C_1 \cap C_2)}{P_r\,(C_1)}$ என்பதால்,

$$P_r\,(C_2/C_1) = \frac{P_r\,(C_1 \cap C_2)}{P_r\,(C_1)}$$

அல்லது $P_r\,(C_1 \cap C_2) = P_r(C_1) \cdot P_r(C_2/C_1)$;

இதையே நிகழ்தகவுப் பெருக்கல் நியதி (Multiplication Law of Probability) என அழைக்கின்றோம்.

உடன் தொடர்புக் கெழு (Correlation Coefficient)

$X, Y$ எனும் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே காணப்படும் உடன் தொடர்பினை ஓர் உடன் தொடர்புக் கெழு மூலமாக வெளிப்படுத்துகிறோம். இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே சமயத்தில் அதிகரித்துக்கொண்டோ குறைந்துகொண்டோ சென்றால் அம் மாறிகள் நேரான தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்றும் ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் அதிகமாக அதிகமாக, மற்றொன்றின் மதிப்புகள் குறைந்துகொண்டேவந்தால் அம் மாறிகள் எதிர்மறைத் தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்றும் கூறுகிறோம். இம் மாறிகள் எந்த அளவுக்குத் தொடர்புடையவை என்பதைப் புள்ளியியல் வாயிலாக அறிய உடன் தொடர்புக் கெழு பயன்படுகிறது.

$E(X)=\mu_1$, $E(X) = \mu_2$ என்றால்,

$X$-ன் மாறுபாடு $= \sigma_x^2 = E(X-\mu_1)^2$

$Y$-ன் மாறுபாடு $= \sigma_y^2 = E(Y-\mu_2)^2$ ஆகும்.

$X, Y$ இரண்டின் உடன்மாறுபாடு

$$\sigma_{xy} = E(X-\mu_1)(Y-\mu_2)$$

$= \text{Cov}(X, Y)$ ஆகும் என்றால், $X, Y$ மாறிகளுக்கான உடன் தொடர்புக் கெழு $r_{xy}$ என்றால்,

$$r_{xy} = \frac{E(X-\mu_1)(Y-\mu_2)}{\sqrt{E(X-\mu_1)^2 E(Y-\mu_2)^2}}$$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே, $r_{xy} = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X \text{ Var } Y}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ ஆகிறது.

இந்த உடன் தொடர்புக் கெழு $0 < r_{xy} < 1$ என்றவாறு அமைகிறது.

உடன் தொடர்புக்கெழு ஆதி அலகு மாற்றங்களில் சார்பற்ற ஒரு கெழுவாகும், இதை விளக்குவதற்கு $X, Y$ மாறிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு உருமாற்றம் செய்வோம்.

$$u = \frac{X-a}{b}$$

$$v = \frac{Y-c}{d}$$

என்ற இரு மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்போம்.

இங்கு $a, b, c, d$ நேர்நிலை எண்களாகும் (Positive constants).

$$r_{u,v} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{V(u)\,V(v)}}$$ என்ற வரையறையின்படி.

$r_{u,v}$-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\text{Cov}(U, V) = E[(U-\bar{U})(V-\bar{V})]$$

$$= E\left(\frac{X-\bar{X}}{b}\right)\left(\frac{Y-\bar{Y}}{d}\right)$$

$$= \frac{1}{bd} E(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$$

$$V(u) = E(U-\overline{U})^2$$
$$= E\left(\frac{X-\overline{X}}{b}\right)^2$$
$$= \frac{1}{b^2}\ V(X)$$

$$V(v) = E(V-\overline{V})^2$$
$$= E\left(\frac{Y-\overline{Y}}{d}\right)^2$$
$$= \frac{1}{d^2}\ V(Y).$$

எனவே $r_{u,v} = \dfrac{1}{bd} \dfrac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\dfrac{1}{b^2\ d^2}}\ \sqrt{V(x)\ \ V(y)}}$

$$= \frac{\sqrt{b^2\ d^2}}{bd}\ \ r x_1\ y = \frac{bd}{bd}\ r_{xy} = r_{xy}$$

இங்கு $r_{uv} = r_{xy}$ என்பதால் உடன் தொடர்புக் கெழு அலகு அளவையைச் சாராது அமைகிறது என்பதை அறிகிறோம்.

பரவல்களும் (Distributions) அவற்றின் தன்மைகளும்

ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial Distribution): புள்ளியியல் தத்து வத்தின் செயல்முறைகளில் மிகவும் அடிக்கடி உபயோகமாகின்ற தனித்த பரவல்களில் ஈருறுப்புப் பரவலும் ஒன்றாகும். ஒரு சோதனையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்வதால் ஏற்படும் விளைவு களை ஒட்டி இப் பரவல் அமைகிறது.

பொதுவாகக் கூறினால், எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவும் ஏற்பட்டதற்கான வாக அளவு $p$ எனக் கொண்டால், அவ் விளைவு நிகழாததற்கான வாக அளவு $q = 1 - p$ ஆகும். விளைவு நிகழ்ந் ததை 'வெற்றி' என்றும், நிகழாததைத் 'தோல்வி' என்றும் குறித் தால், வெற்றிக்கான வாக அளவு $p$ என்றும் தோல்விக்கான வாக அளவு $q = 1 - p$ என்றும் அறிகிறோம்.

வரையறை : ஒரு ராண்டம் மாறி $X$-ன் வாக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x)$,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots n, q = 1 - p.$$

$= 0$, (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்) என்றால், $X$ மாறி ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் அமைந்திருக்கிறது எனலாம். அத்தகைய $f(x)$ ஓர் ஈருறுப்பு ஊக அளவு சார்பலன் ஆகும்.

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலை $b\ (n, p)$ என்ற குறியில் வழங்குவோம். இங்கு $n, p$ இரண்டும் ஈருறுப்புப் பரவலின் 'பண்பளவுகள்' (parameter) ஆகும். ஒரு *ராண்டம் சோதனையின்* $n$ *முயற்சி*களில் (trials) $x$ வெற்றின் கிட்டுவதற்கான ஊக அளவைக் காண்போம்.

$n$ முயற்சிகளில் $x$ வெற்றிகள் என்றால், $(n - x)$ தோல்விகள் என்பது யாவரும் அறிந்ததே. ஒரு வெற்றியின் ஊக அளவு $p$; அத்துடன் எல்லா முயற்சிகளும் சார்பற்றவை என்பதால் வெற்றிகளின் ஊக அளவு $= p.p \ldots\ldots p$, $x$ தடவைகள்

$$= p^x$$

$(n - x)$ தோல்விகளின் ஊக அளவு $= q^{n-x}$

$\therefore$ $n$ முயற்சிகளில் $x$ வெற்றிகளுக்கும், $(n - x)$ தோல்விகளுக்குமான ஊக அளவு $= p^x \cdot q^{n-x}$

இந்த வெற்றிகள், $n$ முயற்சிகளில் 'ஏதாவது $x$' வெற்றிகளாக இருப்பதால்; $\binom{n}{x}$ தடவைகளில் நிகழலாம். எனவே, *$x$ ராண்டம் மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்*

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்) என்றால் $X$ மாறி ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் அமைந்துள்ளது எனலாம்.

இங்கு $n,p$ இரண்டும் ஈருறுப்புப் பரவலின் சுட்டுறுப்புகளாகும். ஒரு *ராண்டம் சோதனையின்* $n$ முயற்சிகளில் $x$ வெற்றிகள் கிட்டுவதற்கான நிகழ்தகவினை இங்கு $p$ என்று குறிக்கிறோம். இங்கு $0 < p < 1$ ஆகும். ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலுக்கான திருப்புதிறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $M_x\ (t) = E\ (e^{tx})$

$$= \sum_x e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= (pe^t + q)^n, \ q = 1 - p \text{ ஆகிறது}$$

இச் சார்பலனின்மூலம் $E(x) = X$-ன் சராசரி $= np$

$V(X) = X$-ன் மாறுபாடு $npq$ என்றும் அறிகின்றோம்.

$X \to b(n, p)$ என்றால்,

$E\left(\frac{x}{n}\right) = E$[வெற்றிகளின் விகிதம்] $= p$ ஆகும்.

மேலும் $V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{pq}{n}$ ஆகும்.

ஈருறுப்புத் திருப்பு திறன்களாவன :

(i) $\mu_1{}^1 np = \mu = E(X) = X$-ன் சராசரி.

(ii) $\mu_2 = npq = X$-ன் மாறுபாடு.

(iii) $\mu_3 = npq\,(q - p) = X$-ன் மூன்றாவது மையத் திருப்பு திறன்.

(iv) $\mu_4 = npq\,[1 + 3\,(n - 2)\,pq] = X$-ன் நான்காவது மையத் திருப்புத்திறன்.

இதன்மூலம் கோட்ட அளவு, தட்டை அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^3}} = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2}$$ என்றால்

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{1 - 6pq}{npq}$$ என்று அறியலாம்.

$n$ மிகப் பெரிதாகையில், $\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$ ஆகிறது. அதாவது, $n \to \infty$ என்றால், ஈறுருப்பு மாறியானது இயல் நிலைமாறியாகின்றது. $\frac{X - np}{\sqrt{npq}} = z$ என்றால் $z$-ஒரு கொடுக்கப்பட்ட ஈருறுப்பு மாறியாகும்.

**மூன்று உறுப்புப் பரவல்**

(i) $x_1, x_2$ என்பன எதிர் மறையற்ற எண்கள், $X_1 + X_2 < n$

(ii) $p_1, p_2, p_3$ மூன்றும் நேர்பின்னங்கள் (positive fractions)

(iii) $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ என்றும் இருக்கட்டும்

பிறகு $X_1$, $X_2$ என்ற தனித்த வகை ராண்ட மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{n-x_1-x_2}$$

$$x_1 + x_2 < n$$

$= 0$, மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம் $\quad \Sigma_i p_i = 1$

$$p_i > 0$$

அதாவது

$$f(X_1, X_2) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

$$\Sigma_i x_i = n$$

$= 0$, மற்ற இடங்களில் எல்லாம் $\quad \Sigma_i p_i = 1$

$$p_i > 0$$

என்றும் எழுதலாம்.

இந்த இணைந்த நிகழ் தகவுச் சார்பலன் $f(x_1, x_2)$ ஐக் கொண்ட $X_1$, $X_2$ மாறிகளின் பரவல் ஒரு மூன்று உறுப்புப் பரவல் என்று அழைக்கின்றோம்.

பல்லுறுப்புப்பரவல் (Multinomial Distribution) :

$X_1$, $X_2$, $X_{k-1}$ என்ற $(k-1)$ தனித்த வகை ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுச் சார்பலன்

$$f(x_1, x_2, \dots x_k) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ \dots\ x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

$$\Sigma_i x_i = n$$

$$\Sigma p_i = 1$$

$$p_i > 0$$

$= 0$, மற்ற மதிப்புகளிலெல்லாம்.

ஏனெனில் $x_k = (n - x_1 - x_2 \dots x_{k-1})$ ஆகும்.

பாய்ஸான் பரவல் (Poisson Distribution)

மற்ரொரு தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவலானது பாய்ஸான் பரவலாகும். சிமியன் டெனிஸ்பாய்சான் (Simeon Denis Poisson) என்பவர் 1837ஆம் ஆண்டில் முதன் முதலில் விளக்கிய பரவலே இந்தப் பாய்ஸான் பரவலாகும். ஓர் அபூர்வ நிகழ்ச்சிகளின் (rare events) பரவலே பாய்ஸான் பரவல். பாய்ஸான் மாறி $x$-ன் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு உள்ளது.

$f(x) = x$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் என்ருல்

$\lambda =$ ஒரு குறிப்பிட்ட கால வரையில் நிகழும் வெற்றிகளின் எதிர்பார்க்கும் அளவு அல்லது $x$-ன் சராசரி என்ருல்,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

$= 0$ மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்

என்றவாறு பாய்ஸான் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் குறிக்கப் படுகிறது.

இந்தப் பாய்ஸான் பரவலேயே ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் வரம்பு (limit) (சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளுடன்) என்றும் கூறுகிறேம்.

பாய்ஸான் பரவல் (Poisson Distribution): வெற்றியின் நிகழ்தகவு $p$ (அல்லது $q$) மிகச் சிறியதாயும் $n$-ன் மதிப்பு மிக அதிகமாயும் இருந்து அதே சமயத்தில் $np = \lambda$ நிலையான எண்ணுகவும் இருந்தால் ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு பாய்ஸான் பரவலை அணுகுகிறது எனக் கூறலாம்.

$X$ மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பலன்

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

$= 0$ மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்

என்றவாறு இருப்பின் $x$ மாறி ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும். பாய்ஸான் மாறிகளின் எடுத்துக்காட்டுகளாக அச்சில் வெளிவந்த ஒரு புத்தகத்தின் ஒரு பக்கத்தில் காணப்படும் அச்சுப் பிழைகள், மாரடைப்பினுல் $t$ காலத்தில் ஏற்பட்ட சாவுகளின் (தற்கொலைகளின்) எண்ணிக்கை இவற்றைக் கூறலாம். பாய்ஸான் பரவலின் திருப்புதிறன்களை உருவாக்கும் சார்பலனுனது $M_x(t) = e^{\gamma(e^t - 1)}$ ஆகும்.

இதன் மூலம் க டறிந்த திருப்புதிறன்களாவன:

$\mu_1' = \lambda = E(X)$

$\mu_2 = \lambda = V(X)$

$\mu_3 = \lambda = X$-ன் மூன்ருவது மையத் திருப்புதிறன்

$\mu_4 = 3\lambda^2 + \lambda = X$-ன் 4ஆவது மையத் திருப்புதிறன்

எனவே, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{1}{\lambda}$

$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{1}{\lambda}$ ஆகும்.

எனவே $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{np}} \to 0,\ n \to \infty$ என்கையில்

மேலும் $\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{np} \to 0,\ n \to \infty$ என்றால்,

∴ இங்குப் பாய்ஸான் மாறியான $X$ மாறி ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் அமைகிறது.

$X_1, X_2$ இரு மாறிகளும் சார்பற்ற பாய்சான் மாறிகளாக இருந்தால் அவற்றின் சராசரிகள் முறையே $\lambda_1, \lambda_2$ என்றால் $X_1 + X_2$ என்ற மாறியானது $(\lambda_1 + \lambda_2)$ ஐச் சராசரியாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும்.

ஆனால், இங்கு $X_1 - X_2$ ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகாது என்பது கவனிக்கப்படவேண்டிய ஒன்றாகும்.

$z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகின்றது.

## எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவல் (Negative Binomial Distribution)

ஈருறுப்புப் பரவலில் சில மாற்றங்களுடன் இங்கு ஆராய்ந்தால் எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவல் கிடைக்கிறது.

ஒரு சோதனையின் $n$ முயற்சிகளைத் தொடர்ச்சியாக ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

(i) முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றும் சார்பற்றவை,

(ii) முயற்சிக்கு முயற்சி வெற்றியின் நிகழ்தகவு $p$ ஒரு நிலை எண் என்று அனுமானித்தால்,

$(x + r)$ முயற்சிகளில் சரியாக $r$ வெற்றிகளும் $x$ தோல்விகளும் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X, r)$ என்றால்,

$$f(X, r) = \binom{X + r - 1}{r-1} p^r q^X,\ X = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0 \text{ மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்.}$$

என்றவாறு இருப்பின் $X$ மாறி ஓர் எதிர்மறை ஈருறுப்பு மாறியாகும். இங்குச் சரியாக $r$ வெற்றிகள் பெறவேண்டுமாயின் கடைசி முயற்சி அல்லது ஒரு வெற்றியாக அமைதல் வேண்டும்.

$f(x, r)$ என்பது $x$ என்ற தனித்த எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனாகும். இந்த $x$-ன் பரவலை பரவலை "பாஸ்கலின் பரவல்" என்றும் அழைக்கலாம்.

$p = \frac{1}{Q}$ ; $q = \frac{P}{Q}$ என்றால், எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலின் திருப்பு திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன்

$$M_x(t) = [Q - Pe^t]^{-r}$$

$$X\text{-ன் சராசரி} = \frac{r(P+1)}{P}$$

$$X\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{r(P+1)}{P^2}$$

இங்கு $X$-ன் மாறுபாடு $>$ $X$-ன் சராசரி. இது இப் பரவலின் ஒரு முக்கிய விளைவாகும்.

ஜியோமிதிப் பரவல் (Geometric Distribution) : எதிர் மறை ஈருறுப்புப் பரவலில் $k = 1$ என்றால், அது ஜியோமிதிப் பரவலாகிறது.

ஒரு சோதனையில் முதல் வெற்றிக்கு முந்திய தோல்விகளின் எண்ணிக்கை $x$ எனில், $x$ என்ற ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x) = q^x . p$, $x = 0, 1, 2, \ldots \ldots$ $q = 1 - p$

$= 0$ மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்

என்றால் $x$ மாறி ஒரு ஜியோமிதிப் பரவல் மாறியாகும்.

$X$ மாறியின் திருப்புத் திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் :

$M_x(t)$

$$M_x(t) = p . (1 - q . e^t)^{-1}.$$

$$X\text{-ன் சராசரி} = \frac{q}{p}$$

$$X\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{q}{p^2} \text{ ஆகும்.}$$

செவ்வகப்பரவல் அல்லது ஒரு சீரான பரவல் (Rectangular or Uniform Distribution) : $X_1$, $X_2$, ... $X_n$ என்ற $n$ ராண்டம் மாறிகள் $\frac{1}{n}$ அதே நிகழ் தகழ்வுடன் இருப்பின், $X$-ன் நிகழ் தகவுச் சார்பலன் $f(X = x) \cdot \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

$= 0$, மற்ற இடங்களில் எல்லாம்,

என்றவாறு இருந்தால், $X$ மாறி ஒரு செவ்வகப் பரவல்—மாறியாகும். இதுவரை தொடர்ச்சியற்ற—தனித்த பரவல் மாறிகளைக் கண்டறிந்தோம். இனி தொடர்ச்சிப் பரவல்களை ஆராய்வோம். இங்கு குறிப்பாக செவ்வகப்பரவல் ஒரு தொடர்ச்சிப் பரவலாகவும் இருக்கலாம்.

தொடர்ச்சிப் பரவல்கள் : $X$ என்ற தொடர்மாறியின் நிகழ் தகவுச் சார்பலன்

(i) செவ்வகப்பரவல் :

$$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \alpha < x < \beta, \quad \alpha > 0, \ \alpha < \beta \text{ என்றால்}$$

$$= 0, \text{ மற்ற இடங்களில் எல்லாம்.}$$

என்றால், $X$ மாறி ஒரு சீரான அல்லது செவ்வகப்பரவலில் அமைகிறது. இப் பரவலுக்கு $\alpha$, $\beta$ என்ற 2 சுட்டுறுப்புகள் உள்ளன.

$$E(X) = X\text{-ன் சராசரி} = \mu_1' = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$V(X) = X\text{-ன் மாறுபாடு} = \mu_2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} \text{ ஆகும்.}$$

(ii) அடுக்குப் பரவல் (Exponential Distribution)

ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறி $X$-ன் அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \ \theta > 0.$$

$$= 0 \text{ மற்ற இடங்களில் எல்லாம்.}$$

என்றால், அந்த $X$ மாறி அடுக்குப்பரவலில் அமைகிறது எனலாம். இப்பரவலின் சுட்டுறுப்பு $\theta$ ஆகும்.

அடுக்குப்பரவலின் திருப்புத்திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $M_x(t) = (1 - t\theta)^{-1}$ ஆகிறது.

$\mu_1' = E(X)$-ன் சராசரி $= [M'(t)]_{t=0} = \theta$.

$\mu_2 = V(X) = X$-ன் மாறுபாடு $= 2\theta^2$.

(iii) காம்மாப் பரவல் (Gamma distribution)

ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறி $X$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x,\theta) = k.x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{1}{\beta}x}$ $0<x<\infty$, $\alpha,\beta>0$.

$$= 0, \text{ மற்ற இடங்களில் எல்லாம்.}$$

என்றால், $X$ மாறி ஒரு காம்மா மாறியாகும்.

இங்கு $k = \frac{1}{\beta^{\alpha} . \Gamma(\alpha)}$ ஆகிறது.

எனவே, $f(x; \theta) = \frac{1}{\beta^{\alpha} . \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} . x^{\alpha - 1}$

$0 > x < \infty \quad \alpha, \beta > 0$

$= 0$ மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.

இந்த காம்மா பரவல் ஒரு முக்கிய பரவலாகும். $\alpha$, $\beta$ இதன் சுட்டுருப்புகள்.

$\alpha = 1$ என்றால், இது ஓர் அடுக்குப் பரவலாகிறது.

$\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = 2$ என்றால், இது ஒரு கை-வர்க்கப் பரவலாகிறது.

காம்மா பரவலின் திருப்பு திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன்:

$M_x(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$ ஆகும்.

$\mu^1 = E(X) = X$-ன் மாறுபாடு $= \alpha\beta$.

$\mu_2 = V(X) = X$-ன் சராசரி $= \alpha\beta^2$ ஆகிறது.

(iv) இயல் நிலைப்பரவல் (Normal Distribution)

இன்றைய புள்ளியியல் ஆய்வில் மிகவும் முக்கியமான பரவல் இயல் நிலைப்பரவலாகும். இதை "காஸ்ஸியன் பரவல்" (Gaussian Distribution) என்றும் கூறலாம். பல செயல் முறை நிலைகளில் உள்ள புள்ளி விவரங்கள் தோராயமாக இயல் நிலையில் அமைகின்றன என்று காண்கிறோம்.

$X$ மாறியின் (தொடர் மாறியின்) நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$-\infty < x < \infty$,
$-\infty < \mu < \infty$
$0 < \sigma < \infty$

என்றால், அது ஓர் இயல் நிலை மாறியாகும்.

$X$-ன் ஓர் இயல் நிலைப் பரவலின் சுட்டுருப்புகள் $\mu$, $\sigma$ என்பனவாகும்.

$n$ முடிவிலியை அணுகும் போது ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல், ஓர் இயல் நிலைப் பரவலை அணுகுவதைக் காண்கிறோம்.

$\frac{X-\mu}{\sigma} = z$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஓர் இயல் நிலை மாறியாகும்.

$\mu_1{}^1 = E(X) = X$-ன் சராசரி $= \mu$

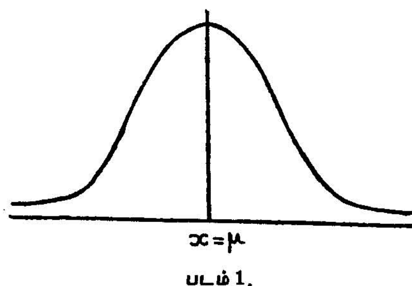
$\mu_2 = V(X) = X$-ன் மாறுபாடு $= \sigma^2$ ஆகும்.

**இயல் நிலைப்பரவலின் முக்கியப் பண்புகள் :**

1. $X = \mu$ என்ற நேர் கோட்டில்

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}$$

எனும் இயல் நிலை வளைகோடு சமச் சீராக உள்ளது.




படம் 1.

2. இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு மூன்றும் ஒரே இடத்தில் பொருந்தியுள்ளன.

3. $x$ மாறி எண்ணளவில் (numerically) கூடுகையில், $f(x)$ வேகமாகக் குறைகிறது. $X = \mu$ என்ற புள்ளியில் நிகழ்தகவு அளவு உச்சமாக உள்ளது.

4. $\beta_1 = 0$ கோட்டத்தன்மை $= 0$ ஆகும்.

$\beta_2 = 3$ தட்டையளவு இயல்பான நிலையில் உள்ளது.

5. $\mu_{2r+1} = 0$ அதாவது ஒற்றைப்படை எண்களுக்கான மையமான திருப்பு திறன்கள் பூஜ்ய மதிப்பைப் பெற்றுள்ளன.

6. இயல்நிலை மாறிகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமும் (linear combination) ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும்.

7. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma$$

$$= \frac{4}{5} \sigma \text{ ஆகும்.}$$

8. $X$ அச்சு இவ் வளைகோட்டுக்கு ஒரு தொலை தொடு கோடு அல்லது அணு கோடு (asymptote) ஆகும்.

இயல் நிலைப்பரவலின் திருப்பு திறன்களை உருவாக்கும் சார் பலன் $= M_x(t)$ என்றால்,

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2} \text{ ஆகும்.}$$

இதன்மூலம் $\mu^1{}_1 = \mu$

$\mu_2 = \sigma^2$

$\mu_3 = 0$

$\mu_4 = 3\sigma^4$ என்று அறிகிறோம்.

இப்போது $X_i$ $(i = 1\ 2, \dots n)$ இயல்நிலை மாறிகளானால் அவற்றின் $\mu\ \sigma^2$ (எல்லா மதிப்புகளுக்கும்) என்றால்,

$\bar{X} = \frac{\Sigma Xi}{n}$ மாறியும் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றது.

$\bar{X}$ பரவலின் சுட்டுறுப்புகள் $\mu, \frac{\sigma^2}{n}$ ஆகும்.

அதாவது, $\bar{X}$-ன் சராசரி $= E(\bar{X}) = \mu$.

$\bar{X}$-ன் மாறுபாடு $= V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$\bar{X}$-ன் திட்ட விலக்கம் $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

நிகழக்கூடிய பிழை (Probable Error) : $\lambda$ என்பது ஒரு பிழை மதிப்பு எனக் கொள்வோம். இப்போது $X$ மாறி ஒரு $N(\mu, \sigma^2)$ என்றால், $(\mu - \lambda,\ \mu + \lambda)$ என்ற இடைவெளிக்குள் "$\lambda$ என்ற ஒரு பிழை" நிகழக்கூடிய நிகழ்தகவும், மேற்கூறிய இடைவெளிக்கு அப்பால் ஒரு பிழை நிகழக்கூடிய நிகழ்தகவும் ஒன்றேயாகில், அந்தப்பிழையை "நிகழக்கூடிய பிழை (Probable Error) என்று கூறுகின்றோம்.

இந்த நிகழ்த்தக்க பிழை $\lambda + \frac{2}{3}\sigma$ ஆகிறது.

இதன் மூலம் முதல் கால்மானம் (First Quartile)$=Q_1=\mu-\lambda$
$= \mu - 0{\cdot}6745\sigma$

மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = \mu + \lambda = \mu + 0{\cdot}6745\sigma$

எனவே, கால்மான வீச்சு (Quartile Deviation)

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = 0{\cdot}6745\sigma = \frac{2}{3}\sigma \text{ ஆகும்.}$$

$X \cap N(\mu, \sigma^2)$ என்றால்,

$(X = \mu, X = x_1)$ இடைவெளியில், $X$ ராண்டம் மாறியின்

நிகழ்தகவு $= P_r[\mu < X < x_1] = \int_{\mu}^{\infty} f(x)dx$ ஆகும்.

$z = \frac{X-\mu}{\sigma} \cap N(0, 1)$ என்பதால்

$\left[z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}\right.$ என்றால் $\left.\right]$

$$P_r[\mu < X < x_1] = P_r(0 < z < z_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \int_0^{z_1}\phi(z)dz$$

மேலும்

(i) $P_r(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P_r[-1 < Z < +1]$

$$= \int_{-1}^{1}\phi(z)dz \quad = 2\cdot\int_0^1 \varphi(z)dz = \mathbf{0{\cdot}6826}.$$

(ii) $P_r(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=P_r(-2<Z<2) = 0{\cdot}9544$

(iii) $P_r(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=P_r(-3<Z<3) = 0{\cdot}9973$
ஆகும்.

**இயல் நிலைப்பரவலின் முக்கியத்துவம் (Importance of Normal Distribution) :**

முதன் முதலில் 1773ஆம் ஆண்டில் ஓர் ஆங்கில கணித நிபுணர் டீ-மாய்வர் (De Moivre) ஒரு கணித நூலில் இந்த இயல்

நிலைப் பரவலை வரையறுத்தார். ஈருறுப்புப் பரவலானது, $n \to \infty$ எனும் போது, ஓர் இயல் நிலைப்பரவலை அணுகுவதை இவர் கண்டறிந்து வாய்ப்புக்கூறு விளையாட்டுகளில் உண்டாகும் வினுக் களுக்கு இதைப்பயன்படுத்தினர். வானவியலில் பிழைகளின் பரவலாக 19ஆம் நூற்றுண்டின் ஆரம்பத்தில் இது திரும்பவும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. காஸ் (Gauss) என்ற பேராசிரியர் இயல் நிலைப்பரவலை ஆராய்ந்து உண்டாக்கியதால் இது காஸ்ஸியன் பரவல் என்றும் பெயர் பெறுகிறது.

இயல் நிலைப்பரவல் புள்ளியியல் தத்துவங்களில் ஒரு முக்கியப் பணியினை ஆற்றுகிறது.

1. செய்முறைகளில் காணப்படும் (உண்டாகிற) எல்லாப் பரவல்களும். உதாரணமாக ஈருறுப்புப்பரவல், பாய்சான் பரவல், மட்டு மீறிய ஜியோமிதிப்பரவல் முதலியன இயல் நிலைப் பரவலைப் பெரிதும் ஒத்திருக்கின்றன. அதாவது இவை இயல் நிலைப் பரவ லுக்குத் தோராயமாக்கப்படுகின்றன.

2. ஸ்டூடன்டின் $t$, ஸ்நெடகரின் $F$, கைவர்க்கப்பரவல் முதலியனவும் பெரிய மாதிரிகளுக்கு இயல் நிலையை அணுகு கின்றன.

3. ஒரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலில் இல்லாமலிருந்தால், மாதிரியின் சாதாரண உருமாற்றம் மூலமாக அதை இயல் நிலைக் குக் கொண்டு வர முடியும். உதாரணமாக $X$-ன் பரவல் சமச் சீரற்றுக் கோட்டத்தில் இருந்தால் $\sqrt{X}$-ன் பரவல் இயல் நிலையில் அமைகின்றது.

4. எல்லாப் பெரிய மாதிரிகளின் தத்துவங்களும் முழுக்க முழுக்க இயல் நிலைப்பண்புகளை ஒட்டியே அமைந்துள்ளன.

5. பல மாதிரிப் பண்பளவைகள் (Sample Statistics) உதா ரணமாக மாதிரிச்சராசரி, மாதிரி மாறுபாடு முதலியன பெரிய மாதிரிகளுக்கு இயல் நிலையை அணுகுகின்றன.

6. மாதிரியின் எல்லா மிகைத் தன்மைச் சோதனைகளின் நிருபணங்களும் "மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி கள் இயல் நிலையில் உள்ள" என்ற எடுகோளை அடிப்படையாகக் கொண்டு உள்ளன.

7. புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாட்டில் இயல் நிலைப்பரவல் பெரிதும் பயன்படுகின்றது.

முதல் வகை பீட்டாப்பரவல் (Beta Distribution of the fist kind) ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறி $X$-ன் நிகழ்தகவுச் சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\beta(m, n)} \cdot x^{m-1} (1-x)^{n-1} \quad m>0, n>0, 0<x<1$$

$= 0$ மற்ற மதிப்புகளுக்கு.

என்றால், $x$ மாறியை $m, n$ இரு சுட்டுருப்புகளைக் கொண்டதொரு முதல்வகை பீட்டா மாறி'' $\beta_1(m, n)$ என்று அழைக்கிறோம்.

$$\text{இங்கு, } \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ ஆகும்.}$$

$X$-ன் திருப்புத் திறன்கள் :

$$\mu_1^1 = \frac{m}{m+n} = X\text{-ன் சராசரி.}$$

$$\mu_2 = V(X) = X\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{mn}{(m+n)^2 (m+n+1)}$$

இரண்டாம் வகை பீட்டாப் பரவல் (Beta Distribution of second kind): $X$ மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{\beta(m, n)} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}, \qquad 0 < x < \infty, \quad m, n > 0.$$

$= 0$, மற்ற இடங்களில்

என்றால், $X$ மாறியானது $m, n$ இரு சுட்டுருப்புகளைக் கொண்ட ஓர் இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாக அழைக்கப்படுகிறது.

$$\mu_1^1 = E(X) = X\text{-ன் சராசரி} = \frac{m}{n-1}$$

$$\mu_2 = V(X) = X\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{m(m+n-1)}{(n-1)^2 (n-2)} \text{ ஆகும்.}$$

பண்புகள் 1. $X \cap N(\mu, \sigma^2)$ என்றால்,

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \text{ மாறி ஒரு காம்மா மாறி } \Gamma(\tfrac{1}{2}) \text{ ஆகும்.}$$

2. $x, y$ என்பன முறையே $m, n$ சுட்டுருப்புகளைக்கொண்ட இரு சார்பற்ற காம்மா மாறிகளாயின்,

(i) $U = x + y$ மாறி $(m+n)$ஐச் சுட்டுருப்பாகக் கொண்ட ஒரு காம்மா மாறியாகும்.

(ii) $V = \frac{x}{x+y}$ மாறியானது $m$, $n$ சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முதல் வகை பீட்டா மாறியாகும்.

(iii) $w = \frac{x}{y}$ மாறி $m$, $n$ சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாகும்.

**கோஷியின் பரவல் (Caucby Distribution) :** ஒரு தொடர்ராண்டம் மாறி $x$-ன் நிகழ்தகவுச் சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-\mu)^2]} \quad -\infty < x < \infty$$

என்றால், $x$ மாறியை ஒரு கோஷி மாறி என்றும், $x$-ன் பரவலை ஒரு கோஷியின் பரவல் என்றும் குறிப்பிடலாம். இப்பரவல் புள்ளியியல் தத்துவத்தில் மிகவும் பயன்படுகிறது. $x=\mu$ என்ற புள்ளியைச் சுற்றி சமச்சீராக இதன் அடர்த்திச் சார்பலன் உள்ளது. எனவே, இப்பரவலின் இடைவெளி (medium) $x = \mu$ என்ற மதிப்பேயாகும். இது திருப்புத் திறன்கள் அமையாத ஒரு பரவலாகும்.

**உடன் தொடர்பும் தொடர்புப் போக்கும் (Correlationg and Regression) :** $X$, $Y$ இரு மாறிகளின் உடன் தொடர்புக்கெழு $r_{x,y}$ என்று வரையறுத்தால்,

$$r_{x,y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} \text{ எனும்}$$

$$= \frac{E(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sigma_x.\sigma_y} \text{ என்றும் எழுதுகிறோம்.}$$

இங்கு $E(X) = \bar{X}$, $E(Y) = \bar{Y}$ ஆகிறது.

இக் கெழுவினைக் கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்.

$$r = \frac{\sigma^2_{x+y} - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2\sigma_x \sigma_y}$$

இங்கு $\sigma_{x+y}^2 = (X+Y)$-ன் மாறுபாடு $= V(X+Y)$ ஆகும்.

$r$-ன் மதிப்பு $-1 < r < +1$ என்றவாறு அமைகின்றது.

**மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு :** ஒரு, இருமாறிப் பரவலில், மாறிகள் தொடர்புடன் இருந்தால், இந்த இணைந்த மாறிகளைப் (ஜோடி மாறிகளை) புள்ளிகளின்மூலம் சிதறல் விளக்கப்படமாக

(Scatter Diagram) அமைக்கலாம். அப் புள்ளிகள் ஏதேனும் ஒரு வளைகோட்டைச் சுற்றிச் சூழ்ந்திருப்பின், அதற்குத் "தொடர்புப் போக்கு வளைகோடு" என்று பெயராகும். ஒரு மாறியின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைக் கொண்டு மற்ற மாறியின் சிறந்த மதிப்பீட்டு அளவைக் கண்டுபிடிக்கப் பயன்படும் நேர் கோடு ஒரு தொடர்புப்போக்கு நேர்கோடு (Regression Line) ஆகும். மீச்சிறு வர்க்கமுறையின் (Method of Least Squares) மூலமாக இம் மதிப்பீடுகளைப் பெற்று சிறந்த நேர்கோட்டுச் சமன் பாடு எழுதமுடியும்.

$X$ ஒரு சார்பற்ற மாறி, $Y$ ஒரு சார்புள்ள மாறியாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டு $X$-ன்மீது $Y$-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு $Y = a + b\times$ என்று இருக்கட்டும்.

மீச்சிறு வர்க்கமுறை (Method of Least Squares): $X$-ன்மீது $Y$-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y = a + b\times$ என அனுமானிப்போம்.

இங்கு $X$ சார்பற்ற மாறி; $Y$ ஒரு சார்புடைய மாறியாகும். $a, b$ இரண்டின் சிறந்த மதிப்பீடுகளை முதலில் இம்முறையின் மூலமாகப் பெறுவோம்.

$S = \Sigma (y_i - b - b\, x_i)^2$ என்றால்,

$S$-ஆனது $Y$-ன் கண்டறிந்த, எதிர்பார்த்த மதிப்புகளுக்கிடையே யான வேறுபாடுகளின் வர்க்கக் கூட்டலாகும். இந்த வர்க்கக் கூட்டலை மீச்சிறுமமாக்குவதால், இரு மதிப்புகளுக்குமிடையே யான வேறுபாடுகள் மிகமிகக் குறைந்து அறிமுறைக்கும் (செயல் முறை) நடைமுறைக்கும் இடையே மிகக் குறைந்த அளவே வேறுபாடு காணப்படுகிறது என்ற முடிவினை நாம் மேற்கொள்ள முடியும். இதனால் நமது அனுமானம் சரியாவதுடன் சமன்பாடும் சிறந்ததொரு சமன்பாடாக ஆகிறது. இங்கு $S = f(a, b)$ எனக் கொண்டால், $S$-ன் மீச்சிறுமத்திற்கான நிபந்தனைகள்

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad ar\ a = a_0.$$

$$\left[\frac{\partial^2 S}{\partial^2 a}\right]_{a=a_0} > 0.$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad at\ b = b_0$$

$$\left[\frac{\partial^2 S}{\partial^2 b}\right] > 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

$S = \Sigma (y_i - a - bx_i)^2$ என்பதால்

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Longrightarrow -2\Sigma (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Longrightarrow -2\Sigma (y_i - a - bx_i)\, x_i = 0$$

$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$, $\frac{\partial^2 S}{\partial^2 b} > 0$ என்பன சுலபமாகக் காணப்படுகிறது

இங்கு இரண்டு ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள் (Normal Equations) கிடைக்கின்றன.

$$\Sigma (y_i - a - bx_i) = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\Sigma (y_i - a - bx_i) = 0 \quad \ldots (2)$$

அதாவது, $\Sigma y_i = na + b\,\Sigma x_i \quad \ldots (3)$

$$\Sigma x_i y_i = a\,\Sigma x_i + \Sigma bx_i^2 \quad \ldots (4)$$

எனவே (3)-ன்மூலம் $\bar{y} = a + b\bar{x}$ ஆகிறது.

மேலும் $\mu_{11} = E(x - \bar{x})(y - \bar{y})$

$$= E(xy) - \bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma xy - \bar{x}\bar{y}$$

$\therefore \quad \Sigma x_i y_i = n(\mu_{11} + \bar{x}\bar{y})$

மேலும், $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$

$\therefore \quad \Sigma x_i^2 = n(\sigma^2_x + \bar{x}^2)$

இப்போது 4-ன் மூலம்

$$n(\mu_{11} + \bar{x}\bar{y}) = a.n.\bar{x} + b.n.(\sigma_x^2 + \bar{x}^2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{11} + \bar{x}\bar{y} &= a\bar{x} + b(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) \\ &= \bar{x}(a + b\bar{x}) + b\sigma_x^2 \\ &= \bar{x}\bar{y} + b.\sigma_x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mu_{11} = b \,.\, \sigma_x^2$$

$$\hat{b} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2} = \frac{r\,\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma_x^2} = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}.$$

இங்கு $\hat{b} = b_{yx} =$ $X$-ன்மீது $Y$-க்கான தொடர்ப்புப் போக்குக் கெழு [பக்கம் 28-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது].

எனவே, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x}$

$$= \bar{y} - \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \bar{x}.$$

ஆகவே, $y$-ன் சார்பலன்: $y = \hat{a} + \hat{b}\,x$

அதாவது, $y = \left(\bar{y} - \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\,\bar{x}\right) + \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x$

$\therefore\ (y - \bar{y}) = \frac{r\sigma_y}{\sigma}\,(x - \bar{x}). = b_{xy}\,(x - \bar{x})$ ஆகும்.

எனவே, மீச்சிறு வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்திக் கண்டு பிடித்த $X$-ன்மீது $Y$-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு :

$(y - \tilde{y}) = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x})$ என்றும்

இதேபோல $Y$ ஒரு சார்பற்ற மாறி, $X$ ஒரு சார்யுடைய மாறி என்றும் இருந்தால்,

$Y$-ன்மீது $X$-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$x = \alpha + \beta\,y$$

முன்போல மீச்சிறு வர்க்க முறையின்மூலம் $\alpha$, $\beta$-ன் மதிப்பீடுகளைக் கணித்து, $Y$-ன்மீது $X$-ன் சமன்பாடு

$x - \bar{x} = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}\,(y - \bar{y}) = b_{xy}\,(Y - \bar{Y})$ ஆகும்.

பொதுவாக இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் இங்கு உள்ளன ; ஏனெனில் $X$, $Y$ இரு மாறிகளில் எது வேண்டுமானாலும் சில சமயங்களில் சார்பற்ற மாறியாக இருக்கலாம்.

தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள்

$X$-ன்மீது $Y$-ன் தொடர்புப் போக்குக்கெழு $= b_{xy} = \frac{r\,\sigma_x}{\sigma_y}$

$Y$-ன்மீது $X$-ன் தொடர்புப் போக்குக்கெழு $= b_{xy} = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}$

ஆகும்.

$b_{xy} \cdot b_{xy} = r^2$ ஆகும்.

இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளுக்கிடையே காணப்படும் குறுங்கோணம் (acute angle) $\theta$ என்க.

$$\text{Tan}\ \theta = \frac{1-r}{r} \cdot \frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

**அணி வரிசை உடன் தொடர்பு :** (Rank Correlation Coefficient)

இங்கு $n$ நபர்களின் $A$, $B$ என்ற இரு குணப்பண்புகளை அவர்களின் தகுதிப்படி அணி வரிசை முறைப்படுத்தி இந்த அணி வரிசை ஜோடிகளுக்கான உடன் தொடர்பை $\rho$ என்று குறிப்போம். $X$, $Y$ என்பன இரு அணி வரிசைகளின் மதிப்பு என்றால், $d = X - Y$ என்றால், அணி வரிசை உடன் தொடர்புக்கெழு $\rho$.

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$ ஆகிறது.

$X$, $Y$ எனும் இரண்டு ராண்டம் மாறிகளும் முறையே $\mu_1$, $\mu_2$ சராசரிகளுடனும், $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ மாறுபாடுகளுடனும் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவல்களில் அமைந்துள்ளதாகக் கொள்வோம். மேலும் $X$, $Y$ இடையேயான உடன்தொடர்புக்கெழு $\rho$ என்றவாறு உடன் தொடர்புடைய இயல் நிலை மாறிகளாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட $X$-ன் மதிப்பு $dx$ இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \ exp\left[ - \frac{(X - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] dx$$ ஆகும்.

இப்போது, எடுக்கப்பட்ட $X$-ன் மதிப்புக் கேற்ற $Y$-ன் ஒவ்வொரு வரிசையும் (array) $X$ ஐச் சாராமல் ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் $\sigma_y \sqrt{1-\rho^2}$ என்ற வரிசையின் திட்ட விலக்கத்துடன் அமைந்துள்ளதாகக் கொள்வோம்.

மேலும் $X$-ன் மீதான $y$-ன் தொடர்புப் போக்கு ஒரு நேர் கோட்டில் அமைவதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு வரிசையின் சராசரியும் $Y = \mu_2 + \frac{\rho\, \sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)$ என்ற தொடர்புப் போக்குக்கோட்டில் அமைந்துள்ளதால், $Y$-ன் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட வரிசையிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட $y$-ன் மதிப்பு $dy$ இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi (1-\rho^2)}} \ exp\left[ \frac{1}{2\sigma_2^2 (1-\rho^2)} \left\{ y - \mu_2 - \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1) \right\}^2 \right] dy$$ ஆகும்.

கூட்டு நிகழ் தகவு (compound probability) விதியின் படி, $X$ மாறி $dx$ இடைவெளியிலும், $Y$ மாறி $dy$ இடைவெளியிலும் அமைவதற்கான இணைந்த நிகழ் தகவு

$dP = f(x, y)\, dx.\, dy, \; -\infty < x, y < \infty$ ஆகிறது.

இங்கு,

$$f(x,y)= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}}\, exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

ஆகும்.

**இரு மாறி இயல் நிலைப் பரவல் (Bivariate Normal Distribution) :**

$X$, $Y$ இரு மாறிகளின் கீழ்க்கண்ட சார்பலனை ஆராய்வோம். இத்தகைய இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் ஓர் இரு மாறி இயல் நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் என அழைக்கப்படுகிறது. அத்துடன் $X$, $Y$ ராண்டம் மாறிகள் இருமாறி இயல் நிலைப்பரவலைப் பெற்றுள்ளன என்றும் கூறுகிறோம்.

கைவர்க்கப் பரவல் ($\chi^2$-distribution) : ஒரு தரப்படுத்தப் பட்ட இயல் நிலை மாறியின் வர்க்கத்தை 1 வரையற்ற பாகை கொண்ட ஒரு $\chi^2$ மாறி என்று அழைக்கிறோம்.

$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)\; i=1,2, \ldots n$ என்பன $n$ சார்பற்ற மாறிகளானால்

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_n$$ ஆகும்.

$\chi^2$-ன் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(\chi^2) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0<\chi^2<\infty$$

$=0$, மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம், என்றவாறு இருப்பின் இந்த $\chi^2$-மாறியின் பரவல் $n$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

1. $x^2$-பரவலின் திருப்புத்திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் :

$Mx^2(t) = E(e^{tx^2}) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

$x^2$-ன் சராசரி $= \mu_1' = E(x^2) = n$

$x^2$-ன் மாறுபாடு $= \mu_2 = V(x^2) = 2n$ என்று அறிகிறோம்.

$\beta_1 = \frac{8}{n} \to 0, \quad n \to \infty$ என்றால்

$\beta_2 = \frac{48n+12n^2}{4n^2} = 3 + \frac{12}{n} \to 3, \quad n \to \infty$ என்றால்.

எனவே, $n$ என்ற சுட்டுறுப்பின் மதிப்பு பெரிதாகப் பெரிதாக, $x^2$ பரவல் ஓர் இயல் நிலைப்பரவலை அணுகுகின்றது. நடைமுறையில் 30-க்கு மேற்பட்ட $n$ எண்ணுக்கு $x^2$-ன் இயல் நிலைத் தோராயம் சரியானதாகும். $Z = \frac{x^2 - n}{\sqrt{2n}}$ என்பது ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட $x^2$ மாறியாகும்.

2. $x^2$ மாறிகளின் கூட்டல் நியதி : $x_1^2$, $x_2^2$ இரு மாறிகளும் முறையே $n_1$, $n_2$ வரையற்ற பாகைகளுடன் கூடிய சார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகளானால் $x_1^2+x_2^2$-ம் $(n_1+n_2)$ஐ வரையற்ற பாகைகளாகக் கொண்ட ஒரு $x^2$ மாறியாகும். இதையே $x^2$-ன் கூட்டல் நியதி என்கிறோம்.

3. $x_1^2, x_2^2$ மாறிகள் முறையே $n_1$, $n_2$ வரையற்ற பாகைகளுடன் கூடிய இரு சார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகளானால்,

$$u = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \cap \beta_1\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right) \text{ மாறியாகவும்}$$

$v = x_1^2 + x_2^2 \cap x^2_{n_1+n_2}$ மாறியாகவும், $u$, $v$ இரண்டும் சார்பற்ற மாறிகளாகவும் உள்ளன.

4. $x_1^2, x_2^2$ இரு மாறிகளும் முறையே $n_1$, $n_2$ வரையற்ற பாகைகளுடன் கூடிய இரு சார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகளானால்

$$u = \frac{x_1^2}{x_1^2} \text{ ஒரு } \beta_2\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right) \text{ மாறியாகும்.}$$

மாதிரிச் சராசரி. மாதிரியின் மாறுபாடு இவற்றின் இணைந்த பரவல் (Joint Distribution of Sample mean $\bar{x}$ and Sample Variance $\sigma^2$)

$X_i \cap N(\mu, \sigma^2)$ $i = 1, 2, \ldots n$ என்ற $n$ சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளுக்கு

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} \cap N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$ என்ற பரவலிலும்

$$s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2 \cap X^2_{n-1}$$ என்ற பரவலிலும் அமைகின்றன.

$$f(\bar{X}, s^2)\, C.\, e^{-n(\bar{x}-\mu)^2/2\sigma^2}\; e^{-ns^2/2\sigma^2}\; (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}.$$

$$-\infty < \bar{X} < \infty$$

$$0 < s^2 < \infty$$

இங்கு C ஒரு மாறிலியாகும்.

$\bar{X}$ மாறியின் திருப்பு திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $M_{\bar{X}}(t)$ என்றால்,

$$M_{\bar{X}}(t) = e^{\mu t + \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)\frac{t^2}{2}}$$ ஆகும்.

$\bar{X}$-ன் சராசரி $= \mu' = E(\bar{X}) = \mu$.

$\bar{X}$-ன் மாறுபாடு $= \mu_2 = V(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$\bar{X}$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(\bar{X})$ என்றால்,

$$f(\bar{X}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X}-\mu)^2\right] \quad -\infty < \bar{X} < \infty$$

$s^2$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(s^2)$ என்றால்,

$$f(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot e^{-ns^2/2\sigma^2}\; (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}$$

$$0 < s^2 < \infty$$

$= 0$, மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்.

$s^2$-ன் சராசரி $= E(s^2) = \frac{n-1}{n} . \sigma^2$

$s^2$-ன் மாறுபாடு $V(s^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4.$

$s^2$-ன் பரவல் $(n-1)$ வரையற்ற பாகையைக் கொண்ட ஒரு கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

$X$, $Y$ மாறிகள் முறையே $\mu_1$, $\mu_2$ சராசரி, $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ மாறுபாடுகளுடன் கூடிய சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளானால்,

$t = \frac{X-\mu_1}{Y-\mu_2}$ என்ற மாறி ஒரு கோஷி பரவலில் அமைகின்றது.

இதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(t) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2 t^2)} \cdot -\infty < t < \infty$$

ஸ்டூடன்ட்டின் $t$-பரவல் நடைமுறையில் உபயோகப்படக் கூடிய மற்ருெரு முக்கிய பரவல் $t$-ன் பரவலாகும். W. S. கோஸெட் என்பவர் "ஸ்டூடன்ட்". என்ற புனைப்பெயரில் 1908 ஆம் ஆண்டில் இந்த $t$-பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். ஃபிஷர் என்பவர் 1926ஆம் ஆண்டில் இதனைச் சரி செய்து இதன் பரவலை நிலை நிறுத்தினர். $Y$ என்ற ராண்டம் மாறி ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறி எனவும், $U$ என்ற ராண்டம் மாறி, $k$ வரையற்ற பாகை கொண்ட ஒரு கைவர்க்க மாறி எனவும் இருக்கட்டும். மேலும் $Y$, $U$ மாறிகள் சார்பற்றவையானால்,

$t = \frac{y}{\sqrt{\frac{u}{k}}}$ என்ற புதிய ராண்டம் மாறி என்று வரையறுத்தால், $t$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(t) = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}} -\infty<t<\infty$$

என்ருல், $t$-மாறி $k$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட $t$-பரவலைச் சார்ந்து இருக்கிறது எனலாம்.

1. இந்த $t$-பரவல் $t=0$ என்ற நேர்கோட்டை ஒட்டிய ஒரு சமச்சீரான பரவல். $t$ கூடும்போது $\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)}$ வேகமாகக் குறைகிறது. $t=0$ எனும்போது, $t$-வளைகோட்டில் நிலைத்தூரம் மிகவும் உச்சமாக உள்ளது.

2. $\mu_{2r+1} = 0$. அதாவது ஒற்றைப்படை மையமான திருப்புதிறன்கள் பூஜ்யமாகி விடுகின்றன.

$$\mu_1{}^1 = E(t) = 0 = t\text{-ன் சராசரி.}$$

$$\mu_2 = V(t) = \frac{k}{k-2}$$

$$\mu_3 = 0$$

$$\mu_4 = \frac{3k^2}{(k-2)(k-4)}$$

$$\beta_1 = 0 ; \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = \frac{3(k-2)}{(k-4)} \to 3 \ (n \to \infty \text{ என்ருல்})$$

$\therefore$ $k \to \infty$ எனும்போது, $t$—பரவல் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகின்றது.

$k = 1$ என்ருல், $t$—பவரல் ஒரு கோஷி பரவலாகிறது.

**ஸ்நெடகரின் F-பரவல் (Snedecors F distribution) :**

$m, n$ வரையற்ற பாகைகளுடன் கூடிய இரு புள்ளியியில் சார்பற்ற கைவர்க்க ராண்டாம் மாறிகள் $u, v$ என்ருல், இவற்றின் விகிதம் ஒரு $F$ மாறினுல்,

$$F = \frac{(u/m)}{(v/n)} \text{ ஆகும்.}$$

*F-மாறியின் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்*

$$\phi(f) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n} . f\right)^{\frac{m+n}{2}}}. \qquad 0 < f < \infty$$

$= 0$ மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம் என்ருல் $F$-ன் பரவல் $m, n$ என்ல சுட்டுருப்புகளைக் கொண்டு குறிக்கப்படுகிறது.

$$F\text{-ன் சராசரி} = E(F) = \mu_1{}^1 = \frac{n}{n-2}.$$

$$F\text{-ன் மாறுபாடு} = V(F) = \mu_2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

$F$-ன் பரவல் $\sigma^2$-ஐச் சார்பற்றுள்ளது. $n<2$ என்றால் $F$ வளை கோடு $J$ வடிவுடன் அமைந்துள்ளது. $m>2$ என்றால் மணி வடிவமாக (Bell-shaped) உள்ளது.

ஃபிஷரின் $Z$-பரவல் : $F$-ன் பரவலிலிருந்து $Z = \frac{1}{2}\log_e F$ என்றால், $Z$-ன் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்.

$$f(z) = \frac{2.\ m^{\frac{m}{2}}.\ n^{\frac{n}{2}}\ e^{mz}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right).\ (n + m.\ e^{2z})^{\frac{m+n}{2}}} \quad -\infty < z < \infty$$

ஆகும்.

$k$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட $t$ மாறியின் வர்க்கமானது $(1, k)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு $F$ பரவலில் அமைகிறது.

$t$, $x^2$, $F$ பரவல்களுக்கான தொடர்பு:

(i) $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

$$\text{எனவே } \frac{t^2}{n-1} = \frac{(\bar{X} \times \mu)^2 \Big/ \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}{ns^2/\sigma^2} = \frac{x_1^2}{x_2^2}$$

என்பதால்

$\dfrac{t^2}{n-1}$ என்பது $x^2$ களின் விகிதமாகும்.

(ii) $u$, $v$ இரண்டும் முறையே $m$, $n$ இயக்கப்பாகைகளுடன் கூடிய இரு $x^2$-களானால்,

$F = \dfrac{u/m}{v/n} = \dfrac{x_1^2}{x_2^2}$ என்பதால்

$F$ என்பது $x^2$-களின் விகிதமாகும்.

(iii) $k$ இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய $t$ மாறியின் வர்க்கமானது $1, k$ இயக்கப் பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு $F$ பரவலில் அமைகிறது; எப்படியெனில், $F=t^2$, $m=1$, $n=k$ என்று பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு $F$ பரவலில் $F$ பரவலில் சமனிட்டால்

$$\phi(F)d\,F = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} .\ F^{\frac{m}{2}-1}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n} F\right)^{\frac{m+n}{2}}} .\ d\,F$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (t^2)^{\frac{1}{2}-1}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{k} \cdot t^2\right)^{\frac{k+1}{2}}} \; d\,(t^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}},$$

$$-\infty < t < \infty$$

$= f(t)dt$ ஆகும்.

**பயிற்சிகள்**

1. $f(X) = 2X, \quad 0 < x < 1$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு) எனில்,

$X$ மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பலனாக $f(X)$ விளங்குகிறது என்று காட்டுக. மேலும்,

$P_r(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4})$, $P_r(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2})$ இவற்றைக் கணக்கிடுக.

2. $X_1, X_2$, மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$f(X_1, X_2) = 4x_1 x_2,\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1.$

$= 0$ (மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்)

எனில்,

(i) $P_r(0 < x_1 < \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} < x_2 < 1)$

(ii) $P_r(X_1 = X_2)$

(iii) $P_r(X_1 < X_2)$

(iv) $P_r(X_1 \leq X_2)$ இவற்றைக் கணக்கிடுக.

3. கீழ்க்கண்ட பரவல்களின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

(a) $f(x) = \frac{4!}{x!\,(4-x)!} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$

$x = 0, 1, 2, 3, 4.$

$= 0$ (மற்ற இடங்களில்)

(b) $F(x) = 3x^2, 0 < x < 1$

$= 0$ மற்ற இடங்களில்

(c) $F(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < \infty$

4. $X$ மாறியின் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$F(X) = 2(1-x), \; 0 < x < 1$

$= 0$ (மற்றெல்லா மதிப்புகளுக்கும்)

$E(X), E(X^2), E(6X+5X^2)$ இவற்றைக் கணக்கிடுக.

5. $X$ என்ற தனித்த மாதிரியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$f(X) = \dfrac{x}{6} \quad x = 1, 2, 3$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு)

எனில், $E(X^2), E(x^3 + 4x^2 + 3x + 5)$ என்பதைக் கணக்கிடுக.

6. $X$-ன் மாறுபாடு அமையப்பெறின், கீழ்க்கண்ட சமனின்மையை நிரூபி.

$E(X^2) > [E(X)]^2.$

7. $X$-மாறியின் சராசரி $\mu$, திட்ட விலக்கம் $\sigma$ எனில் திருப்புத் திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $M_x(t)$ எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி.

(a) $E\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right] = 0$ (b) $E\left[\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = 1.$

(c) $\left[e^t\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] = e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} M_x \dfrac{t}{\sigma}$

(d) $X$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(X) = \frac{1}{3}, \; -1 < x < 2$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளில்)

என்றால், $X$-ன் திருப்புதிறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன்

$M_x(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-t}}{3t}, \quad t \neq 0$

$= 1, \qquad t = 0$ என்று காண்பி.

8. $X$.ன் திருப்பு திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $M(t)$ எனவும் $\psi(t) = \log_e M(t)$ என்றிருந்தால்,

பின் (i) $X'(0) = \mu$

(ii) $X''(0) = \sigma^2$

என நிருபி.

9. $X$ மாறியின், திருப்புத் திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $M(t) = (1-t)^{-2}$ எனில், $X$ பரவலின் திருப்பு திறன்களைக் கண்டறிக.

10. $X$ மாறியின் திருப்பு திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $-h < t < h$ என்ற இடைவெளியில், $M_x(t)$ எனில்,

(i) $P_r(X > a) < e^{-at} . M_x(t),\ 0 < t < h$

(ii) $P_r(X < a) < e^{-at} . M_x(t),\ -h < t < 0$

என்றும் நிருபி.

11. பத்துக் காசுகளை ஒரே சமயத்தில் சுண்டி விட்டால், குறைந்தது ஏழு தலைகளாவது விழுவதற்கான ஊக அளவைக் கண்டுபிடி.

12. $p = \frac{1}{2}$, $n = 7$ என்ற ஓர் ஈருருப்புப் பரவலின் முகட்டைக் கணிக்கவும்.

13. ஓர் ஈருருப்புப் பரவலின் $\beta_1$, $\beta_2$ மதிப்புகள் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டால்,

$\beta_1 = \frac{1}{15}$, $\beta_2 = \frac{89}{30}$, $n = 100$ எனில்,

அப் பரவலை நிர்ணயித்துப் பிறகு $p > q$ என்றால், $X = 8$-க்கான ஊக அளவைக் கணக்கிடுக.

14. டாக்சி டிரைவர்களால் ஓர் ஆண்டில் ஏற்படும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கை சராசரி 3ஐக் கொண்ட பாய்சான் பரவலைச் சார்ந்து இருந்தால், ஒரு 1000 டாக்சி டிரைவர்களில் ஓர் ஆண்டில் ஒரு விபத்துக்கும் காரணமாகாத டிரைவர்களின் எண்ணிக்கையும், 3-க்கு மேற்பட்ட விபத்துகளுக்குக் காரணமான டிரைவர்களின் எண்ணிக்கையும் கணக்கிடுக.

15. $\lambda$ சராசரியைக் கொண்ட ஒரு $X$ மாறியின் பாய்சான் பரவலின்

(i) $E(X)^2 = \lambda\ E(X+1)$

(ii) $\lambda = 1$ என்றால்,

$E[\,|X-1|\,] = \frac{2}{e}$ என்று நிரூபி.

16. ஒரு தம்பதி, ஓர் ஆண் மகவு தங்களுக்குப் பிறக்கும் வரை, குழந்தைகளை ஈன்றெடுக்க முடிவு செய்கின்றனர். அவர்களுக்கு உண்டாகும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் யாது? அவர்கள் குலத்தில் ஆண் மகவுக்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனில் முதல் ஆண் மகவு பிறக்கும் முன்பாக எத்தனை குழந்தைகள் பெற வேண்டும் என்பதற்கான எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவைக் கணக்கிடுக.

17. ஒரு நீச்சல்காரர், ஓர் ஏரியை முழுமையாக நீந்திக் கரை சேருவதற்கான நிகழ்தகவு 0·4 எனில்,

(i) 10ஆவது நீச்சல்காரர் ஏரியைக் கடக்கும் முதல் நபர் என்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ii) அந்த 10ஆவது நீச்சல்காரர் 4ஆவது நபராக ஏரியைக் கடக்கிறார் என்பதற்கான ஊக அளவைக் கண்டுபிடி.

18. $X \to N(\mu, \sigma^2)$ என இருக்கட்டும்.

$P_r(X < 89) = 0{\cdot}90$

$P_r(X < 94) = 0{\cdot}95$ என்றால்,

$\mu$, $\sigma^2$ மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

19. ஒரு ராண்டம் மாறி $X$-ன் திருப்பு திறனை உருவாக்கும் சார்பலன் $M_x(t) = e^{3t+8t^2}$ என்றால் $P_r(-1 < x < 9)$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

20. $x$, $y$ இரு மாறிகளும் $N(0, 1)$ என்ற மாறிகளாயின்,

(i) $x^2$

(ii) $x^2 + y^2$

(iii) $\frac{x^2}{y^2}$-ன் பரவல்களையும், அவற்றின் மாறுபாடுகளையும் கணக்கிடவும்.

21. $X$, $Y$ இரு மாறிகளும் முறையே $m$, $n$ இரு பண்பளவுகளைக் கொண்ட காம்மா மாறியானால்,

$$U = X + Y$$

$$V = \frac{X - Y}{X + Y}$$

என்ற இரு மாறிகளும் சார்பற்றவை என்று நிரூபி.

22. 10 மாணவர்களின் கணிதம், புள்ளியியல் பாடங்களின் மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்கள் : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| கணிதம் : | 75 | 30 | 60 | 80 | 53 | 35 | 15 | 40 | 38 | 48 |
| புள்ளியியல் : | 85 | 45 | 54 | 91 | 58 | 63 | 35 | 34 | 45 | 44 |

இரு பாடங்களுக்கான உடன் தொடர்புக்கெழுவைக் கணிக்கவும்.

23. இரு மாறிகளின் 50 (இணை) சோடி மதிப்புகளிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட அளவுகள்,

$\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 6$, $\sigma_x = 3$, $\sigma_y = 2$, $r = 0{\cdot}3$ மேற்கொண்டு ஆராய்ந்ததில் $x = 10$, $y = 6$ என்ற சோடி மதிப்புகள் தவறானவை என்று தெரிய வந்தன. இந்த மதிப்புகளை விலக்கிவிட்டு மீதியுள்ள 49 சோடி மதிப்புகளுக்கு '$r$' கண்டுபிடித்து முன்னைய $r$-லிருந்து இது எவ்வளவு வேறுபட்டுள்ளது எனக் காண்க.

24. $X_1$, $X_2$, $X_3$ என்ற மூன்று தொடர்பிலா மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் $m$ சராசரியுடனும், $\sigma$ முறையே $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$, $\sigma^2_3$ மாறுபாடுகளுடன் இருந்தால்,

$$U = \frac{X_1}{X_3},$$

$$V = \frac{X_2}{X_3}$$

$u$, $v$-ன் உடன் தொடர்புக்கெழு, $r_{uv}$ என்பதை,

$$r_{u,v} = \frac{\sigma_3^2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}}$$

என்று நிரூபி.

25. $X$, $Y$ மாதிரிகள் முறையே $m$, $n$ வரையற்ற பாகைகளுடன் கூடிய சார்பற்ற $X^2$ மாறிகளானால்,

(i) $X+Y$

(ii) $\frac{X}{Y}$

(iii) $\frac{X}{X+Y}$

இவற்றின் பரவல்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

26. $X$ என்பது தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறியானால்,

$t = \frac{x\sqrt{n}}{x^2}$-ன் பரவலைக் காண்க.

(இங்கு $x^2$ ஒரு '$n$' வரையற்ற பாகை கொண்ட $x^2$ மாறி)

27. $F$ மாறி, $v_1$, $v_2$ பண்பளவைகளைக் கொண்ட $F$-பரவலின் அமைந்தால், $\frac{1}{F}$ மாறி $v_2$, $v_1$ பண்பளவைகளைக் கொண்ட $F$ பரவலில் அமைகிறது என்று காட்டுக.

# 2. மதிப்பீட்டுக் கொள்கை

## (Theory of Estimation)

குணப்பண்புகள் (Properties of Estimates)

பேராசிரியர் R. A. ஃபிஷர் என்பவரால் அவரது ஆராய்ச்சித் தாள்களில் மதிப்பீட்டுக் கொள்கை 1930-ம் ஆண்டில் மிகவும் அதிக அளவில் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு மதிப்பீடுகளின் பலவகைகளைப் பற்றிய குணப்பண்புகளைப் பற்றியும் பேராசிரியர் பிஷரினால் விளக்கப்பட்ட மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு முறையைப் (Maximum Likelihood Method) பற்றியும் கவனிப்போம்.

நாம் இப்போது ஓர் அறிந்த கணித வடிவுடைய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு ராண்டம் மாதிரியை கவனிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். இந்த முழுமைத் தொகுதியானது அறிந்திராத சுட்டுறுப்புகள் சிலவற்றைக் கொண்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். பொதுவாகச் சுட்டுறுப்புகளை மதிப்பீடு செய்யக் கூடிய முடிவற்ற எண்கள் கொண்ட மாதிரி மதிப்புகளின் சார்பலன்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற $n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்த முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் ஒரு தெரிந்த கணித வடிவத்தைக் கொண்டதாக இருக்கும். அதாவது, $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k$ என்ற $k$ சுட்டுறுப்புகளுக்கு $f(X;\ \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k)$ என்ற நிகழ்தகவு சார்பலனாக இருக்கும். உதாரணமாக, கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுச் சார்பலனைக் கவனிப்போம்.

$$f(X;\ \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2\right]$$

$$-\infty < X < \infty$$

இங்கு $\mu$, $\sigma$ என்பன முழுமைத் தொகுதிச் சுட்டுறுப்புகளாகும். எனவே, மாதிரி மதிப்புகளின் சார்பலன்கள் முடிவற்ற எண்களைக் கொண்டதாக இருக்கும். இதையே மாதிரியின் அளவை (statistic) என்று கூறலாம். சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பீடாக இதைக் கூறலாம்.

ஒரு சிறந்த மதிப்பீடு என்பது, மதிப்பிடப்படக்கூடிய சுட்டுறுப்பின் உண்மையான மதிப்புக்குச் சமீபத்தில் இருக்கக்கூடிய மதிப்பேயாகும்.

வேறுவிதமாகக் கூறினால், சுட்டுறுப்பின் உண்மை மதிப்பினை எவ்வளவுக்கெவ்வளவு நெருங்கி ஒரு மாதிரி அளவையின் பரவல் சூழ்ந்திருக்கிறதோ அந்த மாதிரி அளவையைச் சிறந்த மதிப்பீடு (Best Estimate) என்று கூறுகிறோம்.

மதிப்பீடு செய்யக்கூடிய சார்பலன்களை "மதிப்பீடுகள்" (estimators) என்று அழைக்கலாம்.

ஒரு நல்ல மதிப்பீட்டுக்கான குணப்பண்புகளை இங்குக் கவனிப்போம். அவையாவன :

(i) கொள்கை மாறுமை (Consistency).

(ii) நடுநிலை மாறுது இருத்தல்; பாரபட்சமற்ற தன்மை (Unbiasedness).

(iii) திறன்நிறைவு அல்லது பயனுறுதி (Efficiency).

(iv) போதிய வளம் அல்லது போதிய திறமை (Sufficiency).

**2.1** கொள்கை மாறுமை (Consistency) $n$ அளவுடைய ஒரு மாதிரியைச் சார்ந்தவாறு $\hat{\theta}_n$ என்பதை $\theta$ என்ற சுட்டுறுப்பின் மதிப்பீடாகக் கொள்வோம், இப்போது $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$ ஆகும் போது, என்றால் $\{\hat{\theta}_n\}$ என்ற தொகுப்பினை $\theta$-ன் மதிப்பீடுகளின் கொள்கை மாறுத தொகுப்பாகின்றது.

அதாவது. ஒவ்வொரு $\epsilon < 0$-க்கும்.

$$\lim_{n \to \infty} P_r [\, | \theta_n - \theta | > \epsilon] = 0$$ ஆகும்.

உதாரணமாக, $\theta$ சுட்டுறுப்பைக் கொண்ட ஒரு பாய்சான் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரி $\{X_1, X_2 \dots X_n\}$ என்று கொள்வோம்.

$$\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}_n$$ என்று கொள்வோம். $\theta$-ன் மதிப்பீடு $\theta_n$ எனக்கொள்வோம். $X_i$-கள் சார்பபற்றதாகவும் ஒரே மாதிரியான பரவலில் அமைந்தும், பாய்சான் பரவலில் '$\theta$' சுட்டுறுப்பைக் கொண்டு அமைவதால் $E(X_i) = \theta$ ஆகிறது.

எனவே பெரிய எண்களின் வலுக்குறைந்த நியதி (Weak Law of Large Number WLLN)யின் மூலமாக

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{P} \theta$$

அதாவது, $\hat{\theta} = \bar{X}_n \xrightarrow{P} \theta$

எனவே $\theta_n$ என்பது $\theta$-ன் கொள்கை மாறாத மதிப்பீடு ஆகிறது.

**2.2** நடுநிலையாயிருத்தல் (Unbiasedness) : $n \to \infty$ என்ற ஒரு மாதிரியின் பெரிய மதிப்பிற்கு, கொள்கை மாறுமை என்பது ஒரு மதிப்பீட்டின் ஒழுங்கான தன்மையினைப் பற்றிய பண்பாகும். நிலையான $n$ மதிப்பிற்கு ஏற்ற பண்பானது நடுநிலையாயிருத்தல் (Unbiasedness) ஆகும்.

வரையறை : ஒரு மாதிரியளவை (statistic) $\hat{\theta}_n$ என்பது $\theta$ என்ற சுட்டுறுப்பின் நடுநிலை மாறாத ஒரு மதிப்பீடாக இருப்பதற்கு $E(\theta_n) = \theta$ என்று இருத்தல் வேண்டும்.

உதாரணமாக, சராசரி $\mu$, மாறுபாடு $\sigma^2$ கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியில்,

$E(\bar{X}) = \mu$ என்றால், $\mu$-ன் ஒரு நடுநிலை மாறாத மதிப்பீடு $\bar{X}$ ஆகும். இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு நிரூபிப்போம்.

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E[X_1+X_2+\dots X_n]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

$E(X_i) = \mu$ ஒவ்வொரு $X_i$-க்கும், என்பதால்

$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot \mu \cdot = \mu$ ஆகிறது.

எனவே, $\bar{X}$ என்ற மாதிரி அளவையின் மதிப்பு, சுட்டுறுப்பு $\mu$-ன் நடுநிலை மாறாத ஒரு மதிப்பீடு என முடிவு கட்டுகின்றோம்.

இரண்டாவது உதாரணமாக $E(s^2)$ஐக் காண்போம்.

$\Sigma(X_i - \bar{X})^2$ என்ற மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}\Sigma(X_i-\bar{X})^2 &= \Sigma[(X_i-\mu) - (\bar{X}-\mu)]^2\\ &= \Sigma(X_i-\mu)^2 - 2\cdot\Sigma(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu) + \Sigma(\bar{X}-\mu)^2\\ &= \Sigma(X_i-\mu)^2 - 2n(\bar{X}-\mu)(\bar{X}-\mu) + n(\bar{X}-\mu)^2\\ &= \Sigma(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore [E(X_i-\bar{X})^2] &= E[\Sigma(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2]\\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i-\mu)^2 - n\cdot E(\bar{X}-\mu)^2\\ &= n\sigma^2 - n\cdot E[X-E(X)], \qquad \therefore \mu = E(X).\\ &= n\sigma^2 - n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\\ &= (n-1)\sigma^2\end{aligned}$$

அதாவது, $E(ns^2) = (n-1)\sigma^2$

$$\therefore \quad E(s^2) = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 \neq \sigma^2.$$

இங்கு $E(S^2) \neq \sigma^2$ என்பதால், $s^2$-ஐ $\sigma^2$-ன் நடுநிலை மாறாத மதிப்பீடு என்று கூற முடியாது.

$S^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2$ என்பதால் $S^2$ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

$$\begin{aligned}S^2 &= \frac{1}{n-1}\Sigma(X_i - \bar{X})^2\\ &= \frac{1}{n-1}\cdot ns^2 = \frac{n}{n-1}s^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{எனவே, } E(S^2) &= E\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)s^2\right]\\ &= \frac{n}{n-1}\cdot E(s^2)\\ &= \frac{n}{n-1}\cdot\left[\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2\right] \text{ ஆகும்.}\end{aligned}$$

அதாவது, $E(S^2) = \sigma^2$ ஆகிறது.

எனவே, $S^2$ என்ற மாதிரி அளவையானது, $\sigma^2$ சுட்டுருப்பிற்கான நடுநிலை மாறாத மதிப்பீடு ஆகின்றது.

உதாரணம் :

சராசரி $\mu_1$ மாறுபாடு 1 எனக் கொண்ட ஓர் இயல் நிலைப் பரவலிலிருந்து $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற ஒரு ராண்டம் மாதிரி எடுக்கப்படுகின்றது. இங்கு $T = \frac{1}{n}\Sigma X_i^2$ என்றால், $\mu^2 + 1$க்கான ஒரு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு $T$ என்று நிரூபி.

தீர்வு :

$i = 1, 2, \ldots n$ என்றால் $E(X_i) = p$

$i = 1, 2, \ldots n$, என்றால் $V(X_i) = 1$ என்று நாம் அறிகின்றோம்.

$V(X_i) = E(X^2_i) - [E(X_i)]^2$

$1 = E(X_i^2) - \mu^2$ என்பதால்,

$E(X_i^2) = \mu^2 + 1$ ஆகும்.

$$E(T) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left[E\sum_{i=1}^{n}(X_i^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\Sigma E(X_i^2) \text{ ஆகும்.}$$

$E(X_i^2) = = \mu^2 + 1$ எல்லா $i$-க்கும் என்பதால்

$$E(T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu^2 + 1) = \frac{n(\mu^2 + 1)}{n}$$

$$= \mu^2 + 1 \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே, $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ என்பது $(\mu^2 + 1)$-க்கான ஒரு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடாகின்றது; கொள்கை மாறுத் தன்மைக்கான ஒரு முக்கியமான தேற்றத்தை இங்கு படிப்போம்.

$T_n$ என்ற ஒரு மாதிரிப் பண்பளவை (sample statistic) $m$ என்ற சுட்டுருப்பின் ஒரு கொள்கை மாறுத மதிப்பீடு ஆக இருக்கவேண்டுமெனில்,

ஒவ்வொரு $\delta > 0$-க்கும், $n \to \infty$ எனும்போது

$$P_n[\,|T_n - m| \geq \delta] \to 0 \text{ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.}$$

அதாவது, ஒவ்வொரு $E > 0$-க்கும், $n \to \infty$ எனும்போது

$$P_r[\,|T_n - m| < \epsilon] \to 1 \text{ என்று இருக்க வேண்டும்.}$$

வேறு விதமாக இதைக் கூறினால், $n \to \infty$ எனும் சமயத்தில் $T_n$-ன் மதிப்பு நிகழ்தகவில் (In Probability) $m$ ஐ நோக்கிச் செல்கிறது என்று கூறலாம். எனவே, எந்த ஒரு தரப்பட்ட மாதிரிப் பருமனுக்கும் ஓர் அளவையின் கொள்கை மாறாத் தன்மையானது அந்த அளவையின் நடுநிலை மாறாத் தன்மையைப் பெற்றிருக்கும் எனக் கூறமுடியாது.

**தேற்றம் :**

$n \to \infty$ என்கையில். $E(T_n) \to m$ எனவும்,

$V(T_n) \to 0$ எனவும் ஆனால், $T_n$-ஐ $m$-ற்கான கொள்கை மாறா மதிப்பீடு எனலாம்.

இங்கு $E(T_n) = T_n$-ன் சராசரி

$V(T_n) = T_n$-ன் மாறுபாடு (variance) ஆகும்.

**நிரூபணம் :**

$\delta$, $\epsilon$ என்ற இரு எதிர்மறையற்ற எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$m_n = E(T_n)$ ஆக இருக்கட்டும்;

ஏனெனில், $n \to \infty$ என்றால், $m_n \to m$

$V(T_n) \to 0$ ஆகும்.

பெரிய $n$-மதிப்பிற்கு,

$$|m_n - m| < \frac{\delta}{2}$$

$$V(T_n) < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும் $|T_n - m_n| < \frac{\delta}{2}$ என்றால்,

$$|T_n - m| < |T_n - m_n| + |m_n - m|$$

$$< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}$$

$$= \delta \quad (2)$$

"செபிச் சேவ்-லெம்மா" மூலமாக மேலும் அறிவது யாதெனில்,

$$P_r\left[\,|T_n-m_n| < \frac{\delta}{2}\right] > 1 - \frac{V(T_n)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}$$

$$> 1 - \epsilon \qquad \ldots (3)$$

"செபிக் சேவ்-லெம்மா"

ஒரு ராண்டம் மாறி, அதன் சராசரி இவற்றுக்கிடையேயான வித்தியாசமானது, அதன் திட்ட விலக்கத்தைப்போல் $k$ மடங்கைப் எண்ணளவில்) காட்டிலும் அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{k^2}$ ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும். அதாவது $X$ என்ற ராண்டம் மாறியின் சராசரி $\mu$, திட்ட விலக்கம் $\sigma$ என்றும் இருந்தால், $k > 1$-க்கு,

$P_r[\,|X-\mu| > k\sigma] < \frac{1}{k^2}$ என்பதாகும்.

அதாவது, $P_r[\,|X-\mu| < k\sigma] > 1 - \frac{1}{k^2}$

அதாவது, $P_r[\,|X-\mu| < k\sigma] > 1 - \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$

அதாவது, $P_r[\,|X-\mu| < k\sigma] > 1 - \frac{V(X)}{k^2\sigma^2}$ என்பதாகும்.

இப்போது (1), (2), (3)ஐயும் சேர்த்தால்,

$$P_r[\,|T_n-m| < \delta] > P_r\left[\,|T_n-m| < \frac{\delta}{2}\right]$$

$$> 1 - \epsilon \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே, தேற்றம் நிருபணமாகியது.

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $\bar{X}$ என்ற மாதிரி அளவை, சுட்டுருப்பு '$m$'-க்கான ஒரு கொள்கை மதிப்பீடு ஆகும்.

இங்கு $E(\bar{X}) = m$

மேலும் $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$n \to \infty$ எனும்போது $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$ ஆகும்.

ஆதலால், $E(\bar{X}) = m$

$n \to \infty$, $V(\bar{X}) \to 0$ என்பதால்

$\bar{X}$ என்பது $m$-ன் கொள்கை மாரு மதிப்பீடு ஆகும்.

(ii) $\frac{r}{n}$ என்ற அளவை $p$-ன் கொள்கை மாரு மதிப்பீடு ஆகும். இங்கு $\frac{r}{n}$ என்பது ஈருறுப்புப் பரவலில் அமைந்த மாதிரியின் வெற்றிக்கான விகிதம் ஆகும். $n$ சோதனைகளில் $r$ வெற்றிகள் ஏற்பட்டால், வெற்றி விகிதம் $= \frac{r}{n}$

$$E\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(r)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot np \cdot = p.$$

$$Var\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\, Var(r)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot npq$$

$$= \frac{pq}{n}$$

$\to 0$, $n \to \infty$ எனும்போது.

எனவே, $E\left(\frac{r}{n}\right) = p$

$V\left(\frac{r}{n}\right) \to 0 \quad n \to \infty$ என்றால்

ஆகையால், $\frac{r}{n}$ மதிப்பானது $p$-க்கான ஒரு கொள்கை மாருத மதிப்பீடு ஆகும்.

(iii) $s^2 = \frac{1}{n} \Sigma_i (X_i - \bar{X})^2$

$S^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma_i (X_i - \bar{X})^2$ என்று நாம் அறிவோம்.

இங்கு $\sigma^2$-க்கான கொள்கை மாருத மதிப்பீடு $s^2$ தானு அல்லது $S^2$ தானு என்று கண்டறிவோம்.

$E(s^2)$, $E(S^2)$ இவற்றின் மதிப்புகளை நாம் முன்னரே கண்டுள்ளோம். இப்போது, $s^2$-ன் பரவலைக்கொண்டு $V(s^2)$, $V(S^2)$ இவற்றைக் காண்போம்.

$s^2$-ன் பரவலானது $\cap\, x^2_{n-1}$ என்பதால்,

$$p(s^2)\,ds^2 = \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot e^{-ns^2/2\sigma^2}\,(s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}\,d(s^2)$$

$s^2 \rightarrow (0, \infty)$ ஆகும்.

எனவே,

$$E(s^2) = \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty s^2 . e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} \times (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}\,ds^2.$$

$$= \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} \times \cdot (s^2)^{\frac{n+1}{2}-}\,ds^2$$

$$= \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{(2\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n^{\frac{n+1}{2}}}$$

[ஏனெனில்,

$$\frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} \cdot (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}\,ds^2$$

$= 1 =$ மொத்த நிகழ்தகவு]

எனவே, $\int_0^\infty e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} ds^2$

$$= \frac{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{n^{\frac{n-1}{2}}}$$

இதேபோல $\int_0^\infty e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} (s^2)^{\frac{n+1}{2}-1} ds^2$

$$= \frac{(2\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n^{\frac{n+1}{2}}}$$

ஆகவே,

$$E(s^2) = \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{(2\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{(2\sigma^2). \frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{n. \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right).}$$

$$= \frac{n-1}{n} . \sigma^2.$$

இதையே நாம் முன்பு வேறு விதமாக நிரூபித்தோம்.

இப்போது,

$$\mu'_2 = E(s^2)^2 = \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty (s^2)^2\, e^{-\frac{n s^2}{2\sigma^2}} \times (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}\, ds^2$$

$$= \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{n s^2}{2\sigma^2}} \cdot (s^2)^{\frac{n+3}{2}-1} \cdot ds^2$$

$$= \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{(2\sigma^2)^{\frac{n+3}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{n^{\frac{n+3}{2}}}.$$

$$= \frac{(2\sigma^2)^2 . \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{n^2 .\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{(n^2-1)\,\sigma^4}{2}$$

எனவே, $\text{Var}\,(s^2) = E\,(s^2)^2 - [E\,(s^2)]^2$

$$= \frac{(n^2-1)\,\sigma^4}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^2}\,\sigma^4$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\,\sigma^4\,[(n+1)-(n-1)]$$

$$= \frac{2.\,(n-1)}{n^2}\,\sigma^4.$$

$= \to 0,\ n \to \infty$ எனும் போது.

எனவே, நாம் இப்போது கண்டறிந்தது என்னவென்றால்,

$$(E\,s^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2 \rightarrow \sigma^2, \quad n \rightarrow \infty \text{ என்றால்,}$$

மேலும் $Var\,(s^2) \rightarrow 0. \quad n \rightarrow \infty$ என்றால்,

எனவே, $s^2$ என்ற மாதிரி அளவை, சுட்டுறுப்பு $\sigma^2$-க்கான ஒரு கொள்கை மாறுத மதிப்பீடு ஆகும்.

$s^2$ என்ற அளவை ஒரு நடுநிலையற்ற மதிப்பீடாக (Biased Estimate) இருந்தபோதிலும், $\sigma^2$-க்கான ஒரு கொள்கை மாறுத மதிப்பீடாக இருப்பதை (Consistent estimator) நாம் காண்கிறோம்.

ஒரு கொள்கை மாறுத மதிப்பீடானது ஒரு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடாகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை என்பதற்கு இது ஓர் அருமையான எடுத்துக்காட்டாகும்.

இப்போது $S^2$ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$E\,(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\,\Sigma\,(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= E\left[\frac{n\,s^2}{n-1}\right]$$

$$= \frac{n}{n-1}\,.\,E\,(s^2) = \frac{n}{n-1}\,.\,\frac{n-1}{n}\,.\,\sigma^2$$

$$= \sigma^2$$

மேலும் $E\,(S^4) = E\left[\dfrac{n\,s^2}{n-1}\right]^2$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^2}\,.\,E\,(s^2)^2$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^2}\,.\,\frac{(n^2-1)}{n^2}\,.\,\sigma^4$$

$$\therefore \quad E\,(S^4) = \frac{n^2-1}{(n-1)^2}\,\sigma^4 = \frac{n+1}{n-1}\,.\,\sigma^4.$$

ஆகையால், $Var\,(S^2) = E\,(S^2)^2 - [E\,(S^2)]^2$

$$= \frac{n+1}{n-1}\,.\,\sigma^4 - \sigma^4$$

$$= \frac{\sigma^4}{n-1}[(n+1)-(n-1)]$$

$$= \frac{2.\ \sigma^4}{(n-1)}$$

$\rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$ என்றறிகிறோம்.

இங்கு $\left.\begin{array}{l} E(S^2) = \sigma^2 \\ V(S^2) \rightarrow 0 \end{array}\right\}, n \rightarrow \infty$ எனும்போது

என்பதால் $S^2$ என்ற மதிப்பும் $\sigma^2$-க்கான ஒரு கொள்கை மாருத மதிப்பீடு ஆகிறது.

முடிவாக, $s^2$ என்பது $\sigma^2$-ன் கொள்கை மாரு மதிப்பீடே தவிர, நடுநிலையற்ற மதிப்பீடாகும்.

ஆனல், $S^2$ என்பது $\sigma^2$-ன் கொள்கை மாருத மதிப்பீடாகவும், நடுநிலை மாருத மதிப்பீடாகவும் காணப்படுகிறது.

உதாரணம் :

கோஷி (Cauchy) பரவலிற்கு மாதிரிச் சராசரி ஒரு கொள்கை மாருத மதிப்பீடு அல்ல என்று விளக்குக.

ஒரு கோஷிப் பரவலுக்கான அடர்த்திச் சார்பலன்

$$p_x = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

என்பதால், இப் பரவலுக்கான சராசரி, ஒழுங்காக அமையும் என்று அனுமானித்தால் $X = \mu$-ல் அமைகின்றது. $\mu$-ன் மதிப்பீடாக மாதிரிச் சராசரி $\bar{X}$ ஐ எடுத்துக் கொண்டால், $\bar{X}$-ன் மாதிரிப் பரவலானது

$$p_{\bar{x}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(\bar{X}-\mu)^2}, \qquad -\infty < \bar{X} < \infty$$

என்று இருக்கும்.

கோஷிப் பரவலில், $\bar{X}$-ன் நிகழ்தகவுச் சார்பலன் $X$-ன் நிகழ் தகவுச் சார்பலனை ஒத்தவாறே உள்ளது என்று அறியவும். $\bar{X}$-ன் பரவலும் ஒரு தனி மதிப்பு $X$-ன் பரவலும் ஒரே போன்று அமைந்து இருப்பதால், $n$ ஐக் கூட்டுவதால், பிழையின்மையும் (accuracy) கூடும் என்று சொல்வதற்கில்லை.

எனவே. $E(\bar{X}) = \mu$ என்ருலும்,
$V(\bar{X}) = V(X) \neq 0, \quad n \rightarrow \infty$ எனும்போது

என்பதால் $\bar{X}$ ஒரு கொள்கை மாறுத $\mu$-ன் மதிப்பீடு அல்ல என்று முடிவுகட்டுகின்றோம்.

கோஷிப் பரவலின் சராசரி $\mu$-க்கான ஒரு கொள்கை மாறுத மதிப்பீடு அல்ல என்றாலும், கோஷிப் பரவலின் இடைநிலை (median) $\mu$-க்கு ஏற்றதொரு கொள்கை மாறுத மதிப்பீடு ஆகும். இது வாசகர்களின் நிரூபணத்திற்கு விடப்படுகின்றது.

ஓர் இயல்நிலைப்பரவலின் முழுமைத் தொகுதிச் சராசரிக்கான கொள்கை மாறுத ஒரு மதிப்பீடு மாதிரி இடைநிலை மதிப்பு என்று நிரூபி.

தீர்வு: பெரிய அளவுடைய மாதிரிகளுக்கு, இடைநிலை (median) யின் பரவல் $\mu$ என்ற முழுமைத் தொகுதிச் சராசரியாகவும், $\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$ என்பதைத் தனது திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்டவாறு அமைகின்றது என்று நாம் அறிகின்றோம். (நாம் நிருபிக்க முடியும்).

அதனால் பெரிய மாதிரிகளுக்கு (large samples)

$$Z=\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cap N(0,1)$$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறியாகிறது. இங்கு $\bar{X}$ = மாதிரியின் இடைநிலை மதிப்பு. இப்போது,

$$P_r(1\bar{X} - 1 < \epsilon) = P_r\left(|z| > \frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}}^{\frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$ ஆகும்.

$n$-ன் மதிப்பு முடிவற்றவாறு கூடிக்கொண்டே சென்றால்.

அதாவது, $n \to \infty$ என்றால்,

$$P_r[\,|\bar{X}-\mu| < \epsilon] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}}^{+\frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே, $E(\bar{X}) \rightarrow \mu$, அல்லது $n \rightarrow \infty$.

$$V(\bar{X}) = \frac{\pi\sigma^2}{2n} \rightarrow 0, \quad \text{அல்லது} \quad n \rightarrow \infty$$

ஆதலால், $\bar{X}$ என்ற மாதிரி இடைநிலை மதிப்பு $\mu$-க்கான ஒரு கொள்கை மாருத மதிப்பீடாகின்றது.

உதாரணம்

$\theta$-க்கான ஒரு நடுநிலை மாருத மதிப்பீடு $T$ என்ருல், $\theta^2$-க்கான ஒரு நடுநிலையற்ற (biased) மதிப்பீடாக $T^2$ இருக்கிறது என்று காட்டுக; ஆனல், $T$ ஆனது $\theta$-ன் கொள்கை மாருத மதிப்பீடானல், $T^2$-ம் $\theta^2$-ன் கொள்கை மாருத மதிப்பீடு என்றும் நிருபித்துக்காட்டு.

தீர்வு

(i) $T$-ன் மாதுபாடு $V(T)$

$$0 \neq Var(T) = E(T-\theta)^2$$
$$= E(T^2) - 2\theta . E(T) + \theta^2$$
$$= E(T^2) - \theta^2.$$

அதாவது, $E(T^2) \neq \theta^2$ ஆகின்றது.

எனவே, $T^2$ என்பது $\theta^2$-க்கான ஒரு நடுநிலை மாருத மதிப்பீடு அன்று.

$\therefore$ $\theta^2$-ன் ஒரு நடுநிலையற்ற (Biased) மதிப்பீடு $T^2$ ஆகும்.

(ii) $T$-யானது $\theta$-ன் கொள்கை மாருத மதிப்பீடு என்பதால், $n$-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு, $\eta$, $\epsilon$ தரப்பட்ட மிகச் சிறிய மதிப்புகளானல்,

$$P_r[\,|T-\theta| < \epsilon] > 1-\eta$$

அதாவது, $P_r[\theta - \epsilon < T < \theta - \epsilon] > 1-\eta$

இதையே $P_r[\theta - \epsilon)^2 < T^2 < (\theta + \epsilon)^2 > 1 - \eta$

என்றும் எழுதுகிருேம்.

$$\therefore \quad P_r[\theta^2 - 2\theta\epsilon + \epsilon^2 < T^2 < \theta^2 + 2\theta\epsilon + \epsilon^2] > 1 - \eta$$

$$P_r[\{\theta^2 - \epsilon(2\theta - \epsilon)\} < T^2 < \{\theta^2 + \epsilon(2\theta + \epsilon)\}] > 1 - \eta$$

அதாவது, $P_r[\theta^2 - \epsilon_1 < T^2 < \theta^2 + \epsilon_2] > 1 - \eta$

இங்கு $\epsilon$ சிறியது; எனவே $\epsilon_1, \epsilon_2$ இரண்டும் மிகச் சிறிய மதிப்புகள் என்பதால் $\epsilon_1, \epsilon_2$ இரண்டுக்கும் ஒத்த மிக மிகச் சிறிய $\epsilon^1$ ஐ எடுத்துக்கொண்டால்,

$$P_r[\theta^2 - \epsilon^1 < T^2 < \theta^2 + \epsilon^1] > 1 - \eta$$

$\therefore \quad P_r[\,|T^2 - \theta^2| < \epsilon^1] > 1 - \eta$ ஆகிறது.

எனவே, $T^2$ மதிப்பு $\theta^2$-க்கான மாறுத மதிப்பீடு என்றும் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

## 2·3. திறமை (Efficiency):

$m$ என்ற ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் சுட்டுறுப்புக்கான நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடுகளை, ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் (sample) வெவ்வேறு மதிப்புகளாகப் பெறலாம். உதாரணமாக, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $k$ மாதிரிகள், ஒவ்வொன்றும் $n_i$ அளவில் $(i = 1, 2, \ldots k)$ எடுக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம் ஒவ்வொரு மாதிரி மதிப்புகளிலிருந்தும் $m$-க்கான நடுநிலை மாறுத மதிப்பீட்டைப் பெறமுடியும். எனவே, $k$ மாதிரிகளுக்கான $k$ எண்ணிக்கையுடைய நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடுகள் நமக்குக் கிடைக்கப் பெறுகின்றது. இந்த $k$ நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடுகளில் எந்த நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடானது வலிமையுடைத்தது அல்லது திறம் பெற்றது என்று நாம் கண்டறிய விழைகின்றோம். இதற்கு ஒவ்வொரு மதிப்பீட்டிற்குமான மாறுபாட்டினை (variance) கணிக்கவேண்டும் முதலில். பிறகு இந்த $k$ மாறுபாடுகளில் எந்த மாறுபாடு மீச்சிறுமமானதென்பதனை ஒப்பிட்டு நோக்கவேண்டும். எந்த ஒரு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீட்டிற்கு மீச்சிறு மாறுபாடு உள்ளதோ அதை ஓர் இலக்காக வைத்துக்கொண்டு, மற்ற மதிப்பீடுகளின் திறனை (வலிமையை) நாம் வரையறுத்துக் கண்டு பிடிக்கலாம். உதாரணமாக, $V_1, V_2, \ldots V_k$ ($k = 10$ என்க) என்பன 10 மாதிரிகளிலிருந்து கிடைத்த மதிப்பீடுகளின் மாறுபாடுகள் என்றால், மேலும் $V_8$-ன் மதிப்புதான் மீச்சிறுமமானது என்றால், $V_8 = V$ என்று கொள்ளவும். இப்போது 2ஆவது மதிப்பீட்டிற்கான திறம் $= \dfrac{V}{V_2}$ ஆகும். 8ஆவது மதிப்பீட்டிற்கான திறம் $= \dfrac{V}{V_8}$ ஆகும். இவ்வாறு ஒரு மதிப்பீட்டின் திறம் அறியப்படுகிறது.

**திறமை (Efficiency) :**

**வரையறை :**

$m$ என்ற சுட்டுறுப்பிற்கான நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடுகளின் ஒரு தொகுதியிலிருந்து கிடைக்கப்பெற்ற மீச்சிறு மாறுபாடு (minimum variance) $V$ எனக் கொள்வோம். 'ω' என்பதனை $m$-ற்கான ஏதோ ஒரு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு என்று எடுத்துக் கொள்வோம். $V(\omega)$ என்பது ω-ன் மாறுபாடு ஆனல், ω-ன் திறத்தினை $\frac{V}{V(\omega)}$ என்று வரையறுக்கின்றோம்.

**தொடர்ந்து இணையாது அணுகிச் செல்கின்ற திறமை** (Asymptotic Efficiency)

**வரையறை :**

$\frac{\sqrt{n}\,(T_n - m)}{c}$ என்ற மாறியின் பரவல் சராசரி 0 மாறுபாடு 1 ஐக் கொண்ட ஓர் இயல் நிலைப் பரவலைச் சார்ந்து அமைந்தால். $T_n$-ன் (asymptotic efficiency) யினை

$e = \frac{1}{c^2 \cdot i(m)}$ என்று வரையறுக்கின்றோம்.

இங்கு முழுமைத் தொகுதியின் அலைவெண் அடர்த்திச் சார்பலன் $f$ என்றால் $i(m) = -E\left[\frac{\partial^2 \log f}{\partial m^2}\right]$ ஆகும்.

**நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்** (Likelihood Function)

ஒரு மாதிரியின் அலைவெண் அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$-ஐ நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் என்று அழைக்கின்றோம்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற ஒரு மாதிரியினை எடுத்துக்கொண்டால், இம்மாதிரியின் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் அல்லது அலைவெண் அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ ஆகும். இதனையே நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் (Likelyhood function) என்று அழைக்கின்றோம். மதிப்பீட்டுக் கொள்கையில் (Estimation theory) நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் பெரும்பங்கு வகிக்கின்றது. சுட்டுறுப்புகளுக்கான சரியான குணப்பண்புகளடங்கிய மதிப்பீடுகளைக் கண்டறிவதற்கு இந்த சார்பலன் பெரிதும் துணை புரிகின்றது. இதன்

உபயோகத்தை நாம் பிறகு 'மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறை யினைப் (Maximum Likelihood Method) பற்றி ஆராயும்போது நன்கு உணர்வோம்.

இங்கு $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ என்பது $X_1$, $X_2$, ... $X_n$ என்ற $n$ மாறிகளுக்கான இணைந்த நிகழ்தகவுச் அடர்த்திச் சார்பலனைக் (joint probability density function) குறிக்கிறது.

இந்த $n$ மாறிகளும் தற்சார்பற்ற மாறிகளாதலால், நிகழ்தகவு விதியின்படி

$$f(X_1, X_2, \ldots X_n) = f_1(X_1) \cdot f_2(X_2) \cdot f_3(X_3) \ldots f_n(X_n)$$

என்றோ அல்லது

$f(X_1, X_2, \ldots X_n) = f(X_1) \cdot f(X_2) \ldots X\ f(X_n)$ என்று சாதாரணமாகவோ குறிக்கப்படுகின்றது. உதாரணமாக, ஓர் ஈருறுப்பு மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\{(X_1, n), X_2, n), X_3, n), \ldots (X_k\ n)\}$ என்ற மாதிரியைக் கவனிப்போம்.

இங்கு $n$ என்பது முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையையும்

($X_i$ என்பது ஈருறுப்பு மாறியாகும்)

($X_i$ என்பது $i$-ஆவது மாறிக்கான வெற்றியின் எண்ணிக் கையையும்

$k$ என்பது மாதிரியின் அளவையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது

$$f(X_1, n) = \binom{n}{X_1} p^{X_1} q^{n-X_1} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $p =$ வெற்றி வாய்ப்புக்கான நிகழ்தகவு. $n$ முயற்சி களில் $X_1$ வெற்றிக்கான நிகழ்தகவினைத்தான் $f(X_1, n)$ என்று குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

இதேபோல, $f(X_2, n)$, $f(X_3, n)$, ... $f(X_k, n)$ என்று மற்ற மாறிகளுக்கும் எழுதலாம்.

$X_1, X_2, \ldots X_k$ என்பன தற்சார்பற்ற மாறிகளாகக் கருது வதால், இந்த $k$ மாறிகளுக்குமான இணைந்த நிகழ்தகவு (joint probability)

$$f(X_1, X_2, \ldots X_k, n) = f(X_1, n) \cdot f(X_2, n) \ldots f(X_k, n)$$
$$= \left[\binom{n}{X_1} p^{X_1} q^{n-X_1}\right]\left[\binom{n}{X_2} p^{X_2} q^{n-X_2}\right] \ldots \left[\binom{n}{X_k} p^{X_k} q^{n-X_k}\right]$$

அதாவது,

$$f(X_1, X_2, \ldots X_k) = \binom{n}{X_1}\binom{n}{X_2} \ldots \binom{n}{X_k} p^{X_1} \cdot p^{X_2} \ldots p^{X_k} \cdot q^{n-X_1} \cdot q^{n-X_2} \ldots q^{n-X_k}$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{k} \binom{n}{X_i}\right] \cdot p^{\Sigma X_i} \cdot q^{nk - \Sigma X_i}$$

இனி, $f(X_1, X_2 \ldots X_k\ n)$ என்பதை "L" என்று அழைப்போம்.

$f(X_1\ X_2 \ldots X_k ; u) = L$ ஆகும்.

(ii) பாய்சான் மாதிரிக்கான நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் :

$\{X_1, X_2, X_k\}$ என்ற மாதிரியானது $m$ சுட்டுப்பைக் கொண்ட பாய்சான் பரவலில் அமைந்திருந்தால்,

$$f(X_i ; m) = \frac{e^{-m} \cdot m^{X_i}}{x_j!}, i = 1, 2, \ldots k.$$

எனவே, நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்

$$L = f(X_1, X_2, X_3 ; m)$$
$$= f(X_1 ; m) \cdot f(X_2 ; m) \cdot f(X_3 ; m) \ldots f(X_k ; m)$$
$$= \frac{e^{-m} \cdot m^{X_1}}{X_1 !} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^{X_2}}{X_2 !} \ldots \ldots \frac{e^{-m} \cdot m^{X_n}}{X_k !}$$
$$= \frac{1}{X_1!\, X_1! \ldots X_k!} \cdot e^{-mk} \cdot m^{X_1 + X_2 + \ldots + X_k}$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{X_i !}\right] \cdot e^{-mk} \cdot m^{\Sigma X_i} \text{. ஆகும்.}$$

(iii) இயல் நிலை மாதிரி $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$, சுட்டுருப்புகள் $m, \sigma$ இவற்றைக் கொண்ட ஓர் இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது.

$X_i$-ன் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $= f(X_i; m, \sigma)$

$$f(X_i; m, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - m)^2}$$

இங்கு $i = 1, 2, \ldots n$ என்க.

எனவே, நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்

$$L = f(X_1, X_2, \ldots, X_n; m, \sigma)$$

$$= f(X_1; m, \sigma).\ f(X_2; m, \sigma) \ldots f(X_n; m, \sigma)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_1 - m)^2} \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_2 - m)^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_n - m)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(X_1 - m)^2 + (X_2 - m)^2 + \ldots + (X_n - m)^2]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n . \ e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}$$

ஆகின்றது.

பொதுவாக நிகழும் தன்மைச் சார்பலனை சுட்டுருப்புகளின் சார்பலனாகக் குறிக்கலாம். இயல் நிலைப் பரவல் உதாரணத்தில் $L = L(m, \sigma)$ ஆகிறது. பாய்சான் உதாரணத்தில் $L = L(m)$ ஆகும்.

ரவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லை (Rao-Cramer lower bound)

புள்ளியல் நிபுணர்களாகிய பேராசிரியர்கள் C. ராதாகிருஷ்ணராவ் (C. R. Rao), ஹெரால்டு கிரேமர் (Herald Cram'er) இரு

வரும் திறன் வாய்ந்த மதிப்பீடுகளைக் காண, மதிப்பீட்டின் மாறுபாட்டிற்கான கீழ் எல்லையினை வரையறுத்துள்ளனர்.

$X : \{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற மாதிரியைப் பொறுத்த அளவில் $\theta$ என்ற சுட்டுறுப்பின் நடுநிலை மாறுத ஏதாவது ஒரு மதிப்பீடாக $T$ஐக் கொள்வோம். $X$-ன் அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X; \theta)$-ன் மீது விதிக்கப்பட்ட சில ஒழுங்கு நிபந்தனைகளின்படி,

$T$-ன் மாறுபாடு $V(T) > \frac{1}{n\, i(\theta)}$ ஆகும்.

இங்கு $i(\theta)$ என்பது ஒவ்வோர் அலகு மதிப்புக்குமான செய்தி (Information per unit observation).

அதாவது, $i(\theta) = -E\left[\frac{d^2 \log f(X; \theta)}{d\theta^2}\right]$ ஆகும்.

மேலே குறிப்பிட்ட சமனிலி,

$\left(\text{அதாவது } V(T) > \frac{1}{n \cdot i(\theta)} \text{ என்பது}\right)$

ராவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லையாகும்.

**நிருபணம் :**

இங்கு $f(X_1, X_2, \ldots X_n; \theta)$ என்பது நிகழும் தன்மைச் சார்பலன். $T$ சார்பலனை $T = T(X_1, X_2, \ldots X_n)$ என்று எழுதலாம்.

$\theta$-ன் நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு $T$ என்பதால்,

$E(T) = \theta$ ஆகும். இதை வரையறைப்படி எழுதினுல்

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} T(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cdot f(X_1 X_2, \ldots, X_n; \theta).$$

$$dX_1\, dX_2 \ldots dX_n = \theta \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1)ஐ $\theta$-ன் பொருட்டு வகைப்படுத்துவோம்.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} T(X_1, X_2, \ldots X_n). \left[\sum \frac{1}{f(X_i; \theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} f(X_i; \theta)\right]$$

$$f(X_1 \ldots X_n; \theta)\, dX_1 \ldots dX_n = 1 \text{ ஆகிறது.}$$

ஏனென்றால், $f(X_1, X_2, \dots X_n ; \theta)$

$$= f(X_1 \cdot \theta) \cdot f(x_2 ; \theta) f(X_n ; \theta)$$

$$\therefore \quad \log f(X_1, X_2, \dots X_n ; \theta) \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i ; \theta)$$

இதை $\theta$-க்கு வகைப்படுத்தினால்

$$\frac{1}{f(X_1; X_2 \dots X_n; \theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} f(X_1, X_2, \dots X_n ; \theta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{1}{f(X_i ; \theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} f(X_i ; \dots \theta) \right]$$

எனவே, $\frac{d}{d\theta} f(X_1, X_2, \dots X_n ; \theta) = f(X_1, X_2, \dots X_n ; \theta)$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{1}{f(X_i ; \theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} f(X_i ; \theta) \right] \right\}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(X_1, \dots X_n) \left[ \sum \frac{1}{f(X_i ; \theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} \cdot f(X_i ; \theta) \right]$$

$$f(X_1, \dots X_n, \theta)\, dX_1, dX_2 \dots dX_n = 1$$

இப்போது $U = \sum \frac{d}{d\theta} \log f(X_i ; \theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad E(TU) = 1.$ ... (2)

மேலும் $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2, \dots X_n ; \theta)\, dX_1\, dX_2 \dots dX_n = 1$

(மொத்த நிகழ்தகவு)

இதை $\theta$-க்கு வகைப்படுத்தினால் (இருபக்கங்களிலும்)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum \frac{1}{f(X_i ; \theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} f(X_i ; \theta) \right]$$

$$f(X_1, X_2, \dots X_n ; \theta)\, dX_1 \dots dX_2 = 0$$

அதாவது $E(U) = 0$ ... (3)

இப்போது $U,T$-ன் உடன்மாறுபாடு (covariance of U and $T$) மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\text{Cov}(U,T) = E(UT) - E(U).\,E(T)$$
$$= E(UT); \text{ ஏனென்ருல் } E(U) = 0$$
$$= 1, \text{ சமன்பாடு (2)-ன் மூலம் புலனுகிறது.}$$

எனவே, $(U, T)$-ன் உடன் தொடர்புக் கெழு $\rho_{U,T}$-ன் மதிப்பு

$$\rho^2_{U,T} = \frac{[\text{Cov}(U, T)]^2}{\sigma^2_U .\ \sigma^2_T}$$
$$= \frac{1}{\sigma^2_U\ \sigma^2_T} < 1 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $\sigma_U^2\ \ \sigma_T^2 > 1.$

அதாவது, $\sigma_T^2 > \dfrac{1}{\sigma^2_U}$ ... (4)

இப்போது, $V(U) = \sigma_U^2 = E(U^2) - [E(U)]^2$

$$= E(U^2) \text{ ஏனென்ருல், } E(U) = 0$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta} \log f(X_i;\theta)\right]^2 \quad \text{... (5)}$$

இங்கு $h_i = \dfrac{d}{d\theta} \log f(X_i;\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ \sigma_U^2 = E(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)^2$$
$$= E(h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h^2_n) + \sum_{i \neq j} E(h_i\, h_j) \quad \text{... (6)}$$

$i \neq j$ என்ருல்,

$$E(h_i\, h_j) = E\left(\frac{d}{d\theta} \log f(X_i;\theta).\ \frac{d}{d\theta}.\log f(X_j;\theta)\right]$$
$$= \left[E\,\frac{d}{d\theta}.\ \log f({}_iX;\theta)\right]\left[E.\frac{d}{d\theta}.\log f(X_j;\theta)\right]$$

ஆனுல், $E\left[\dfrac{d}{d\theta} \log f(X_i;\theta)\right]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\theta} \log f(X_i;\theta)\right].\, f(X_j;\theta).\, dX_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\theta} \cdot f(X_i; \theta) \cdot dX_i$$

$$= \frac{d}{d\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(X_i; \theta)\, dX_i = 0$$

ஆகையால், $E(h_i\, h_j) = 0 \quad i \pm j$ என்றால்,

(6), (7) இவற்றிலிருந்து,

$\sigma_u^2 = E(h^2_1 + h^2_2 + \ldots + h^2_n)$

$= n \cdot E(h^2_i)$ ஏனெனில், $E(h^2_i)$ என்பது எல்லா $i$-க்கும் ஒரே மதிப்பானதாகும்.

இப்போது $E\left[\frac{d^2 \log f(X_i\ \theta)}{a\,\theta^2}\right]$-ன் மதிப்பைக் கவனிப் போம்.]

$$E\left[\frac{d^2 \log f(X_i; \theta)}{d\,\theta^2}\right]$$

$$= E\left\{\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{f(X_i; \theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} \cdot f\, X_i;\ \theta\right]\right\}$$

$$= E\left[\frac{1}{f(X_i; \theta)} \cdot \frac{d^2}{d\theta^2} f(X_i; \theta) - \frac{1}{f^2\,(X_i; \theta} \left\{\frac{d}{d\theta} f(X_i; \theta)\right\}^2\right]$$

இங்கு முதல் மதிப்பு (first term) பூஜ்யமாகிறது; ஏனெனில், $E\,(U) = 0$.

எனவே, $E\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \cdot \log f(X_i; \theta\right]$

$= -\,E\left[\frac{d}{d\theta} \cdot \log f\, X_i;\ \theta\ \right]^2$

இப்போது $\sigma_T{}^2$-ன் மதிப்பைப் பார்ப்போம்.

$\sigma_T{}^2 > \frac{1}{\sigma_U{}^2}$

$$\sigma^2_U = n. \quad E\,(h^2_i)$$

$$= nE\left[\frac{d}{d\theta}.\ \log f(X_i;\,\theta)\right]^2$$

$$= -\,nE\left[\frac{d^2}{d\theta^2}.\ \log f(X;\,\theta)\right]$$

இங்கு $X_i$-க்குப் பதிலாக $X$ என்று எழுதுவதால் தவறில்லை.

$$\text{ஆகையால்,}\quad \sigma^2_T > \frac{1}{-n\,E\left[\frac{d^2}{d\,\theta^2}\log\ f\ (X;\,\theta)\right]}$$

எனவே, ராவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லை இவ்வாருக நிரூபிக்கப்படுகின்றது.

சில சமயங்களில் ஒரு மதிப்பீட்டின் திறத்தினை ராவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லையின் வாயிலாக வரையறுக்கின்ருேம்.

ராவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லையினை, நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் மூலமாகவும் எழுதலாம்.

$$E\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\log L\right] = E\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}.\ \left[\log\ \left\{\prod_{i=1}^{n} f\ (X_i;\,\theta)\right\}\right]\right)$$

$$= E\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\ \log f\ (X_i;\ \theta)\right]\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\log\ f(X_i;\,\theta)\right]\right\}$$

$$= E\left[n\ \left\{\frac{d}{d\,\theta^2}.\ \log\ f(X_i;\,\theta)\right\}\right]$$

ஏனெனில், எல்லா $X_i$யும் ஒரே நிகழ் தகவுடையவையாகும்.

ஆகையால்,

$$E\cdot\left[\frac{d^2\log L}{d\theta^2}\right] = n\,.\,E\,.\left[\frac{d^2\log f\,(X_i;\,\theta)}{d\,\theta^2}\right]$$

$$= n\,.\,E\,.\left[\frac{d^2\log f\,(X;\,\theta)}{d\theta^2}\right]$$

என்றும் $i$-ஐ நீக்கியவாறு எழுதலாம்.

எனவே, $\sigma_T^2 > \dfrac{1}{-n\,E\left[\dfrac{d^2}{d\theta^2}\cdot\log f(X;\theta)\right]}$

என்ற கீழ் எல்லையை

$$\sigma_T^2 > \frac{1}{-E\left[\dfrac{d^2}{d\theta^2}\cdot\log L\right]}$$

என்றும் எழுதலாம்.

உதாரணம்: (i) ஈருறுப்புப் பரவலைச் சார்ந்த மாதிரியின் வெற்றிக் கான விகிதம் $\frac{r}{n}$ என்றால், $\frac{r}{n}$ எனும் மாதிரி அளவை $p$-க் கான ஒரு திறம் மிக்க மதிப்பீடாகிறது.

நிரூபணம்:

$$L = \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r} \qquad q = 1 - p.$$

$$\log L = \log\binom{n}{r} + r\log p + (n-r)\log(1-p)$$

$$\frac{d}{dp}\log L = 0 + r\,\frac{1}{p} - \frac{(n-r)}{1-p} = \frac{r}{p} - \frac{n-r}{1-p}$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\log L = -\frac{r}{p^2} - \frac{(n-r)}{(1-p)^2}$$

$$= -\left[\frac{r}{p^2} + \frac{n-r}{(1-p)^2}\right]$$

$$\therefore\quad E\left(\frac{d^2\log L}{dp^2}\right) = -E\left[\frac{r}{p^2} + \frac{n-r}{(1-p^2)}\right]$$

$$= -\left[\frac{E(r)}{p^2} + \frac{E(n-r)}{(1-p)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{np}{p^2} + \frac{n-np}{(1-p)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{n}{p} + \frac{n}{(1-p)}\right]$$

$$= -n\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right]$$

$$= -\frac{n}{pq}.$$

எனவே, கீழ் எல்லை $= \dfrac{1}{-E\left(\dfrac{d^2 \log L}{dp^2}\right)} = \dfrac{pq}{n}$.

$$\text{மேலும்} \quad V\left(\frac{r}{n}\right) = E\left(\frac{r}{n} - p\right)^2$$
$$= E\left(\frac{r-np}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot E(r-np)^2$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}.$$

$\dfrac{r}{n}$-ன் மாறுபாடு $V\left(\dfrac{r}{n}\right) = \dfrac{pq}{n}$ என்பதாலும்,

கீழ் எல்லை $= \dfrac{pq}{n}$ என்பதாலும், ராவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லையின் மூலம் $\dfrac{r}{n}$-ன் மதிப்பு $p$-க்கான சிறந்த திறம் வாய்ந்ததொரு மதிப்பீடு என்பது புலனாகின்றது.

(ii) பாய்சான் $m$-க்கான திறம் வாய்ந்த மதிப்பீடு $\bar{r}$ என்று இப்போது நிரூபிப்போம்.

$\{r_1, r_2, \ldots\ldots r_n\}$ என்ற மாதிரி, $m$ சுட்டுறுப்பைக் கொண்ட ஒரு பாய்சான் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $= L = L(m)$

$$L(m) = \frac{1}{r_1!} e^{-m} \cdot m^{r_1} \cdot \frac{e^{-m}\, m^{r_2}}{r_2!} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^{r_3}}{r_3!} \cdots \frac{e^{-m} \cdot m^{r_n}}{r_n!}$$
$$= \frac{1}{r_1!\, r_2! \ldots r_n!} \cdot e^{-nm} \cdot m^{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}$$

$$\log L = C - nm + (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) \log m$$

இங்கு $C$ என்பது ஒரு மாறிலி.

$$\frac{d \log L}{dm} = -n + \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{m}$$

$$\frac{d^2 \log L}{dm^2} = -\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{m^2}$$

$$\therefore E\left(\frac{d^2 \log L}{dm^2}\right) = -\frac{1}{m^2} E(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$$

$$= -\frac{1}{m^2}(m+m+\ldots+m)$$

$$= -\frac{nm}{m^2}$$

$$= -\frac{n}{m}.$$

எனவே, கீழ்எல்லை $= \dfrac{1}{-E\left[\dfrac{d^2 \log L}{dm^2}\right]}$

$$= \frac{m}{n}.$$

மேலும் $V(\bar{r}) = \bar{r}$-ன் மாறுபாடு

$$= V\left(\frac{1}{n}\sum r_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} . V\left(\sum r_i\right)$$

$r_i$ என்பது பாய்சான் மாறியானதால் $V(r_i) = m$ எல்லா $i$-க்கும்

எனவே, $V(\bar{r}) = \dfrac{1}{n^2} . \Sigma_i V(r_i)$

$$= \frac{1}{n^2} . n . m = \frac{m}{n}.$$

$V(\bar{r})$-ன் மதிப்பும் கீழ் எல்லை மதிப்பும் $\dfrac{m}{n}$ என்பதால்

$V(\bar{r}) = \sigma_{\bar{r}}^2 > \dfrac{1}{-E\left(\dfrac{d^2 \log L}{dm^2}\right)}$ என்ற ராவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லை நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது. எனவே, $\bar{r}$ என்ற பாய்சான் சராசரி, $m$ என்ற சுட்டுருப்பிற்கானதொரு மிகத்திறம் வாய்ந்த மதிப்பீடாகும்.

உதாரணம் : (iii) ஓர் இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியின் சுட்டுறுப்புகள் $m$, $\sigma$ என்றால், அம்முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இயல்நிலை மாதிரியின் சராசரி $\bar{X}$ ஆனது, சுட்டுறுப்பு $m$-க்கான ஒரு திறம் வாய்ந்த மதிப்பீடு ஆகும் என்று இப்போது காண்போம்.

$\{X_1, X_2, \dots X_n\}$ என்பது ஓர் இயல்நிலை ராண்டம் மாதிரி என்றால்,

$$f(X_1; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[X_1 - m]^2}$$

$$f(X_2; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_2 - m)^2}$$

$$f(X_n; m, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_n - m)^2}$$

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $L = L(m,\sigma)$

$$L(m,\sigma) = f(X_1; m,\sigma)\ f(X_2; m,\sigma) \dots \dots f(X_n; m,\sigma)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(X_1-m)^2+(X_2-m)^2+\dots+(X_n-m)^2]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\left[\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2\right]}$$

$$\log L(m,\sigma) = n\log(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2.$$

இங்கு இரண்டு சுட்டுறுப்புகள் இருப்பதாலும், $m$ சுட்டுறுப்புக்கான மதிப்பீட்டைக் காண்கையில் $L$ சார்பலனை $m$ ஐப் பொறுத்தவாறு பகுதி-வகைப்படுத்தினால்,

$$\frac{\partial \log L}{\partial m} = 0 + 0 - \frac{1}{2\sigma^2}(-2).\ \Sigma(X_i - m)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\Sigma(X_i - m) \text{ ஆகும்.}$$

இதையே திரும்ப பகுதி வகைப்படுத்தினால்,

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial m^2} = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma(-1) = \frac{-n}{\sigma^2}.$$

$$\therefore \quad E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial m^2}\right] = -\frac{n}{\sigma^2}.$$

$$\text{கீழ் எல்லை} = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial m^2}\right]} = \frac{\sigma^2}{n}$$

மேலும் $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ என்பதால்,

$\bar{X}$ என்ற மாதிரி அளவை $m$-க் கான திறம் வாய்ந்த மதிப்பீடாகும்.

சராசரி $\mu$, மாறுபாடு $\sigma^2$ என்ற சுட்டுறுப்புகளைக்கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய ராண்டம் மாதிரிகளுக்கு

$\hat{\mu} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ என்பது ஒரு நடுநிலையற்ற மதிப்பீடாக இருந்தபோதிலும், $\mu$ஐ மதிப்பீடு செய்யக்கூடிய ஒரு மிகவும் திறமை வாய்ந்த மதிப்பீடு என்று நிரூபி.

**தீர்வு :**

முதலில் $\hat{\mu}$ மதிப்பு $\mu$-க்கான ஒரு நடுநிலையற்ற மதிப்பு என்பதை நிரூபிப்போம்.

$$= -n.\log\sigma - n\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$$

$$E\left[\frac{1}{n+1} \sum X_i\right] = \frac{1}{n+1} E(\Sigma X_i)$$

$$= \frac{n\mu}{n+1} \text{ ஏனெனில் } E(X_i) = \mu$$

எல்லா $i$-க்கும்

$$\neq \mu$$

என்பதால் $\hat{\mu}$ ஒரு நடுநிலையற்ற மதிப்பீடாகின்றது.

இப்போது $\hat{\mu}$-ன் மாறுபாட்டைக் கவனிப்போம்.

$$Var(\hat{\mu}) = Var\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} Var(n\bar{X}) \text{ ஏனெனில் } \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot Var(\bar{X})$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$= \frac{n\sigma^2}{(n+1)^2} \to 0, \; n \to \infty \text{ எனும்போது.}$$

எனவே, $\hat{\mu}$ என்பது $\mu$-க்கான ஒரு மிகவும் திறமை வாய்ந்த மதிப்பீடாகின்றது.

உதாரணம்: $t$ என்பது ஒரு மிகுந்த திறமை வாய்ந்த மதிப்பீடு என்றால், $t$ ஒரு குறைந்த திறமை வாய்ந்த மதிப்பீடு ($e$ என்ற திறமையுடன் கூடியது) என்றால் $(t, t')$க்கான உடன் தொடர்பு $\rho$ என்றால், $t''$ என்பதை

$$(1+e-2\rho\sqrt{e})\,t'' = (1-\rho\sqrt{e})\,t + (e-\rho\sqrt{e})\,t'$$

என்று வரையறுத்தால், $\rho = \sqrt{e}$ என்று நிரூபித்துக் காண்பி.

தீர்வு:

$\theta$-க்கான கொள்கை மாறுத மதிப்பீடுகளாக $t, t'$ இரண்டும் இருக்கட்டும்.

அதாவது பெரிய மதிப்புகளுக்கு

$$E(t) = \theta = E(t').$$

எனவே, $E(t'') = \dfrac{(1-\rho\sqrt{e})E(t)+(e-\rho\sqrt{e})E(t')}{(1+e-2\rho\sqrt{e})}$

$= \dfrac{(1-\rho\sqrt{e})\theta+(e-\rho\sqrt{e})\theta}{1+e-2\rho\sqrt{e}}$,

பெரிய $n$ மதிப்புக்கு.

$= \dfrac{(1+e-2\rho\sqrt{e})\theta}{(1+e-2\rho\sqrt{e})} = \theta$ ஆகும்.

எனவே, $t''$-ம் $\theta$-ன் கொள்கை மாருத ஒரு மதிப்பீடே.

மேலும் $(1+e-2\rho\sqrt{e})^2\ Var\ t''$

$= (1-\rho\sqrt{e})^2 . Var\ t+(e-\rho\sqrt{e})^2\ Var\ t'+2(1-\rho\sqrt{e})$
$(e-\rho\sqrt{e})\ Cor\ (t, t')$

இப்போது $Var(t)=v$, $Var(t') = \dfrac{v}{e}$ என்று கொள்வோம்.

$Cor\ (t, t') = \rho\sqrt{v}\sqrt{\dfrac{v}{e}} = \rho . \dfrac{v}{\sqrt{e}}$

எனவே,

$(1+e-2\rho\sqrt{e})^2 . Var\ t''=v(1-\rho\sqrt{e})+\dfrac{v}{e}(e-\rho\sqrt{e})^2$

$+2.\rho.\dfrac{v}{\sqrt{e}}(1-\rho\sqrt{e})(e-\rho\sqrt{e})$

$= v\ [(1-\rho\sqrt{e})^2+(\sqrt{e}-\rho)^2+2\rho(1-\rho\sqrt{e})(\sqrt{e}-\rho)]$

இதைச் சீர்படுத்தினல்,

$[(1-\rho^2)+(\rho-\sqrt{e})^2]\ Var\ t'' = v\ (1-\rho^2)$ என்ருகும்.

$\therefore$ $Var\ t'' < v$ என்ருகிறது.

ஆனல், $Var\ t'' > v$.

எனவே, $Var\ t'' = v$ என்று அறிகின்ருேம்.

இப்போது var $t'' = v$ என்பதால்,

$[(1-\rho^2)+(\rho-\sqrt{e})^2]\ v = v.\ (1-\rho^2)$.

ஆகவே, $(\rho-\sqrt{e}) = 0$.

அல்லது $\rho = \sqrt{e}$

குறிப்பு : இங்கு $t, t'$ இரண்டும் மிகுந்த திறமை வாய்ந்த மதிப்பீடுகளானால், $e=1$; ஆகவே. $\rho=1$ ஆகும்.

உதாரணம் : $t$ என்பது $\theta$-ன் மிகத் திறம் வாய்ந்த மதிப்பீடு $e$ என்ற திறத்திறனைக் கொண்ட மற்றொரு மதிப்பீடு $t'$ என்றால்,

$$\text{var}\,(t-t') = \left(\frac{1}{e}-1\right)\text{var}\,t$$ என்று நிரூபி.

தீர்வு : $\text{var}\,(t-t') = \text{var}\,t + \text{var}\,t' - 2\,\text{cor}\,(t, t')$

$$= \text{var}\,t + \frac{\text{var}\,t}{e} - 2\rho\frac{\text{var}\,t}{e}$$

[முன் கணக்குப் படி.]

$$= \left(1+\frac{1}{e} - 2\sqrt{e}\,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\text{var}\,t.$$

$$= \left(\frac{1}{e}-1\right)\text{var}\,t.$$ என்றாகிறது.

உதாரணம் : $t'' = \frac{1}{2}(t+t')$ என்றால், $t$-ம் $t'$-ம் இரண்டும் மிகவும் திறமை வாய்ந்த மதிப்பீடுகள் என்றால், $\text{var}\,t = \text{var}\,t' = v$ என்றால்,

$\text{var}\,t'' = \frac{1}{2}v(1+\rho)$ என்று காண்பி.

தீர்வு : $\text{var}\,t'' = \frac{1}{4}[\text{var}\,t + \text{var}\,t' + 2\,\text{cor}\,(t, t')]$

$= \frac{1}{4}[v + v + 2.\rho.v] \quad \because \quad e = 1$ இங்கு.

$= \frac{1}{2}v(1+\rho)$ ஆகும்.

**மீச்சிறு மாறுபாட்டு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடுகள் : (Minimum Variance Unbiased Estimates) :**

$m$ என்ற சுட்டுறுப்புக்கான $T$ எனும் ஒரு மதிப்பீடு கீழ்க்கண்ட பண்புகளைக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

(i) $T$ ஒரு நடு நிலை மாறுத மதிப்பீடு.

(ii) $m$-க்கான எல்லா நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடுகளிலும் $v(T)$-ன் மதிப்பு மீச்சிறியது.

இவ்வாறு இருந்தால் $T$ என்ற மதிப்பீட்டை ஒரு மீச்சிறு மாறு பாட்டு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு என்று கூறலாம்.

## 2.4 போதுமான மாதிரி அளவைகள் (Sufficient Statistics)

$m$ என்ற சுட்டுறுப்பைக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X; m)$ எனக் கொள்வோம். அத்தகைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரி $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என இருக்கட்டும். $m$ஐ மதிப்பீடு செய்யக் கூடிய ஒரு மாதிரி அளவை $T$ஐ $T = T\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ எனக் கூறுவோம். இங்கு ஒரு ராண்டம் மாறியாகிறது. ஆரம்பத்தில் $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற $n$ ராண்டம் மாறிகளைக் கொண்டு ஆரம்பித்து அதை $T$-ன் உபயோகத்தால், ஒரு ராண்டம் மாறிக்குச் சுருக்கிக் குறைத்துள்ளதால், இந்தச் சுருக்கிக் குறைப்பு முறையினுல் ஏதாவது (செய்தி) விவரங்களை நாம் இழந்துவிட்டோமா என்று பார்க்க விழைகின்ருேம். உதாரணமாக $T$-ன் ஒரு சாதகமான வாய்ப்பு $X_1$ என வைத்துக்கொள்வோம். ஆகவே, இம் மாதிரியில் $m$ ஐப் பொறுத்தவரையில் எல்லா விவரங்களும் உபயோகப்படுத்தப்படவில்லை. அதாவது, $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற மதிப்புகளுக்குப் பதிலாக $X_1$ஐ மட்டுமே உபயோகிக்கின்ருேம்.

$m$ என்ற சுட்டுறுப்பைப்பற்றி எல்லா விவரங்களையும் $T$ கொடுக்குமாறுல், நாம் $T$ஐ மட்டுமே வைத்துக்கொண்டு செயல்படுத்த விரும்புகிரும்; $n$ மதிப்புக்ளைவிட ஒரு மதிப்பு நம் ஆய்வுக்குச் சாதகமாக இருக்குமாதலால், இந்த $T$ எனும் ஒரே மதிப்பு ஒரு போதுமான மாதிரி அளவை மதிப்பு எனக் கூறப்படுகிறது.

போதுமான மாதிரி அளவை வரையறை: $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற ஒரு ராண்டம்மாதிரி $f(X; m)$ என்ற அடர்த்திச் சார்பலனை கொண்டுள்ளதாகக் கருதுவோம். $T$ என்பது ஒரு மாதிரி அளவையாக இருக்கட்டும். $T$-ன் சார்பலனுகஇல்லாத வேறு ஏதோ ஒரு மாதிரி அளவையாக $T^*$ இருக்கட்டும். $T^*$ போன்ற ஒவ்வொரு மாதிரி அளவைக்கும், $T^*/T$-ன் நிபந்தனை அடர்த்தியானது (Conditional density of $T^*/T$), $m$ ஐச் சாராது இருப்பின், $T$ என்பது $m$-க்கான ஒரு போதுமான மாதிரி அளவை என்று அழைக்கப்படும்.

ஒரு பொதுவரையறை (General Definition): ஒரு மாதிரியின் நிபந்தனை அடர்த்தி $f(X_1, X_2, \ldots \ldots, X_n; m/T)$ ஆனது $m$-ஐச் சாராமல் இருந்தால் $T$ஐ ஒரு போதுமான மாதிரிஅளவை அல்லது $m$ சுட்டுறுப்புக்கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு எனக் கூறலாம்.

அதாவது, நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $f(X_1, X_2, \ldots X_n; m)$ ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுத முடிந்தால் $T$ ஒரு போதுமான மதிப்பீடாகும்.

$$f(X_1, X_2, \ldots X_n; m) = h(X_1, X_2, \ldots X_n).\ g(T, m)$$

இங்கு $h(X_1, X_2, \ldots X_n)$ என்ற சர்பலன் $m$-ஐச் சாராமல் இருக்குமாயின், '$T$' ஒரு போதுமான மதிப்பீடு ஆகும்.

அதாவது, $m$-க்கு ஏற்றதொரு போதுமான மதிப்பீடு $T$ என்று அமைக்க $f(X_1, \ldots X_n; m) = h(X_1, \ldots X_n).\ g(T, m)$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

**போதுமான புள்ளியல் மாதிரி அளவைகள் (நிறைய சுட்டுறுப்பு வகைகளுக்கு Sufficient Statistics (Multiparameter Case)**

$m$ என்ற ஒரு சுட்டுறுப்புக் பதிலாக, ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் $k$ சுட்டுறுப்புகள் $m_1, m_2, \ldots m_k$ என்று இருந்தால், நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் அல்லது அடர்த்திச் சார்பலனை $f(X; m_1, m_2 \ldots m_k)$ என்று அமைக்கின்றோம். இத்தகையதொரு அடர்த்தியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய ஒரு மாதிரியாக $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்பது இருக்கட்டும். $T_1, T_2, \ldots T_r$ என்பன $r$ மாதிரி அளவைகளாக இருக்கட்டும். இந்த $r$ மாதிரி அளவைகளும் கொடுக்கப்பட்ட நிலையில் $X_1, X_2, \ldots X_n$-ன் நிபந்தனை பரவலானது $m_1, m_2, \ldots X_k$ ஐச் சாராமல் இருப்பின், $m_1, m_2, \ldots m_k$-க்கான போதுமான மாதிரி அளவைகளின் ஒரு தொகுதியே $\{T_1, T_2, \ldots T_r\}$ ஆகும்.

உதாரணம் (i) : $m$ என்ற சராசரியைக் கொண்ட ஒரு பாய்சான் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்த எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரி $r_1, r_2, \ldots r_k$ என்று கொள்க.

இப்போது $T = \Sigma r_i$ என்பது $m$-க்கான ஒரு போதுமான மாதிரி அளவையாகும்.

நிருபணம் :

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்.

$$L = \frac{1}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} e^{-mk} . m^{(r_1+r_2+\ldots+r_k)}$$

$$\text{L} = \frac{1}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} \cdot e^{-mk} \cdot m^{\Sigma r_i}$$

$$= \left[\frac{1}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}\right] \left[e^{-mk} \cdot m^{T}\right]$$

இங்கு $T = \Sigma\, r_i$.

$= h\,(r_1, r_2, \ldots, r_k) \cdot g\,(T, m)$ என்றும் எழுதுகின்றோம்.

இங்கு $h\,(r_1, r_2, \ldots r_k) = \dfrac{1}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$ என்பதால் $h$-சார்பலன் $m$-ஐச் சாராது உள்ள சார்பலனாகும்.

ஆகவே $m$-க்கான போதுமான மதிப்பீடு $T = \Sigma r_i$ ஆகும்.

உதாரணம் (ii) : சராசரி $m$, திட்ட விலக்கம் $\sigma$ என்ற இரு சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற ஒரு ராண்டம் மாதிரி எடுக்கப்படுகின்றது.

$\sigma$-ன் மதிப்பு அறிந்த சமயத்தில், $m$-க்கான போதுமான மதிப்பீடு $T = \bar{X}$ ஆகும்.

**நிருபணம்**

அடர்த்திச் சார்பலன் $X_i$-க்கு

$$f\,(X_i\,;\, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - m)^2}$$

என்பதால், நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் L ஐ

$$\text{L} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}$$

என்று எழுதலாம்.

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - m)]^2}$$

$$\text{ட} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})^2 + (\bar{X}-m)^2 - 2(X_i-\bar{X})(\bar{X}-m)]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})^2 - \frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X}-m)^2}$$

ஏனெனில், $\Sigma(X_i - \bar{X}) = 0$.

$$= \left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right]\left[\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X}-m)^2}\right]$$

$= h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cdot g(T; m)$; இங்கு $T = \bar{X}$. இப்போது $h$ சார்பலன் $m$ஐச் சாராது இருப்பதால், $\sigma$ அறிந்த மதிப்பானபோது, $m$-க்கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு $T = \bar{X}$ ஆகிறது.

**தேற்றம் :** ஒரு சுட்டுறுப்புக்கு ஒரு போதுமான மதிப்பீடு இருந்தால், அது மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டினுடைய சார்பலனாக இருக்கும்.

**நிருபணம் :**

$\theta$-ன் ஒரு போதுமான மதிப்பீடு $T = T(X_1, X_2, \ldots X_n)$ என்றால் நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்

$$\text{ட} = g(T, \theta) \cdot h(X_1, X_2, \ldots X_n/T)$$

இங்கு $g(T, \theta)$ என்பது, $\theta$-க்கான ஓர் அடர்த்திச் சார்பலன் $h(X_1, X_2, \ldots X_n/T)$ என்பது $T$ தரப்பட்டபோது மாதிரியின் அடர்த்திச் சார்பலன்; மேலும் $h$ சார்பலன் $\theta$ஐச் சாராமல் அமைகிறது.

இப்போது $\log \text{ட} = \log g(T, \theta) + \log h(X_1, X_2, \ldots X_n/T)$ $\log$ டஐ $\theta$-க்குப் பகுதி வகைப்படுத்தினால்,

$$\frac{\partial \log \text{ட}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot g(T, \theta)$$

$= k(T, \theta)$ என்று கொள்வோம்.

இங்கு $k$ என்பது $T, \theta$ இவ்விரண்டின் சார்பலனுக மட்டுமே இருக்கும்.

எனவே, மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டைக் கீழ்க் கண்ட விதத்தில் எழுதலாம்.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0 \implies k(T, \theta) = 0.$$

இதைத் தீர்வு கண்டால் $\hat{\theta} = \eta(T) =$ போதுமான மாதிரி அளவையின் ஏதோ ஒரு சார்பலன் ஆகிறது. எனவே, ஒரு சுட்டுறுப்பின் போதுமான மதிப்பீட்டை மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டின் சார்பலனுக எழுதலாம் என்று நிருபணமாகிறது. இந்தத் தேற்றமானது ஒரு போதுமான மதிப்பீடு உள்ளதா இல்லையா என்பதைக் கண்டறியப் பயன்படுகிறது. $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L$ ஐ $T$ என்ற ஒரு மாதிரி அளவை, $\theta$ என்ற சுட்டுறுப்பு இவை இரண்டின் ஒரு சார்பலனுக மட்டுமே எழுத முடியும் என்ருல் அந்த மாதிரி அளவையை, சுட்டுறுப்பிற்கான போதுமான மதிப்பீடாக எடுத்துக் கொள்கின்ருேம். $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L$ ஐ இவ்வாறு $T$, $\theta$-ன் சார்பலனுக மட்டுமே எழுத முடியாவிட்டால், போதுமான மதிப்பீடு (என்ற மாதிரி அளவை) இல்லை என்று கொள்கிருேம்.

உதாரணம் : பாய்சான் பரவலின் சுட்டுறுப்பு $\lambda$-க்கான மதிப்பீட்டைக் காண்கையில், மாதிரி சராசரி $\bar{X}$, என்பது $\lambda$-க்கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு ஆகிறது.

தீர்வு : $\lambda$ சுட்டுறுப்பைக் கொண்ட பாய்சான் பரவலின் நிகழ் தகவுச் சார்பலன்

$$P(X = x) = f(x; \lambda).$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}, \quad 0 < x < \infty$$

நிகழ் தகவுச் சார்பலன் $L = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \lambda)$

$$= \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\Sigma X_i}}{X_1!\, X_2! \dots X_n!}$$

$$\log L = -n\lambda + n\bar{X}\log\lambda - \sum_{i=1}^{n} \log(X_i!)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L = -n + \frac{n\bar{X}}{\lambda}.$$

$$= n\left(\frac{\bar{X}}{\lambda} - 1\right)$$

$$= \psi(\bar{X}, \lambda)$$

இங்கு $\psi$ சார்பலன் $\bar{X}$, $\lambda$ இவற்றின் சார்பலனாக மட்டுமே உள்ளது. எனவே, $\lambda$ ஐ மதிப்பீடு செய்யக் கூடிய ஒரு போதுமான மதிப்பீடாக $\bar{X}$ உள்ளது என்று நிரூபிக்கப்படுகின்றது.

உதாரணம் : $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பன கீழே வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X;\theta)$ கொண்ட பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரி எனக் கொள்வோம்.

$$f(X;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}: \quad x = 0, 1; \quad 0>\theta<1$$

$= 0$, மற்ற இடங்களில் எல்லா

இப்போது $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ என்பது $\theta$-க்கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு என்று நிரூபி.

$Y$-ன் நிகழ்தகவு அடர்திச் சார்பலன்

$$g(Y;\theta) = \frac{n!}{y!(n-y)!}\cdot\theta^y(1-\theta)^{n-y},$$

$$y = 0, 1, 2, \ldots n.$$

$= 0$, மற்ற இடங்களில்

எனவே, $X_1, X_2, \ldots X_n$ இவற்றின் இணைந்த நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலனைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்:

$$\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1}\cdot\theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2}\ldots\ldots\theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$

$$= \theta^{\Sigma X_i}(1-\theta)^{n-\Sigma X_i}$$

$$= g\,[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n); \theta.$$
$$\left\{\frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)!\ [n - (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)]!}{n!}\right\}$$

எனவே, பிஷர்-நேமன் நியதிப்படி $Y = \Sigma X_i$ என்பது $\theta$-க்கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு ஆகின்றது.

## பயிற்சிகள்

1. கீழ்க்கண்ட மதிப்பீட்டுக் குணப்பண்புகளைத் தக்க உதாரணத்துடன் விளக்குக.

(i) கொள்கை மாரு மதிப்பீடு.

(ii) நடுநிலை மாருத மதிப்பீடு.

(iii) திறமை மிக்க மதிப்பீடு.

(vi) போதுமான மதிப்பீடு.

2. மாதிரிச் சராசரி $\bar{X}$-ம், மாதிரி விகிதம் $p$-ம் ஏன்

(a) ஒரு கொள்கை மாருத,

(b) ஒரு நடுநிலை பிறழாத,

(c) ஒரு திறமை வாய்ந்த,

(d) ஒரு போதுமான மதிப்பீடாக உள்ளது என்பதனை விளக்கிடுக.

3. ஒரு சுட்டுறுப்பின் மதிப்பீடு சிறந்தது என்று எப்போது கூறுவாய்? குறிப்பாக, ஒருமதிப்பீட்டின் நடுநிலை மாருதத்தன்மையினையும், கொள்கைமாருத தன்மையினையும் விளக்கிக் காட்டிடுக. ஒரு கொள்கை மாருத மதிப்பீடு, ஒரு நடுநிலை மாருத மதிப்பீடாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை என்பதனை உதாரணத்தின் மூலம் நிருபிக்கவும்.

4. ஒரு நடுநிலை மாருத மதிப்பீடானது அதன் மாறுபாடு பூஜ்யத்தை நோக்கிச் செல்லும் போது (மாதிரி அளவு மிக மிகப் பெரியதாகும் போது), ஒரு கொள்கை மாருத மதிப்பீடாகிறது என்று காட்டுக.

5. $\theta$ என்ற சுட்டுறுப்புக்கான நடுநிலை மாருத ஒரு மதிப்பீடு $T$ என்ருல், $\lambda_1$, $\lambda_2$ இரண்டும் அறிந்த மாறிலிகள் என்ருல், $\lambda_1\theta+\lambda_2$-க்கான ஒரு நடு நிலை மாருத மதிப்பீடு $\lambda_1 T + \lambda_2$

என்று நிரூபி. மேலும் $T^2$ என்பது $\theta^2$-க்கான ஒரு நடு நிலையற்ற மதிப்பீடு என்றும் நிரூபிக்கவும்.

6. ஒரு பாய்சான் சுட்டுறுப்பு $\theta$-க்கு $\frac{1}{X}$ என்பது $\frac{1}{\theta}$-க்கான ஒரு கெள்கை மாருத மதிப்பீடு என்று காண்பி.

7. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(X;\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{X}{\theta}} \qquad \begin{array}{l} 0 < X < \infty \\ 0 < \theta < \infty \end{array}$$

$= 0$, மற்ற இடங்களில் எல்லாம்

என்றவாருன பரவலிலிருந்து $n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் சராசரி $\bar{X}$ ஆனது, $\theta$-க்கான ஒரு நடுநிலைமாருத மதிப்பீடு என்று நிரூபி, அச்சராசரியின் மாறுபாடு $\frac{\theta^2}{n}$ என்றும் நிரூபி

8. $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற ஒரு ராண்டம் மாதிரி, $N(0, \theta)$ $0 < \theta < \infty$ என்ற இயல் நிலைப்பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகும். இப்போது $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ என்பது $\theta$-க் கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு என்று நிரூபி.

9. ஓர் இயல் நிலைப்பரவல் $N(\theta, \sigma^2)$விருந்து, $0 < \theta < \infty$, எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் சராசரி, ஒவ்வொரு நிலைத்த $\sigma^2 > 0$-க்கும், $\theta$-க்கான ஒரு திறமை வாய்ந்த மதிப்பீடு என்று காட்டுக.

10. $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$ எனும் போது நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(X;\theta) = \frac{1}{\pi\,[1 + (X-\theta)^2]}$$ என்ருல்,

ராவ்-கிரேமர் கீழ் எல்லை $= \frac{2}{n}$ என்று நிரூபி.

(கோஷி பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் அளவு $= n$ ஆகும்.

11. ராண்டம் மாறி $X$ ஆனது $\theta$, $1-\theta$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் முறையே 0, மதிப்புகளை எடுத்துக்கொள்கிறது என்றால் $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற தனித்த மாறி மதிப்புகளுக்கு

$\xi = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ என்றால்,

$\frac{\xi\,(n-\xi)}{n\,(n-1)}$ என்பது $\theta\,(1-\theta)$-க்கான ஒரு நடுநிலை மாறாத மதிப்பீடு என்று நிரூபித்துக் காட்டுக.

12. $f(X;\theta) = \theta\,(1-\theta)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$
$0 < \theta < 1$

என்ற ஜியோமிதிப் பரவலுக்கு $\frac{1}{\theta}$-க்கான ஒரு நடுநிலை மாறாத மதிப்பீட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

13. $n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியைச் சார்ந்த $\theta$ என்ற சுட்டுறுப்புக்கான ஒரு நடுநிலையற்ற மதிப்பீடு (ஒரு புறச் சாய்வான மதிப்பீடு) $t_n$ என்றால், $E(t_n) = \theta + b_n$ என்றால், $b_n \to 0$. மேலும் $V(t_n) \to 0$, $n \to \infty$ எனும்போது என்றால், $\theta$-க்கான கொள்கை மாறாத மதிப்பீடாக $t_n$ உள்ளது என்று நிரூபித்துக்காட்டு.

14. (a) ஒரு போதுமான மதிப்பீடு என்றால் என்ன? உதாரணத்துடன் விளக்குக.

(b) $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற ஒரு ராண்டம் மாதிரியானது

$f(X;\theta) = \theta^{x}\,(1-\theta)^{1-x}$; $x = 0, 1$ $0 < \theta < 1$
$= 0$ மற்ற இடங்களில் எல்லாம்

என்ற பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

$Y_1 = X_1 + X_2 + \ldots \times X_n$ என்பது $\theta$-க்கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு என்று காண்பி.

15. $f(x:p.\alpha) = \frac{\alpha p}{\Gamma(p)} \cdot e^{-\alpha x} \cdot x^{p-1}, x > 0$

என்ற பரவலுக்கு $\alpha$-க்கான ஒரு போதுமான மதிப்பீடு கிடைக்கிறதா என்று ஆராய்க.

# 3. மதிப்பீட்டு முறைகள்

## (Methods of Estimation)

மதிப்பீட்டு முறைகள் மொத்தம் நான்கு ஆகும். அவை யாவன :

(i) திருப்பு திறன்களின் முறை (Method of Moments)

(ii) மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of Least Squares)

(iii) மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறை (Method of Maximum Likelihood)

(iv) மீச்சிறு கை-வர்க்க முறை (Method of Minimum $X^2$.)

இப்போது ஒவ்வொரு முறையாக நாம் கவனிப்போம்.

### 3.1 திருப்பு திறன்களின் முறை : (Method of Moments)

ஒரு பரவல் $f_1, f_2, \ldots, f_k$ என்ற $k$ சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்டு அமைவதாகக் கொள்வோம்.

முழுமைத் தொகுதிக்கான $r$-வது திருப்புதிறனை ... $\mu'_r$ என்றும் மாதிரிக்மான $r$-வது திருப்புதிறனை ... $m'r$ என்றும் குறிப் போம். இந்த முறையின்படி, $f_1, f_2, \ldots f_k$-க்கான மதிப்பீடுகளை, $m'r = \mu'r.\ r = 1, 2, 3, \ldots k$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டு, அடையப் பெறலாம். ஆனால், இந்தச் சமன்பாடுகள் சார்பலன்களில் சாராதவாறு (functionally independent); இருத்தல்வேண்டும். எனவே, $f_1, f_2, f_k$ இவற்றின் மதிப்பீடுகள் $m'_1, m'_2, \ldots m'_k$ என்ற முதல் $k$ மாதிரி திருப்புதிறன்களின் சார் பலன்களாகின்றன.

இம் முறையினால் கிடைக்கப்பெறும் மதிப்பீடுகள் கீழ்க்கண்ட குணப் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளன :

சில நிபந்தனைகளின் கீழ், இந்த மதிப்பீடுகள்.

(i) கொள்கை மாறுத் தன்மையுடையவை.

(ii) பெரும் போக்கில் இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்து அமைகின்றன.

(iii) பெரும்பாலும், திறம்வாய்ந்த மதிப்பீடுகள் அல்ல என்று நிரூபிக்கலாம்.

உதாரணம் : லாக்-நார்மல் பரவல் (Log Normal Distribution)

சராசரி $m$, திட்டவிலக்கம் $\sigma$ எனும் சுட்டுருப்புகளைக் கொண்டு $Y = \log X$ ஒரு இயல் நிலைப்பரவலில் அமைவதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, $X$ என்பது ஒரு லாக்-நார்மல் (Log Normal) பரவலில் அமைகின்றது என்று அர்த்தமாகிறது.

இப்போது $Z = \dfrac{y-m}{\sigma}$ என்று இருக்கட்டும்.

$$Y = \log X.$$

எனவே, $X = e^{y}$.

மேலும் $Z = \dfrac{y-m}{\sigma}$ என்பதால் $y = m + \sigma z$ ஆகிறது.

எனவே, $X = e^{y} = e^{m+\sigma z}$

$$\therefore \quad X^{r} = e^{ry} = e^{rm + r\sigma z}$$

இப்போது $m_r' = E(X^r) = E\left[\, e^{rm+r\sigma z}\right]$

$$= e^{rm} \cdot E\left(e^{r\sigma z}\right)$$

$$= e^{rm} \cdot e^{\frac{r^2\sigma^2}{2}}$$ ; ஏனெனில் $Z \cap N$ (0, 1),

$$= e^{rm + \frac{\sigma^2 r^2}{2}}$$ ஆகும்.

$r = 1$ என்றால், $E(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$

$r = 2$ என்றால், $E(X^2) = e^{2m + 2\sigma^2}$

எனவே, $X$-ன் மாறுபாடு $= Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2}$$

$$= e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

மேலும், $E(X) = \bar{X} = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$

எனவே, $\bar{X} = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$

$$s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2$$

$$= e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்வு கண்டால், $m, \sigma$ இவற்றின் மதிப்பீட்டைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மாதிரியின் மாறுபாட்டுக்கெழு (Coefficient of Variation)

$V = \frac{s}{\bar{X}}$ என்பதால்,

$$V^2 = \frac{s^2}{\bar{X}^2} = \frac{e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)}{e^{2m+\sigma^2}}$$

$= (e^{\sigma^2} - 1)$ ஆகும்.

ஆகையால், $1 + V^2 = e^{\sigma^2}$

அல்லது $\sigma^2 = \log_e(1 + V^2)$ ... (1)

மேலும், $\bar{X} = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$ என்பதால்

$$\log_e \bar{X} = m + \frac{\sigma^2}{2}$$

அல்லது $m = \log_e X - \frac{\sigma^2}{2}$ ... (2)

ஆதலால், $\bar{X}$, $s^2$ என்ம் முதல் இரண்டு திருப்புத் திறன்களைக் (moments) கொண்டும்பிறகு $V$ஐ உபயோகித்தும், நாம் $m$, $\sigma$ இரண்டு சுட்டுறுப்புகளின்மதிப்பீட்டைக் கண்டு பிடிக்கின்றோம்.

உதாரணம் : (i) ஒரு லாக்-நார்மல் பரவலைச் சார்ந்த ஒரு மாதிரி ஆய்வில் கிடைத்த மதிப்புகள் : $\bar{X} = 25$ ரூபாய்கள்; $V = 80\%$ என்றால், திறன்களின் முறையைப் பயன்படுத்தி $m$, $\sigma$ இரண்டு சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பீடுகளைக் கண்டுபிடி.

இங்கு $\bar{X} = 25$

$V = 0{\cdot}80$ என்பதால்

$$\hat{\sigma}^2 = \log_e (1 + V^2)$$
$$= \log_e (1{\cdot}64) = \log_{10} (1{\cdot}64) . \log_e 10.$$
$$= 2{\cdot}3026 [\log_{10} (1{\cdot}64)]$$
$$= 0{\cdot}494696.$$

$$\therefore \hat{\sigma} = 0{\cdot}7034 \text{ ஆகும்.}$$

$$\hat{m} = \log_e \bar{X} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}$$
$$= \log_e (25) - \frac{0{\cdot}494696}{2}$$
$$= 2{\cdot}3026 \log_{10} (25) - 0{\cdot}247348$$
$$= 2{\cdot}96815.$$

எனவே, $m$, $\sigma$ என்ற இரு சுட்டுறுப்புக்களின் திருப்புத்திறன் முறை—மதிப்பீடுகள் : $\hat{m} = 2{\cdot}96815$.

$\hat{\sigma} = 0{\cdot}7034$ ஆகும்.

இங்கு $\bar{X}$, $V$ மதிப்புகளுக்குப் பதிலாக, மாதிரி மாறிகளின் மதிப்புகள் தரப்பட்டிருந்தால், அவற்றைக் கொண்டு, $\bar{X}$, $s^2$ இவற்றின் மதிப்பினைச் சாதாரண முறையில் கண்டுபிடித்துப் பிறகு $V^2$ஐக் கணக்கிட்டு. அதன் பின்னர் மேற்கண்டவாறு தீர்வு காணவேண்டும்.

(ii) $X \cap N(m, \sigma)$ என்றால்,

$X$ மாறி $m$, $\sigma$ சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப் பரவலில் அமைகிறது என்று கொள்ளலாம்.

இப்போது $E(X) = m$

$$E(X^2) = \left[ \frac{1}{n} \Sigma X_i^2 \right]$$
$$= m^2 + \sigma^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n} \Sigma X_i^2 - X^2 = \sigma^2.$$

$X = m$ என்பன மதிப்பீடுகளாகும்.

அதாவது, $\hat{m} = X$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \Sigma X_i^2 - X^2 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $X$ ஒரு நடு நிலைமாறுத மதிப்பீடு; ஆனால், $s^2$ ஒரு நடு நிலையற்றமதிப்பீடு (biased estimate); அதேசமயத்தில் கொள்கை மாறுத மதிப்பீடு ஆகும்.

(iii) திறன் முறையினைப்பயன்படுத்திக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பியர்சன் IIIஆம் வகைப்பரவலுக்கான $\alpha, \beta$ இரு சுட்டுறுப்பின் மதிப்பீடுகளைக் கணிக்கவும் :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} \quad , > x < \infty$$

தீர்வு : பியர்சன் IIIஆம் வகைப் பரவலுக்கு

$$\mu'_r = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} x^r \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} \cdot dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} x^{\alpha+r-1} e^{-\beta x} \, dx.$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\beta^{\alpha+r}} = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^r}.$$

$r = 1$

$$\therefore \quad \mu'_1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha).\beta} = \frac{\alpha.\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha).\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$r = 2; \quad \mu'_2 = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha).\beta^2} = \frac{(\alpha+1).\alpha.\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha).\beta^2}$$

$$= \frac{(\alpha+1).\alpha}{\beta^2}.$$

எனவே, $\frac{\mu'_2}{\mu'^2_1} = \frac{(\alpha+1).\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

அல்லது $\frac{\mu'_2}{\mu'^2_1} - 1 = \frac{1}{\alpha}.$

$$\frac{\mu'_2 - \mu'^2_1}{\mu'^2_1} = \frac{1}{\alpha}.$$

ஆதலால், $\alpha = \frac{\mu'^2_1}{\mu'_2 - \mu'^2_1}$ ஆகும்.

மேலும் $\beta = \frac{\alpha}{\mu'_1}$

$= \frac{\mu'^2_1}{(\mu'_2 - \mu'^2_1)} \cdot \frac{1}{\mu'_1} = \frac{\mu'_1}{\mu'_2 - \mu'^2_1}$ ஆகிறது.

எனவே, $\alpha, \beta$-ன் மதிப்பீடுகளை $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$\hat{\alpha} = \frac{m'^2_1}{m'_2 - m'^2_1}$$

$\hat{\beta} = \frac{m'^2_1}{m'_2 - m'^2_1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

இங்கு $m'_r$ மாதிரிக்கான திறனைக் குறிக்கும். அதாவது, மாதிரி மதிப்புகளிலிருந்து முதல் இரண்டு திருப்புத் திறன்களையும் பயன்படுத்தி $\alpha, \beta$-ன் மதிப்பீடுகளைக் கணிக்கின்றோம்.

### 3·2 மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறை (Maximum Likelihood Method :

$X$ என்ற ஒரு ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ என்று இருக்கட்டும். $m_1, m_2, \ldots m_k$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் $k$ சுட்டுறுப்புகளாகும். இத்தகைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $\{X_1 . X_2, \ldots X_n\}$ என்ற $n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியினைக் கவனிப்போம். இங்கு $m_1, m_2, \ldots m_k$ என்ற $k$ சுட்டுறுப்புகளையும் மதிப்பீடு செய்தல் வேண்டும்.

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $\text{ட} = \text{ட}\,(m_1, m_2, \ldots m_k)$ என்றால்

$$\text{ட} = \text{ட}\,(m_1, m_2, \ldots, m_k)$$

$$= f(X_1, X_2, \ldots X_n; m_1, m_2, \ldots m_k).$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(X_i; m_1, m_2, \ldots m_k);$$ ஏனெனில், $X_i$ மாறிகள் தற்சார்பற்றவையாகும். இந்த நிகழும் தன்மைச் சார்பலனை மீப்பெருமப்படுத்தக்கூடிய $m_i$-ன் மதிப்புகளைச் சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பீடுகளாக எடுத்துக் கொள்ளக்கூடிய முறையினை மிப்பெரு நிகழும் தன்மை முறை என்று நாம் அழைக்கின்றோம்.

டஐ மீப்பெருமப்படுத்துவதற்குப்பதில் log ட சார்பலனை நாம் பெரும்பாலும் எடுத்துக்கொண்டு மீப்பெருமப் படுத்துகின்றோம். ட மீப்பெருமமானால் log டம் மீப்பெருமமாகும். ட சார்பலனை வகைப்படுத்துவது கொஞ்சம் சிரமமானதாலும், Rog ட சார்பலனை வகைப்படுத்துவது சுலபமானது என்பதாலும், logடஐ வகைப்படுத்துகின்றோம்.

மீப்பெரு ட = மீப்பெரு log ட என்பதை நிருபிக்க, ட-ன் $m$க்கான முதல் இரண்டு வகையீட்டுக்கெழுக்களை

$\dfrac{d\,\text{ட}}{d\,m}, \dfrac{d^2\,\text{ட}}{dm^2}$ என எழுதுகிறோம்.

நிகழ் தன்மைச் சார்பலன் $\dfrac{d\,\text{ட}}{d\,m} = 0$ ஆகும்.

இப்போது log ட-ன் $m$க்கான நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்

$\dfrac{d \log \text{ட}}{d\,m} = 0$ ஆகும்.

மேலும் $\frac{d \log L}{dm} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dm}$ என்பதாலும் $\frac{dL}{dm} = 0$ என்பதாலும்

$$\frac{d \log L}{dm} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dm} = 0$$

அதாவது $\frac{dL}{dm} = 0 \Longrightarrow \frac{d \log L}{dm} = 0$ என்பதைக் குறிக்

எனவே, L ஐ மீப் பெருமமாக்க, log L ஐ மீப் பெருமமாக்கு கிறோம்.

எனவே, சுட்டுறுப்புகள் $m_1, m_2, \ldots m_k$ஐப் பொறுத்தவாறு நிகழும் தன்மைச் சார்பலனின் இலாகிரதத்தை பகுதி வகைப் படுத்தினால், அந்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் (Partial Derivatives) $\phi_j$ என்று கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கப்படுகின்றன.

$$\phi_j = \frac{\partial \log L}{\partial m_j}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots k$$

இந்த $\phi_j$-க்களை திறன் வாய்ந்த மதிப்புகள் (efficient scores) என்று அழைக்கின்றோம்.

$$\log L = \log \left[ \prod_{i=1}^{n} f(X_i; m_1, m_2, \ldots m_k) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i; m_1, m_2, \ldots m_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i)$$ என்றும் சுருக்கமாக அழைக்கலாம்.

எனவே,

$$\phi_j = \frac{\partial \log L}{\partial m_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(X_i)}{\partial m_j} \qquad j = 1, 2, \ldots k$$

என்றும் எழுதலாம்.

இந்த $\phi_j$-க்களும் $m_1, m_2, \ldots m_k$-ன் சார்பலன்கள். அதாவது, $\phi_j = \phi_j(m_1, m_2, \ldots m_k)$ ஆகும்.

இந்தத்திறன் வாய்ந்த மதிப்புகளை பூஜ்யத்துக்குச் சமன் படுத்தினால், மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள் கிடைக்கப் பெறுகின்றன.

அதாவது, $\phi_j(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots k$
எனவே, நமக்கு $k$ மாறிகளில் $k$ சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$\phi_1(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 0.$$
$$\phi_2(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 0.$$
$$\phi_3(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 0.$$
$$\phi_k(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 0.$$

(இங்கு $m_1, m_2, \ldots m_k$ என்பன $k$ மாறிகள் ஆகும்)

இத் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு கண்டால், $m_1, m_2, \ldots m_k$-க்கான மதிப்புகள் கிடைக்கப் பெறும். இவற்றையே நாம் மீப்பெரும் நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள் (Maximum Likelihood Estlmates or MLE'S) என்று அழைக்கிறோம். இந்த $\phi_j(m_1, \ldots m_k) = 0$, $j = 1, 2, \ldots k$ என்ற $k$ சமன்பாடுகளையும் நிகழும் தன்மைச் சமன்பாடுகள் (Likelihood Equations) என்று கூறுகிறோம்.

ஒரு சுட்டுருப்பு வகை (Single parameter case):

$m_1, m_2, \ldots m_k$ என்பதற்குப் பதிலாக m என்ற ஒரேஒரு சுட்டுருப்பு உள்ள பரவலை அல்லது முழுமைத் தொகுதியினை நாம் கவனிப்போம்.

இங்குத் திறன் வாய்ந்த மதிப்பு = $\phi(m)$

$$\phi(m) = \frac{d \log L}{dm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d \log f(X_i; m)}{dm} \text{ ஆகும்.}$$

நிகழும் தன்மைச் சமன்பாடு $\phi(m)=0$ ஆகும்.

$$\text{அதாவது, } \phi(m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d \log f(X_i; m)}{dm} = 0$$

இங்கு ஒரே ஒரு சமன்பாடு உள்ளது. இதைத் தீர்வு கண்டால் m-ன் மதிப்புக் கிடைக்கிறது. இந்த மதிப்புதான் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடாகிறது.

$g(m)$ என்ற ஒரு சார்பலனை இப்போது வரையறுப்போம்.

பக்கம் 64-ல் ''ராவ்-கிராமர் கீழ் எல்லை''த் தேற்றத்தில் $i(\theta)$ஐ வரையறுத்துள்ளோம்.

இங்கு $i(\theta)$-க்குப் பதிலாக $i(m)$ என்று குறிப்பிடப்பட்டு $g(m) = n\, i(m)$ என்ற சார்பலன் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$i(m)$ என்பது ஒவ்வொரு அலகு மதிப்புக்கான விவரம் (செய்தி) என்றால் 64-வது பக்கத்தில் குறித்தபடி எழுதினால்,

$$g(m) = n.\, i(m)$$

அதாவது,

$$g(m) = -\, n.\, E\left[\frac{d^2 \log f}{d_{m^2}}\right]$$

$$= -\, E\left[\frac{d^2 \log L}{d_{m^2}}\right] \text{ ஆகும்.}$$

நிகழும் தன்மைச் சமன்பாட்டினை நேரடியாகத் தீர்வு காண முடியாத சில சமயங்களில், திரும்பத் திரும்பச் செய்முறைகள் (Iterative Methods) பயன்படுகின்றன. ஆரம்ப தீர்வு $m_0$ என்று ஏதோ ஒரு தீர்வினை எடுத்துக்கொண்டு $m_1$ என்ற இரண்டாவது தோராய மதிப்பினைக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கண்டறியலாம்.

$$m_1 = m_0 + \frac{\phi(m_0)}{g(m_0)}.$$

$\phi(m_0)$, $g(m_0)$ என்பன $\phi(m)$, $g(m)$ என்பனவற்றில் $m = m_0$ என்ற மதிப்பிற்கான மதிப்புகள் பிறகு மூன்றாவது தோராய மதிப்பீடு $m_2$ என்றால்,

$$m_2 = m_1 = \frac{\phi(m_1)}{g(m_1)} \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வாறு திரும்பத் திரும்பச் செய்தால் எந்த அடுத்தடுத்த இரண்டு $m$ மதிப்புகள் கிட்டத்தட்ட ஒரே அளவில் வருகின்றனவோ அதுவரை இம்முறையினைக் கடைப்பிடித்துக் கடைசி தோராய மதிப்பினை $m$-ன் மதிப்பீடாகக் கொள்ளவேண்டும்.

**மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளின் குணப்பண்புகள்**
(Properties of Maximum Likelihood Estimators) :

(ii) ஒரு சுட்டுறுப்பு : சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளின்படி $\hat{m}$ என்ற மதிப்பீடு $m$ சராசரியையும், $\frac{1}{g(m)}$ என்ற மாறுபாட்டினையும் கொண்டு ஒரு கடைசி நிலைமையிலான (asymptotically) இயல் நிலைப்பரவலில் அமைந்துள்ளது. (normally distributed)

பல சுட்டுறுப்புகள் : $(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots \hat{m}_k)$ என்ற நிரையிலியானது (vector) $(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots \hat{m}_k)$ என்ற சராசரி நிரையிலியையும், $[[g^{rs}]]$ என்ற மாறுபாட்டு அணியையும் (dispersion matrix)

(இங்கு $g_{rs} = E[\phi_r \phi_s]$

$$= -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial m_r \cdot \partial m_s}\right]$$ என்றால்

$[[g^{rs}]] = [[g_{rs}]]^{-1}$ ஆகும்.

$$[[g_{rs}]] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$ என்றால்

$[[g_{rs}]]$-ன் நேர் எதிர் அணியை (Inverse matrix of $g_{rs}$) $g^{rs}$ என்று குறிக்கிறோம்.

அதாவது $[[g^{rs}]] = [[g_{rs}]]^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

இங்கு $g^{11}$ என்பது $g_{11}$ என்ற மூலகத்தின் (element) நேர் எதிராகும்.

அதாவது $g^{11} = g_{11}^{-1}$ ஆகிறது.

இதேபோன்று மற்ற மூலகங்களுக்கும் $g^{rs} = g_{rs}^{-1}$ என்பது பொருந்தும்.

(1) $r$ கொண்டு ஒரு கடைசி நிலைமையிலான (asymptotic) இயல் நிலைப் பரவலில் அமைகின்றது.

(2) இம்மதிப்பீடுகள் கடைசி நிலைமையிலான மிகவும் திறன் வாய்ந்த மதிப்பீடுகள் (asymptotically most efficient estimators) ஆகும்.

(3) இவை கொள்கை மாரு மதிப்பீடுகள் (consistent estimates) ஆகும்.

(4) $ML$ மதிப்பீடுகள் மீச்சிறு போதுமான மாதிரி அளவை களின் சார்பலன்களாக (function of minimal sufficient statistics) உள்ளன.

(5) இவைகளை எப்போதுமே நடுநிலை மாருத மதிப்பீடுகள் என்று கூற இயலாது.

(6) மாருத குணப்பண்பினை (Property of Invariance) இம் மதிப்பீடுகள் பெற்றுள்ளன. அதாவது, $m$-க்கான மீப் பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு $\hat{m}$ என்ருல், $g(m) \neq 0$ என்றவாறு $g(m)$ என்பது $m$-ன் சார்பலனுனல், $g(m)$-ன் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு $g(\hat{m})$ ஆகும்.

உதாரணங்கள் :

(i) $X_1, X_2, \ldots X_k$) என்பன ஈருறுப்புப் பரவலில் அமைந்த மாறிகளானுல் $X_i \cap B(n_i, p)$ என்ருல்

$n_i$ முயற்சிகளில் $X_i$ வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவு $p$ ஆகும்.

மேலும் $T = \sum_{i=1}^{k} X_i$ என்றும்

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ என்றும் கொள்க.

$X_i$ மாறிகள் தற்சார்பற்றவையாகும்.

இப்போது நிகழும் தன்மைச் சார்பலனின் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$L = \prod_{i=1}^{k}\left[\binom{n_i}{X_i} p^{X_i} \cdot q^{n_i - X_i.}\right]$$

$$= \binom{n_1}{X_1} \cdot \binom{n_2}{X_2} \cdots \binom{n_k}{X_k}$$

$$\cdot p^{X_1+X_2+\ldots+X_k} \cdot q^{(n_1-X_1)+(n_2-X_2)+\ldots+\binom{n-X}{X_k}}$$

$$= c \cdot p^{\sum_{i=1}^{k} X_i} \cdot q^{\sum_{i=1}^{k} (n_i - X_i)}.$$

இங்கு $c$ என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

$L = c \cdot p^{T} \cdot q^{n-T}$; ஏனெனில், $\Sigma X_i = T$; $\Sigma n_i = n$.

எனவே, $\log L = c_1 + T \log p + (n-T) \log (1-p)$

$(\because \ q = 1 - p)$

[இங்கு $c_1$ ஒரு மாறிலி; $c_1 = \log c$]

இப்போது $\log L$ சமன்பாட்டினை $p$ஐப் பொறுத்து வகைப் படுத்தினல்,

$$\frac{d \log L}{dp} = \frac{T}{p} - \frac{(n-T)}{(1-p)}$$

$\log L$ மீப்பெருமமாக இருக்கவேண்டுமானல்,

(i) $\dfrac{d \log L}{dm} = 0$ $\quad m = m_0$ எனும்போது

(ii) $\dfrac{d^2 \log L}{dm^2} < 0$ $\quad m = m_0$ எனும்போது

$\dfrac{d \log L}{dm} = 0$ என்பது தேவையானதொரு நிபந்தனை

(necessary condition)

$\left[\dfrac{d^2 \log L}{dm^2}\right]_{m=m_0} < 0$ என்பது போதுமான ஓர் நிபந்தனை

(sufficient condition)

எல்லாக் கணக்குகளிலும் போதுமான நிபந்தனை சரியாக இருக்கும் என்ற அனுமானத்தில் பெரும்பாலும் இதைக் கணக்கிடுவதில்லை. தேவையான நிபந்தனையை மட்டுமே கணித்து அதன் மூலம் தீர்வு பெரும்பாலும் காணப்படுகின்றது.

இங்கு $\frac{d \log L}{dp} = 0$ என்றால்

$$\frac{d \log L}{dp} = \frac{T}{p} - \frac{n-T}{1-p} = 0$$

அதாவது, $\frac{T}{p} = \frac{n-T}{1-p}$.

$$(1-p)T = (n-T)\,p.$$
$$T = n\,p.$$

அதாவது, $p = \frac{T}{n}$

எனவே, $\hat{p} = \frac{T}{n}$ ஆகிறது.

இப்போது $\frac{d^2 \log L}{dp^2} = \frac{d}{dp}\left(\frac{d \log L}{dp}\right)$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{T}{p} - \frac{n-T}{1-p}\right]$$

$$= \left[-\frac{T}{p^2} + \frac{(n-T)}{(1-p)^2}(-1)\right]$$

$$= -\left[\frac{T}{p^2} + \frac{n-T}{(1-p)^2}\right]$$

இங்கு,

$$\left[\frac{d^2 \log L}{dp^2}\right]_{p=\hat{p}=\frac{T}{n}} = -\left[\frac{T}{\left(\frac{T}{n}\right)^2} + \frac{n-T}{\left(1-\frac{T}{n}\right)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{n^2}{T} + \frac{(n-T).\,n^2}{(n-T)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{n^2}{T} + \frac{n^2}{(n-T)}\right]$$

$n = \Sigma n_i \; T = \Sigma X_i$ என்பதால் $n-T > 0$ ஆகும்.

எனவே, $\left[\dfrac{d^2 \log L}{dp^2}\right] = -\left[\dfrac{n^2}{T} + \dfrac{n^2}{n-T}\right] > 0$ ஆகும்.

ஆகையால், $\hat{p} = \dfrac{T}{n}$ என்ற மதிப்பீடு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடாகும்.

(ii) பாய்சான் உதாரணம் : $X_1, X_2, \ldots X_k$ மாறிகள் $X$ சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த ஒரு பாய்சான் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தற்சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளானால், நிகழும் தன்மை சார்பலன்

$$L = L(m) = f(X_1, X_2, \ldots X_k ; m)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} f(X_i ; m)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left[\frac{e^{-m} \cdot m^{X_i}}{X_i!}\right]$$

$$= \frac{1}{X_1!\, X_2! \ldots X_k!} \cdot e^{-mk} \cdot m^{X_1 + X_2 + \ldots + X_k}$$

$T = \Sigma X_i$ ஒன்றால்,

$$L = c \cdot e^{-mk} \cdot m^{T} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $c$ ஒரு மாறிலியாகும்.

$$\log L = c_1 - mk + T \log m$$

இங்கு $c_1$ ஒரு மாறிலியாகும்.

$\log L$ ஐ $m$-க்கு வகைப்படுத்தினால் முதல் வகைக்கெழு

$$\frac{d \log L}{d\,m} = \frac{T}{m} - k$$

இப்போது $\dfrac{d \log L}{d\,m} = 0$ என்றால்

$$\frac{T}{m} - k = 0.$$

$$\text{அல்லது } m = \frac{T}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k}$$

$$= \bar{X}.$$

$$\frac{d^2 \log L}{d m^2} = \frac{d}{d m}\left(\frac{d \log L}{d m}\right)$$

$$= \frac{d}{dm}\left[\frac{T}{m} - k\right]$$

$$= -\frac{T}{m^2}$$

$$\left[\frac{d^2 \log L}{d m^2}\right]_{m=\bar{X}} = -\frac{T}{X^2} < 0.$$ ஏனெனின், $T>0$ ஆகும்.

எனவே, $\hat{m} = \overline{X}$ என்பது பாய்சான் சுட்டுருப்பு $m$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு ஆகும்.

3. இயல் நிலை உதாரணம்: $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்பன சராசரி $m$, மாறுபாடு $\sigma^2$ சுட்டுருப்புகளைக் கொண்டமைந்த ஓர் இயல் நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரி யின் தற்சார்பற்ற மாறிகள் ஆகும்.

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $= L = L(m, \sigma)$

$$L(m, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} [f(X_i; m, \sigma)]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-m)^2}\right]$$

$$L(m, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(X_1-m)^2 + (X_2-m)^2 + \ldots + (X_n-m)^2]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2}$$

$$\log L = n \log \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \Sigma (X_i - m)^2$$

$$= -n \log (\sigma \sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \Sigma (X_i - m)^2$$

$$= -n \log \sigma - n \log (\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (X_i - m)^2$$

$$= c - n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \Sigma (X_i - m^2)$$

இங்கு $c = -n \log \sqrt{2\pi}$ ஒரு மாறிலியாகும்.

இந்த $\log L$ சார்பலன் இரு சுட்டுறுப்புகளின் சார்பலனாகை தால், பகுதி வகைப்படுத்தவேண்டும்.

முதலில் $m$-க்குப் பகுதி வகைப்படுத்தினால் $-n \log \sigma$ஐயும் ஒரு மாறிலியாகவே கருதவேண்டும்.

$$\therefore \frac{\partial \log L}{\partial m} = 0 - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \Sigma\, 2\,(X_i - m)\,(-1).$$

எனவே, நிகழும் தன்மைச் சமன்பாடு $\frac{\partial \log L}{\partial m} = 0$ என்று எழுதினால்

$$\frac{\partial \log L}{\partial m} = -\frac{1}{2\sigma^2} \Sigma (-2)(X_i - m) = 0$$

அல்லது $\frac{1}{\sigma^2} \Sigma (X_i - m) = 0$

அல்லது $\sum_{i=1}^{n} (X_i - m) = 0.$

அதாவது $n\bar{X} - nm = 0$

$$\therefore \bar{X} = m.$$

இப்போது $\frac{\partial^2 \log L}{\partial m^2} = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma (-1) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0.$

எனவே, $\hat{m} = \bar{X}$ என்பது $m$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடாகும்.

இப்போது $\sigma$ சுட்டுருப்பைக் கவனிப்போம்.

$\log L = C - n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2}(X_i - m)^2$ என்று முன்பே பார்த்தோம். இப்போது $\log L$ சார்பலனை $\sigma$-க்குப் பகுதி வகைப்படுத்தினால்,

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{2}{2\sigma^3}\Sigma(X_i - m)^2 \text{ ஆகிறது.}$$

$$= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\Sigma(X_i - m)^2$$

நிகழும் தன்மைச் சமன்பாடு $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0$ என்றால்

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\Sigma(X_i - m)^2 = 0$$

அதாவது, $\frac{n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^3}\Sigma(X_i - m)^2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - m)^2$$

$m$-க்குப் பதில் $\hat{m} = \bar{X}$ என்று சமனிட்டால்

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - \hat{m})^2$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2 \text{ ஆகிறது.}$$

மேலும்,

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\Sigma(X_i - m)^2$$

$$\therefore \left[\frac{\partial^2 \log L}{\sigma\, \partial^2}\right]_{\hat{m}=\hat{X}} = \frac{n}{\frac{1}{n}\Sigma(X_i - X)^2} - \frac{3\,[\Sigma(X_i - X)^2]}{\left(\frac{1}{n}\right)^2[\Sigma(X_i - X)^2]}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - X)^2$$

$$= \frac{n^2}{\Sigma(X_i - X)^2} - \frac{3n^2}{\Sigma(X_i - X)^2}$$

$$= -\frac{2n^2}{\Sigma(X_i - X)^2} < 0 \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே, $\hat{m} = \bar{X}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - X)^2$ என்பன $m$, $\sigma^2$ இரண்டு சுட்டுறுப்புகளுக்குமான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள் ஆகும்.

செவ்வகப்பரவல் : சீரான அடர்த்தி $(a, b)$ இடைவெளியில் (Uniform Density in $(a, b)$ :

$X_1, X_2, \dots X_n$ மாறிகள் $(a, b)$ இடைவெளியில் செவ்வகப் பரவலில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட தற்சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் என்றால்; நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $L = L(a, b)$

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; a, b).$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b-a}\right) = \frac{1}{(b-a)^n} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $f(X_i) = \frac{1}{b-a}$, $a < X_i < b$

$i = 1, 2, \dots n$ ஆகும்.

$= 0$ மற்ற இடங்களில் எல்லாம்.

இந்த நிகழும் தன்மைச் சார்பலனைக் கொண்டு $a$-க்கும், $b$-க்கும் வகைப்படுத்தி $a$; $b$ இவற்றின் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளை நாம் கண்டறிய முடியாது. ஆயினும் வேறு விதமாக $a, b$-க்கான மதிப்பீடுகளைக் காணலாம்.

$X_1, X_2, \dots X_n$ என்ற மாறிகளை மதிப்புகள் வாயிலாக வரிசைப் படுத்தி $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots X_{(n)}$ என்று எழுதவும். அதாவது, $a < X_{(1)} < X_{(2)} < X_{(3)} < \dots < X_{(n)} < b$ என்ற விதத்தில் மாறி மதிப்புகளை வரிசை முறைப்படுத்தி அத்தகைய மாறிகளை $X_{(1)}, X_{(2)} \dots$ என்று எண்களை அடைப்புக்குள் போட்டு எழுதுகின்றோம்.

இப்போது $(b-a)$ எவ்வளவுக்கெவ்வளவு சிறியதாக எங்கு உள்ளதோ அங்குதான் $L$ சார்பலன் நிச்சயமாக மீப்பெருமமாக இருக்கும்.

இதற்குச் சரியாகப் பார்த்தால் $a$-ன் மதிப்பு $X_{(1)}$ஐ விடப் பெரிதாக இருக்காது. அதேபோல $b$-ன் மதிப்பும் $X_{(n)}$ஐ விடச் சிறியதாக இருக்க முடியாது.

எனவே, $(b-a)$-க்கான நிகழத்தக்க மிகச்சிறிய இடைவெளி $X_{(n)}-X_{(1)}$ ஆகத்தான் இருக்கும்.

எனவே, $\hat{a} = X_{(1)}$

$$\hat{b} = X_{(n)}$$

என்று முடிவு கட்டுகின்றோம்.

இந்த $X_{(1)}$, $X_{(n)}$-ன் மதிப்புகளே $a, b$-ன் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள் முறையே என்று புலனாகின்றது.

**உதாரணம் :** ஒவ்வொரு பூங்கொத்தும் (flowerhead) சரியாக $x$ கரணைச் செதில்கள் (gall cells) வளர்ச்சிகளைக் கொண்டவாறு $f_x$ பூங்கொத்துகளின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணை விளக்குகிறது. கரணைச் செதில்களின் அலைவெண் பரவலானது புணை முறிக்கப்பட்ட (truncated) பாய்ஸான் பரவலில் அமைவதாகக் கொள்வோம். இப் பரவலுக்கான அடர்த்திச் சார்பலன்

$$p_x = (e^{\theta} - 1)^{-1} \frac{\theta^x}{x!}, \quad x = 1, 2, \ldots \text{ என்றால்,}$$

$\theta$ சுட்டுறுப்பின் மதிப்பீட்டை மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறையினை உபயோகித்து மதிப்பீடு செய்க.

கரணைச்செதில்கள் வளர்ச்சிகளின் பரவல் (Distribution of Gall Cells) :

| ஒரு பூங்கொத்தில் கரணை எண்ணிக்கை $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பூங்கொத்துகளின் எண்ணிக்கை $f_x$ | 287 | 272 | 196 | 79 | 29 | 20 | 2 | 0 | 1 | 0 |

**தீர்வு :**

ஒரு பூங்கொத்தில் (flowerhead) கரணைச் செதில் வளர்ச்சிகளின் (gall cells) எண்ணிக்கைக்கான கண்டறிந்த மதிப்புகள் $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்றால், நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்

$$\text{L} = (e^{\theta} - 1)^{-n} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (x_i!)}$$

இங்கு $n$ = பூங்கொத்துகளின் எண்ணிக்கை

$$\log \text{L} = c - n \log (e^{\theta} - 1) + T \log \theta.$$

இங்கு $C$ ஒரு மாறிலி; மேலும் $T = \Sigma X_i$ ஆகும்.

திறன் வாய்ந்த மதிப்பு (efficient score)

$$= \phi = \frac{d \log \text{L}}{d\theta} = -\frac{n \cdot e^{\theta}}{(e^{\theta} - 1)} + \frac{T}{\theta}$$

மேலும் $i(\theta)$

$$= -E\left(\frac{d^2 \log \text{L}}{d\theta^2}\right) = \frac{n \cdot e^{\theta}}{e^{\theta} - 1}\left[\frac{1}{\theta} - \frac{1}{(e^{\theta} - 1)}\right];$$

எப்படியென்றால்

$$\frac{d^2 \log \text{L}}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{T}{\theta} - \frac{n e^{\theta}}{(e^{\theta} - 1)}\right]$$

$$= -\frac{T}{\theta^2} - n. \frac{(c^{\theta} - 1)e^{\theta} - e^{\theta} \cdot e^{\theta}}{(e^{\theta} - 1)^2}$$

$$= -\frac{T}{\theta^2} - \frac{n(-e^{\theta})}{(c^{\theta} - 1)}$$

$$\hat{T} = \frac{n. e^{\theta} \cdot \theta}{e^{\theta} - 1}$$ (நிகழும் தன்மைச் சார்பலனின் தீர்வு என்பதால்)

$$-\frac{d^2 \log \text{L}}{d\theta^2} = \frac{T}{\theta^2} - \frac{n. e^{\theta}}{(e^{\theta} - 1)^2}$$

$$-E\left(\frac{d^2 \log L}{d\theta^2}\right) = \left[\frac{T}{\theta^2} - \frac{n e^{\theta}}{(e^{\theta}-1)^2}\right]_{\hat{T}}$$

$$= \frac{n \cdot e^{\theta} \cdot \theta}{(e^{\theta}-1)\,\theta^2} = \frac{n e^{\theta}}{(e^{\theta}-1)^2}$$

$$= \frac{n e^{\theta}}{(e^{\theta}-1)} \cdot \frac{1}{\theta} - \frac{n \cdot e^{\theta}}{(e^{\theta}-1)} \cdot \frac{1}{(e^{\theta}-1)}$$

$$= \frac{n c^{\theta}}{(e^{\theta}-1)} \cdot \left[\frac{1}{\theta} - \frac{1}{e^{\theta}-1}\right]$$

இப்போது $T = \Sigma x . f_x = 2023$ ; $n = 886$.

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $\phi = 0$ என்ருல்

$$\frac{-n \cdot e^{\theta}}{e^{\theta}-1} + \frac{T}{\theta} = 0.$$

$$\frac{T}{n} = \frac{n \cdot e^{\theta}}{e^{\theta}-1} .$$

$$\frac{T}{\theta} = \frac{\theta \cdot e^{\theta}}{e^{\theta}-1} = \frac{2023}{886} = 2{\cdot}283296.$$

$\dfrac{\theta \cdot e^{\theta}}{e^{\theta}-1} = 2{\cdot}283\ 296$ என்பதால் $\theta$-ன் மதிப்பை நேரடி யாக நாம் காண்பதற்கில்லை. எனினும், திரும்பத் திரும்பச் செய் முறையினைப் பயன்படுத்தி $\theta$-க்குத் தீர்வு காண்போம்.

ஆரம்பகட்டத்தில் $\theta_0 = \dfrac{\sum_{x=2}^{\infty} x \cdot f_x}{n} = 1{\cdot}9594.$

$\phi^{(0)} = \phi(\theta_0) = 1{\cdot}09554$.

$i(\theta_0) = 357{\cdot}154.$

$$\therefore \quad \theta_1 = \theta_0 + \frac{\phi(\theta_0)}{i(\theta_0)} = 1{\cdot}9625.$$

இப்போது $\phi(\theta_1) = -0{\cdot}01185$

$$i(\theta_1) = 856{\cdot}751$$

$$\therefore \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\phi(\theta_1)}{i(\theta_1)} = ?$$

$\theta_2$-ம் $\theta_1$-ம் 4 டெஸிமல் ஸ்தானங்களில் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதால் $\theta$-ன் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பினை

$$\hat{\theta} = \mathbf{1{\cdot}9625.}$$

உதாரணம் : சுட்டுறுப்புகள் $\alpha$, $\lambda$ (பெரிய மதிப்புடைய $\lambda$) இவற்றுக்கான பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு தரப்பட்டால், $\alpha$, $\lambda$ இவற்றின் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

$$f(X; \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\alpha} \cdot x} \; x^{\lambda - 1}$$

$$0 < x < \infty \quad \lambda > 0.$$

$\lambda$-ன் மிகப் பெரிய மதிப்புகளுக்கு

$\psi(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \log \Gamma(\lambda) = \log \lambda - \frac{1}{2\lambda}$ என்றும்

$\psi'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}$ என்றும் எடுத்துக்கொள்க.

தீர்வு :

தரப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $n$ அளவுடைய $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad L = \prod_{i=1}^{n} [f(X_i; \alpha, \lambda)]$$

$$= \left[\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\right]^n \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{n\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\alpha} \Sigma X_i} \prod_{i=1}^{n} (X_i^{\lambda - 1})$$

$$\log L = -n\log\Gamma(\lambda) + n\lambda(\log\lambda - \log\alpha -)\frac{\lambda}{\alpha}\Sigma X_i + (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{n}\log X_i$$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ மதிப்புகளின் ஜியோமதிச் சராசரி $G$ என்றால்

$$\log G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i$$

எனவே, $n\log G = \sum_{i=1}^{n}\log X_i$

$$\therefore \quad \log L = -n\log\Gamma(\lambda) + n\lambda(\log\lambda - \log\alpha) - \frac{\lambda}{\alpha}\cdot n\bar{X} + (\lambda-1)\cdot n\log G.$$

இங்கு $\log G$ என்பது $\lambda$ ஐச் சாராத மதிப்பாகும்.

$\alpha$, $\lambda$ இவற்றின் ஒருங்கிணைந்த மதிப்பீட்டுக்கான (Simultaneous estimation) நிகழும் தன்மைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{\partial\log L}{\partial\alpha} = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\lambda} = 0 \text{ ஆகும்.} \quad \ldots (2)$$

$$\frac{\partial\log L}{\alpha\lambda} = -\frac{n\lambda}{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha^2}\cdot n\bar{X} = 0.$$

எனவே. $n\lambda\left[-\frac{1}{\alpha} + \frac{\bar{X}}{\alpha^2}\right] = 0.$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{X}}{\alpha^2}.$$

$\hat{\alpha} = \bar{X}$ ஆகும்.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = -n\left(\log\lambda - \frac{1}{2\lambda}\right) + n\left[1.(\log\lambda - \log\alpha) + \lambda.\frac{1}{\lambda}\right] - \frac{n\bar{X}}{\alpha} + n\log G = 0.$$

$$\frac{n}{2\lambda} - n\log\alpha + n - n.\frac{\bar{X}}{\alpha} + n\log G = 0.$$

$$n\left[\frac{1}{2\lambda} + \left(1 - \log\alpha + \log G - \frac{\bar{X}}{\alpha}\right)\right] = 0.$$

அல்லது

$$\frac{1}{2\lambda} + \left(1 - \log\alpha + G - \frac{\bar{X}}{\alpha}\right) = 0.$$

$$1 + 2\lambda\left(1 - \log\alpha \log G - \frac{\bar{X}}{\alpha}\right) = 0.$$

$\hat{\alpha} = \bar{X}$ என்பதால், $1 + 2\lambda(\log G - \log\bar{X}) = 0.$

அதாவது, $1 - 2\lambda.\log\left(\frac{\bar{X}}{G}\right) = 0.$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2\log\left(\frac{\bar{X}}{G}\right)}$$ ஆகும்.

எனவே, மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளாவன :

$$\hat{\alpha} = \bar{X}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2\log\left(\frac{\bar{X}}{G}\right)}.$$

உதாரணம் : இரண்டு சுட்டுறுப்புகள் கொண்ட காம்மா பரவலுக்கு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(X) = e^{-X/\beta}.X^{\alpha-1}\left[\beta^{\alpha}.\Gamma(\alpha)\right]^{-1},\quad 0 < x < \infty$$

என்றால் $\alpha$ தெரிந்துள்ளபோது, $\beta$-க்கான ஒரு மதிப்பீட்டினை மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறையில் காண்க.

தீர்வு :

$$\log f = -\frac{X}{\beta} + (\alpha - 1)\log X - \alpha \log \beta \log \Gamma(\alpha).$$

எனவே, $L = \prod_{i=1}^{n} f(X_i)$ என்பதால்,

$\log L = -\frac{\Sigma X_i}{\beta} - n\,\alpha \log \beta + \beta$-ஐச் சாராத மற்ற உறுப்புகள்.

$$\therefore \quad \frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{\Sigma X_i}{\beta} - \frac{n\alpha}{\beta} = 0 \text{ என்றால்,}$$

$$\frac{\Sigma X_j}{\beta^2} = \frac{n\,\alpha}{\beta}$$

$$\frac{\Sigma X_i}{\beta} = n\,.\,\alpha.$$

எனவே, $\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$ என்றால்,

$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\alpha}$ என்பது மீப்பெரு நிகழ்தகவுத் தன்மை மதிப்பீடு ஆகின்றது.

**உதாரணம்**

ஓர் அடுக்குக்குறிப் பரவல்

$$f(X;\alpha,\beta) = y_0 .\, e^{-\beta(x-\alpha)}, \quad \alpha < x < \infty$$

$y_0$ ஒரு மாறிலி, என்றால்,

இம் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரிக்கு, $\alpha$, $\beta$ இவற்றுக்கான மீப்பெரு நிகழ்தன்மை மதிப்பீடுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$y_0$ ஒரு மாறிலி என்பதாலும் $\int_{a}^{\infty} f(X)\,dX = 1$ என்பதாலும், $y_0$-ன் மதிப்பை நாம் இப்போது காண்போம்.

அதாவது, $y_0 . \int_{a}^{\infty} e^{-\beta(x-d)}\,dx = 1$

அதாவது, $y_0 \cdot \left[ \dfrac{e^{-\beta(x-\alpha)}}{-\beta} \right]_a^\infty = 1$

$$-\frac{y_0}{\beta}[0-1]=1$$

$$\frac{y_0}{\beta}=1.$$

எனவே, $y_0 = \beta$.

ஆகையால், $f(x; \alpha, \beta) = \beta.\ e^{-\beta(x-\alpha)}, \ \alpha < x < \infty$.

$x_1, x_2, \dots x_n$ என்பன இந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சாண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரி மதிப்புகள் என்றால்,

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \alpha, \beta)$$

$$= \beta^n . e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} (X_i-\alpha)}$$

$$= \beta^n . e^{-n\beta(\bar{X}-\alpha)}$$

எனவே, $\log L = n \log \beta - n\beta(\bar{X}-\alpha)$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log L = 0 = n.\beta \qquad \dots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log L = 0 = \frac{n}{\beta} - n(\bar{X}-\alpha) \qquad \dots (2)$$

(1)-ன் மூலம் இங்கு $\beta=0$ ஆகும். ஆனால், இந்த விளைவு ஏற்க முடியாதது. இதனால் (2)-லிருந்து $\alpha=\infty$ என்ற தவறான முடிவு ஏற்படுகிறது.

எனவே, நிகழும் தன்மைச் சமன்பாடுகள் $\alpha, \beta$-க்குச் சரியான மதிப்பீடுகளைத் தவறி விட்டதால், $\alpha, \beta$-ன் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளை இடம் கண்டுகொள்ள, L-ஐ நேரடியாக மீப்பெருமப்படுத்துவோம்.

L மீப்பெருமம் என்றால் log L-ம் மீப்பெருமம் என்று அர்த்தம்.

$\log L = n \log \beta - n\beta(\bar{X}-\alpha)$.

$\beta$-ன் எந்த ஒரு மதிப்புக்கும் $(\bar{X} - \alpha)$ மீச்சிறுமமாக இருந்தால் log L மீப்பெருமமாகும்.

மேலும் $\alpha$ மீப்பெருமமாயிருந்தால் $(\bar{X} - \alpha)$-ன் மதிப்பு மீச்சிறுமமாகும்.

இப்போது $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மாதிரி என்றால்,

$$\alpha < X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)} < \infty$$

மாதிரி மதிப்புகளில் மிகச் சிறிய மதிப்பு $X_{(1)}$ தான்;

$$\therefore \quad \alpha = X_{(1)}$$

$$(2)\text{-ன் மூலம் } \frac{1}{\beta} = \bar{X} - \hat{\alpha}$$

$$= \bar{X} - X_{(1)}$$

$$\text{எனவே, } \hat{\beta} = \frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}}.$$

எனவே, $\alpha$, $\beta$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள்

$$\hat{\alpha} = X_{(1)}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}}$$

உதாரணம் : இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகள் முறையே சராசரி $\mu, \mu$, மாறுபாடுகள் $\lambda\sigma^2, \sigma^2$ என்றவாறு இருப்பின், அவற்றிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தற்சார்பற்ற மாதிரிகள் $n_1, n_2$ அளவுகளுடைய என்றால், $\mu$-விற்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும். இம் மதிப்பீட்டின் (பெரிய மாதிரி) மாறுபாடு $Var\ (\hat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{\left(\dfrac{n_1}{\lambda} + n_2\right)}$ என்று நிரூபிக்கவும்.

$T = \dfrac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}}{n_1 + n_2}$ என்பது $\mu$-க்கான நடுநிலை மாறாத ஒரு மதிப்பீடு என்று காட்டுக.

நீர்வு :

தரப்பட்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகள் $N(\mu, \lambda\sigma^2)$, $N(\mu, \sigma^2)$ என்றால்,

$X_{i1}$ $(i = 1, 2, \ldots n_1)$ $X_{2j}$ $(j = 1, 2, \ldots n_2)$ என்பன இரு தற்சார்பற்ற ராண்டம் மாதிரி மாறிகள் ஆகும்,

இரு மாதிரிகளும் தற்சார்பற்றவையானதால், நிகழும் தன்மை சார்பலன்

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\lambda\sigma^2} \cdot (X_1 - \mu)^2} \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (X_{2j} - \mu)^2} \right]$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\sigma_1^2}} \right)^{n_1} \cdot e^{-\frac{1}{2\lambda\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \mu)^2} \right]$$

$$\times \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^{n_2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2j} - \mu)^2} \right]$$

$$\therefore \quad \text{iog}\, L = c - \frac{1}{2\lambda\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_1} \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \mu)^2$$

இங்கு $c$ என்பது $\mu$ஐப் பொறுத்தவரை ஒரு மாறிலியாகும்.

இப்போது $\frac{\partial}{\partial \mu} \log L = 0$ என்றால்

$$-\frac{1}{2\lambda\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_1} \{ (-2)(X_{1i} - -\mu) \} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\{ (-2)}{(X_{2j} - \mu) \}} = 0$$

அதாவது, $\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \mu) + \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \mu) = 0.$

அதாவது, $\frac{1}{\lambda} . n_1 (\bar{X}_1 - \mu) + n_2 (\bar{X}_2 - \mu) = 0.$

$$\frac{n_1 \bar{X}_1}{\mu\lambda} + n_2 \bar{X}_2 = \frac{n_1}{\lambda} . \mu + n_2 \mu.$$

$$\therefore \hat{\mu} = \frac{\left(\frac{n_1 \bar{X}_1}{\lambda} + n_2 \bar{X}_2\right)}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)}$$

எனவே, $\hat{\mu} = \dfrac{\frac{n_1 \bar{X}_1}{\lambda} + n_2 \bar{X}_2}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)}$ ஒரு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடாகும்.

$\hat{\mu}$-க்கான மாறுபாடு $= \text{Var}(\hat{\mu})$

$$= \text{Var}\left[\frac{\frac{n_1 \bar{X}_1}{\lambda} + n_2 \bar{X}_2}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)} \text{Var}\left(\frac{n_1}{\lambda} \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)^2} \cdot \left[\frac{n_1^2}{\lambda^2} \text{Var}(\bar{X}_1) + n_2^2 . \text{Var}(\bar{X}_2)\right]$$

இங்கு $\text{Cor}(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = 0$ ஏனெனில் இரு மாதிரிகளும் தற்சார்பற்றவையாகும்.

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{1}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)^2} \cdot \left[\frac{n_1^2}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{\sigma^2 \lambda}{n_1}\right) + n_2^2 . \left(\frac{\sigma^2}{n_2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)^2} \cdot \left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\left(\frac{n_1}{\lambda} + n_2\right)}$$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

இப்போது,

$$T = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1+n_2}$$

இங்கு $E(T) = \mu$ என்றால் $T$ என்பது $\mu$-க்கான நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடாகும்.

$$E(T) = E\left[\frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1+n_2}\right] = \frac{n_1 \mu + n_2 \mu}{u_1+n_2}$$

$$= \mu.$$

எனவே, $\mu$-க்கான நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு $T$ ஆகும்.

உதாரணம் : $X \cap N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $(Y \cap N(\mu_2, \sigma_2^2)$ என்ற இரு மாறிகளுக்குமான இணைந்த இயல்நிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(X; Y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(1-\rho^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

என்றால், $\rho$ என்பது $X$, $Y$ இரண்டிற்குமான முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக்கெழு என்றால், இப்போது $\rho$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டினைக் கண்டு பிடிப்போம்.

மேலே கூறிய பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய $(X, Y)$ ஜதைகள் $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$, ... $(X_n, Y_n)$ என்றால், இந்த மாதிரிக்கான நிகழ்தன்மைச் சார்பலன்

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, Y_i)$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}}{[2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(1-\rho^2)}]^n}$$

எனவே,

$$\log L = -n \log \{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}\}$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\sum\left[\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho.\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

இங்கு log L என்பது, $\mu_1$, $\mu_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\rho$ என்ற ஐந்து சுட்டுறுப்புகளின் சார்பலனுக உள்ளதால் log Lஐ 5 சுட்டுறுப்புகளுக்கும் பகுதி வகைப்படுத்தி பூஜ்யமாக்கினுல் 5 சமன்பாடுகள், 5 (சுட்டுறுப்பு) மாறிகளில் கிடைக்கும். இவற்றைக் தீர்வு கண்டால், 5 சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பீடுகளும் கிடைக்க வரும். $\mu_1$, $\mu_2$-க்கு பகுதி வகைப்படுத்தி கிடைக்கும் மீப்பெரு மதிப்பீடானது $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$, $\hat{\mu}_2 = \bar{Y}$ ஆகும். முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளால் இந்த மதிப்பீடுகள் கிடைக்கின்றன. ஆனுல். 3வது, 4வது சமன்பாடுகளிலிருந்து $\sigma_1$, $\sigma_2$-க்கான மதிப்பீடுகள் கிடைப்பது அவ்வளவு சுலபமல்ல; ஏனென்றுல்,

இச் சமன்பாடுகளில் மாதிரி உடன் தொடர்புக் கெழு $r$ வருகின்றது. எனவே, பிந்தைய மூன்று சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே (Simultaneously) தீர்வு காண வேண்டியுள்ளது.

$$\frac{\partial \log L}{6\sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{-2\Sigma(X_i-\mu_i)^2}{\sigma_1^3} + \frac{2\rho.\Sigma(X_i-\mu_1)(Y_1-\mu_2)}{\sigma_1^2\sigma^2}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial\sigma_2} = 0 = -\frac{n}{\sigma_2} - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{-2\Sigma(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^3} + \frac{2\rho\,\Sigma(X_i-\mu_i)(Y_i-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2^2}\right]$$

இதைச் சீர்படுத்திஞல்,

$$\frac{\Sigma(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} = \frac{\rho\,\Sigma(X_i-\mu_1)(Y_i-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + n(1-\rho^2)$$

$$\Sigma \frac{(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = \frac{\rho \Sigma (X_i-\mu_1)(Y_i-\mu_2)}{\sigma_1 \sigma^2} + n(1-\rho^2)$$

$\hat{\mu}_1 = X$, $\hat{\mu}_2 = \overline{Y}$ என்பதாலும்.

$$\Sigma(X_i-\mu_1)(Y_i-\mu_2) = n\, r\, s_1\, s_2$$

என்பதாலும், இந்தச் சமன்பாடுகள் எளிதாக்கப்படுகின்றன.

$$\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{\rho r.\ s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + (1-\rho^2)$$

$$\frac{s_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{\rho r.\ s_1\ s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + (1-\rho^2)$$

எனவே, $\frac{s_1}{\sigma_1} = \frac{s_2}{\sigma_2}$ ஆகிறது.

இதை முதல் சமன்பாட்டில் தாக்கீது செய்தால்

$$\frac{s_1}{\sigma_1} = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\rho r}}$$ என்றுகிறது.

இப்போது ஐந்தாவது மீப்பெரு நிகழும் தன்மைச் சமன்பாடு

$$= \frac{\partial \log L}{\partial \rho} = 0$$ ஆகும்.

அதாவது,

$$0 = \frac{\partial \log L}{\partial \rho} = \frac{n\rho}{(1-\rho^2)} + \frac{1}{(1-\rho^2)} \sum \left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$- \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2} \sum \left[ \left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho. \left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]$$

இதைச் சீர்படுத்தினால்,

$$n\rho(1-\rho^2) + (1+\rho^2) \Sigma \left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$= \rho. \sum \left[ \left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right) + \left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]$$

இப்போது $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$

$$\hat{\mu}_2 = \bar{Y}$$

$$\frac{s_1}{\sigma_1} = \frac{s_2}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\rho r}}$$ என்று சமனிட்டால்

$$\rho(1-\rho^2) + r(1+\rho^2)\frac{1-\rho^2}{1-\rho r} = 2\rho\frac{1-\rho^2}{1-\rho r} = 2\rho\frac{1-\rho^2}{1-\rho r}$$

அதாவது $\rho + \frac{r(1+\rho^2)}{1-\rho r} = \frac{2\rho}{1-\rho r} = \frac{2\rho}{1-\rho r}$

$$\rho(1-\rho r) + r(1+\rho^2) = 2\rho$$

$$\rho - \rho^2 r + r + \rho^2 r = 2\rho$$

$$r = 2\rho - \rho = \rho.$$

அல்லது $\hat{\rho} = r$ ஆகிறது.

எனவே, $X$, $Y$ இரண்டும் இணைந்த இயல்நிலைப் பரவலில் இருக்கும்போது, $\rho$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு, மாதிரி உடன் தொடர்புக்கெழு $r$ ஆகின்றது எனக் காண்கிறோம்.

$\hat{\rho} = r$ எனும்போது $\frac{s_1}{\sigma_1} = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\rho r}} = 1$

அல்லது $\hat{\sigma}_1 = s_1$

அதேபோல $\hat{\sigma}_2 = s_2$ ஆகின்றன.

∴ மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள் :

$\hat{\mu}_1 = X$, $\hat{\mu}_2 = \bar{Y}$, $\hat{\sigma}_1 = s_1$, $\hat{\sigma}_2 = s_2$ மேலும் $\hat{\rho} = r$ என உய்த்துணர்கின்றோம்.

உதாரணம் : கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்களைக் கொண்ட பரவல்களுக்கு $\theta$-ன் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளைக் கண்டுபிடி :

(i) $f(X;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x=0, 1$, $0<\theta<1$

(ii) $f(X); \theta) = \frac{1}{2} e^{-|X-\theta|}$, $-\infty < X < \infty$, $-\infty \leq \theta < \infty$

(iii) $f(X; \theta) = e^{-(X-\theta)}$, $\theta < X < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$.

தீர்வு :

(i) $L(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} X_i}$

$$\log L = (\Sigma X_i) \log \theta + (n - \Sigma X_i) \log (1-\theta)$$

இதை $\theta$-க்கு வகைப்படுத்தி பூஜ்யத்திற்குச் சமனிட்டு $\hat{\theta}$-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$0 = \frac{d \log L}{d\theta} = \frac{\Sigma X_i}{\theta} - \frac{n - \Sigma X_i}{1-\theta}$$

அதாவது, $\frac{\Sigma X_i}{\theta} = \frac{n - \Sigma X_i}{1-\theta}$

$$(1-\theta) \Sigma X_i = n\theta - \theta \cdot \Sigma X_i$$

$$\Sigma X_i = n\theta.$$

அல்லது $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma X_i$ ஆகும்.

$0 < \theta < 1$ என்றால், $\theta = \bar{X}$ என்ற மதிப்பு $\theta$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடாகின்ற.

(ii) $f(X; \theta) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|X-\theta|}$ என்பதால்

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் $= L = L(X_1, X_2, \ldots X_n; \theta)$

$$L(\theta; X_1, \ldots X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \theta)$$

$$= (\tfrac{1}{2})^n . e^{-\Sigma |X_i - \theta|}$$

அதாவது, $\Sigma |X_i - \theta|$ மீச்சிறுமமாகும்போது $L$-ன் மதிப்பு மீப்பெருமமாகிறது.

அதாவது, $\theta =$ இடைநிலை என்றால், L மீப்பெருமமாகிறது. எனவே, $\theta =$ இடைநிலையானது $\theta$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு ஆகும்.

$$\text{(iii)}\quad f(X;\theta) = e^{-(X-\theta)},\ \theta < x < \infty,\ -\infty < \theta < \infty$$

என்பதால் நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்

$$L = L(\theta; X_1, X_2, \ldots X_n) = e^{-\Sigma(X_i-\theta)}$$

$\Sigma(X_i-\theta)$-ன் மதிப்பு மீச்சிறுமமாகும் போது L-ன் மதிப்பு மீப்பெருமமாகின்றது.

அதாவது, $\theta$ மீச்சிறுமமாகும் போது L மீப்பெருமமாகிறது.

எனவே, $\theta$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு $\theta$-ன் மீச்சிறுமமான மதிப்பாகும்.

உதாரணம் : $dF(x) = \alpha\, exp\, [-\alpha\,(x-\mu) - exp\ \{-\alpha\,(x-\mu)\}]\, dx,\ -\infty < x < \infty$ என்ற பரவலிலிருந்து $n$ அளவுடைய ஒரு மாதிரிக்கு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள் $\hat{\alpha}$, $\hat{\mu}$ என்பன கீழ்க்கண்டவாறு மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கின்றன என்று காட்டுக.

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \bar{x} - \frac{\Sigma\, x.\ e^{-\hat{\alpha}\, x}}{\Sigma\, e^{-\hat{\alpha}\, x}}$$

$$e^{-\hat{\alpha}\hat{\mu}} = \frac{1}{n}\cdot \Sigma\, e^{-\hat{\alpha}\, x}.$$

தீர்வு :

$f = \alpha exp[-\alpha(x-\mu) - exp\{-\alpha(x-\mu)\}]$ என்பதால்,

$\log f = \log\alpha - \alpha\Sigma(x-\mu) - exp\ \{-\alpha(x-\mu)\}$ ஆகின்றது.

எனவே, $\log L = n\log\alpha - \alpha\Sigma(x_i-\mu) - \Sigma exp\{-\alpha(x_i-\mu)\}$

$$\therefore\ \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \Sigma(X_i-\mu) + \Sigma\,[(x\ \ \mu).\ exp\ \{-\alpha$$

$$(x-\mu)\} ] = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = nd - \Sigma\, \alpha\, exp\{-\alpha(x-\mu)\} = 0 \qquad \ldots (2)$$

(2)-லிருந்து $1 = \frac{1}{n}\, \Sigma\, exp\left\{-\hat{\alpha}\,(x-\hat{\mu})\right\}$

$$= \frac{1}{n}.\ \Sigma\, exp\left\{-\hat{\alpha}\, x\right\}.\ exp\left\{\hat{\alpha}\,\hat{\mu}\right\}.$$

அல்லது $e^{-\hat{\alpha}\,\hat{\mu}} = \frac{1}{n}\cdot \Sigma e^{-\hat{\alpha}\, x}. \qquad \ldots (3)$

எனவே, (1)-லிருந்து

$$0 = \frac{n}{\alpha} - n\bar{x} + n\hat{\mu} + \Sigma\, x.e^{-\hat{\alpha}\, x}\,.\, e^{\hat{\alpha}\,\hat{\mu}} - \hat{\mu}\ \Sigma\, e^{-\hat{\alpha}\, x}\,.\, e^{\hat{\alpha}\,\hat{\mu}}$$

இங்குச் சமன்பாடு (3)ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$0 = \frac{n}{\alpha} - n\bar{x} + n\hat{\mu} + \frac{\Sigma\, x\, e^{-\hat{\alpha}\, x}}{e^{-\hat{\alpha}\,\hat{\mu}}} - \hat{\mu}\, e^{\hat{\alpha}\,\hat{\mu}}\,.\, n\, e^{-\hat{\alpha}\,\hat{\mu}}$$

$$= \frac{n}{\alpha} - n\bar{x} + \frac{n.\Sigma\, x.e^{-\hat{\alpha}\, x}}{\Sigma\, e^{-\hat{\alpha}\, x}}$$

எனவே, $\frac{n}{\alpha} = n\bar{x} - \frac{n\, \Sigma'\, x.e^{-\hat{\alpha}\, x}}{\Sigma e^{-\hat{\alpha}\, x}}$

அதாவது, $\frac{1}{\hat{\alpha}} = \bar{x} - \frac{\Sigma\, x.e^{-\hat{\alpha}\, x}}{\Sigma\, e^{-\hat{\alpha}\, x}}$ ஆகும்.

ஆதலால், நாம் $\hat{\alpha}$, $\hat{\mu}$ என்ற இரு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு நிரூபித்து விட்டோம்.

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \bar{x} - \frac{\Sigma x \cdot e^{-\hat{\alpha} x}}{\Sigma e^{-\hat{\alpha} x}}$$

$$e^{-\hat{\alpha}} \hat{\mu} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma e^{-\hat{\alpha} x}$$

கீழ்க்கண்ட லாஜிஸ்டிக் பரவலுக்கு

அதாவது, $F(x) = [1+exp\{-(\alpha+\beta x)\}]^{-1}, -\infty < x < \infty$

$\alpha$-க்கான ஒரு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

**தீர்வு :**

$$f(x) = \frac{d}{dr} F(x)$$

$$= \beta. \; e^{-(\alpha+\beta x)} \{1+ exp[-(\alpha+\beta x)]\}^{-2}$$

$$L = \beta^{n}. \; e^{-n\alpha - \beta \Sigma x_i}. \{1+ exp[-(\alpha+\beta x_i)]\}^{-2n}$$

$$\log L = n \log \beta - n\alpha - \beta \Sigma_i - 2\Sigma \log \{1+exp[-(\alpha+\beta x_i)]\}$$

$$\therefore \; 0 = \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = -n - 2 \sum \frac{exp(-\alpha - \beta x_i)}{1 + exp[-(\alpha+\beta x_i)]}$$

எனவே, $n = 2 e^{-\alpha} \sum \frac{e^{-\beta x_i}}{1+ e^{-(\alpha+\beta x_i)}}$

அதாவது, $e^{\alpha} = \frac{2}{n} \sum \frac{e^{-\beta x_i}}{1+ e^{-(\alpha+\beta x_i)}}$

எனவே, $\alpha$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

$$e^{\hat{\alpha}} = \frac{2}{n} \cdot \sum \frac{e^{-\beta x_i}}{1+ e^{-(\beta x_i + \alpha)}} .$$

**உதாரணம் :** $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்பன தனித்த இயல்நிலை மாறுகள் என்றால்

$$(E y_r) = r\theta$$

$Var\,(y_r) = \sigma^2$ என்றவாறு இயல்நிலை பரவலில் அவை அமைந்திருந்தால், θக்கான பீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு

$$\hat{\theta} = \left( \sum_{r=1}^{n} \frac{y_k}{r^2} \right) \Bigg/ \left( \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \right)$$ என்று நிருபி.

மேலும் $\hat{\theta}$ ஒரு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு என்று என்றும் $Var\,\hat{\theta} = \dfrac{\sigma^2}{\left( \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \right)}$ என்றவாறு ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந் என்றும் காட்டுக.

**தீர்வு :**

$y_r$-ன் பரவலானது.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\ Var\,y_r}} \cdot exp \left[ - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_r - r\,\theta)^2}{r^3\,\sigma^2} \right]$$ ஆகும்.

எனவே, நிகழும் தன்மைச் சார்பலன்

$$L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{Var\,y_1,\ Var\,y_2 \dots \dots \dots Var\,y_n}} \right)$$

$$\left( e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{u} \frac{(y_r - r\,\theta)^2}{r^3\,\sigma^2}} \right)$$

எனவே, $L = c - \dfrac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \dfrac{(y_r - r\,\theta)^2}{r^3\,\sigma^2}$

$$\therefore\ 0 = \frac{d \log L}{d\theta} = - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-r)\,(y_x - r\theta)}{r^5\,\sigma^2}$$

அதாவது, $\sum \dfrac{y_r}{r_2} - \theta \cdot \sum \dfrac{1}{r} = 0.$

எனவே, $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{r=1}^{n} \frac{y_r}{r^2}}{\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\right)}$ ஆகிறது.

மேலும், $E(\hat{\theta}) = \dfrac{\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} E(y_r)}{\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\right)} = \dfrac{\sum \frac{1}{r^2} \cdot r\theta}{\sum \frac{1}{r}}$

$$= \frac{\left(\sum \frac{1}{r} \cdot \theta\right)}{\left(\sum \frac{1}{r}\right)} = \theta \text{ ஆகும்.}$$

$E(\hat{\theta}) = 0$ என்பதால், $\hat{\theta}$ ஒரு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு என்று நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது.

இப்போது

$$E(\hat{\theta}) = E\left[\left(\Sigma \frac{y_r}{r^2}\right)^2 \Big/ \left(\Sigma \frac{1}{r}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\Sigma \frac{y_r^2}{r^4} + \Sigma\Sigma \frac{y_r^2}{r^2} \cdot \frac{y_s^2}{s^2}\right] \Big/ \left(\Sigma \frac{1}{r}\right)^2$$

$$= \left[\Sigma \frac{1}{r^4} (r^3\sigma^2 - r^2\theta^2) + \Sigma\Sigma \frac{r\theta}{r^2} \cdot \frac{s\theta}{s^2}\right] \Big/ \left(\Sigma \frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum_{r=1}^{1} \frac{1}{r}} + \theta^2 \cdot \frac{\left(\Sigma\Sigma \frac{1}{rs} - \Sigma \frac{1}{r^2}\right)}{\left(\Sigma \frac{1}{r}\right)^2}$$

எனவே,

$$\text{Var}\ \hat{\theta} = E(\hat{\theta})^2 - [E(\hat{\theta})]^2 = E(\hat{\theta})^2 - \theta^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\left(\Sigma \frac{1}{r}\right)} + \theta^2 \cdot \frac{\left(\Sigma \Sigma \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdot - \Sigma \frac{1}{r^2}\right)}{\left(\Sigma \frac{1}{r}\right)^2} - \theta^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\left(\Sigma \frac{1}{r}\right)}.$$

எனவே, $\hat{\theta}$ என்ற மதிப்பீடு சராசரி $\theta$, மாறுபாடு $\dfrac{\sigma^2}{\left(\Sigma \frac{1}{r}\right)}$ ஐயும் கொண்டு ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளது எனக் காண்கின்றோம்.

**3.3** மீச்சிறு கைவர்க்க முறை (Minimum $\chi^2$ Method) :

ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றதும், எல்லாவித வகைகளுமானதுமான $c$ பகுதியினங்களில் அமைந்த ஒரு பரவலைக் கவனிப்போம். இத்தகைய பிரச்சினையில் $i$-வது பகுதியினத்திற்கான ($i$-th category) நிகழ்தகவு $p_i\ (m)$ என்பது ஒரு சுட்டுறுப்பு $m$-ன் தரப்பட்ட சார்பலன் என்று கொள்வோம்.

இங்கு $m_1, m_2, .. , m_k)$ ஆகும்.

$n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியில், $i$-வது பகுதியினத்தில் கண்டறியப்பட்ட அலைவெண் $n_i$ என்று கொள்வோம். இப்போது $\chi^2$ ஐக்கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுத்து எழுதுவோம்.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{c} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{இங்கு } O_i \text{ கண்டறிந்த மதிப்பு.}$$

$$= \sum_{i=1}^{c} \frac{[n_i - n\, p_i(m)]}{n\, p_i\ (m)} \quad E_i^2 \text{ எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு}$$

இதையே வேறு விதமாகவும் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் எழுதினால்

$$\chi^2 = \sum \frac{n_i^2}{n\, p_i(m)} - n$$

இப்போது $\chi^2$ஐ மீச்சிறுமமாக்கக் கூடிய $m$-ன் மதிப்புகளை நாம் கண்டறியும் முறையினைத்தான் மீச்சிறு கைவர்க்க முறை என அழைக்கிறோம்.

$\chi^2$ என்பது $p_i$-ன் சார்பலன்; அதே சமயத்தில் $p_i$ என்பது $m_j$ $(j=1, 2, \dots k)$-ன் சார்பலன்.

$\chi^2$ஐ மீச்சிறுமமாக்கவல்ல $m$ மதிப்புகள் முறையே $m_1, m_2, \dots m_k$ ஆகும். ஆகையால் $m^2$ஐ $m_1, m_2, \dots m_k$-க்குப் பகுதி வகைப்படுத்த வேண்டியுள்ளது. இதற்கு $\chi^2$ஐ நேரடியாக $p_i$ $(i = 1, 2, \dots c)$-க்கு வகைப்படுத்தி அதன் பின் $p_i$ஐ $m_j$-க்கு வகைப்படுத்தி இரண்டையும் பெருக்கினால் நாம் விரும்பியது கிடைக்கும்.

அதாவது,

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m_j} = \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial m_i} \text{ ஆகும். } j=1,2, \dots k \text{ மதிப்புகளுக்கு}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial m_j} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\sum_{i=1}^{c} \frac{n_i^2}{np_i(m)} - n\right] \cdot \frac{\partial p_i}{\partial m_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{c} \frac{n_i^2}{n} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{[p_i(m)]^2} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial m_i}.$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{c} \frac{n_i^2}{p_i^2} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial m_j}\right]$$

இங்கு $\frac{\partial \chi^2}{\partial m_j} = 0$ என்று கொண்டால்,

$$-\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{c} \frac{n_i^2}{p_i^2} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial m_j}\right] = 0$$

அதாவது, $\sum_{i=1}^{c} \frac{n_i^2}{p_i^2} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial m_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots k.$

சில ஒழுங்கு நிபந்தனைகளின் படி, இந்த முறையானது அணுகு கோட்டு நியதியில் (asymptotically) மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறையை ஒத்து உள்ளது. கீழ்க்கண்ட நிகழும் தன்மை சார்பலன்களைத் தீர்வு காண்பதன் பொருட்டு இவ்வாறுகின்றது.

$$\sum_{i=1}^{c} \frac{n_i}{p_i} \cdot \frac{d\,p_i}{dm_j} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots k.$$

திருத்தியமைக்கப்பட்ட மீச்சிறு கைவர்க்க முறை (Modified Minimum $\chi^2$-Method) : இங்கு திருத்தியமைக்கப்பட்ட $\chi^2$-ஐக் கீழ்க்கண்ட விதம் எழுதலாம்.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{c} \frac{[n_i - np_i'(m)]^2}{n_i} = \sum_{i=1}^{c} \frac{[n_i - np_i(m)]^2}{n_i}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{c} \frac{[n_i - np_i(m)]^2}{n_i} \text{ ஐ}$$

$$= n - \sum \frac{[np_i(m)]^2}{n_i} \text{ என்றும் எழுதலாம்.}$$

எனவே, $\frac{dx^2}{dm} = 0$ என்றால், மீச்சிறு $x^2$-க்கான சமன்பாடுகள்

$$-2 \cdot \sum \frac{np_i(m)}{n_i} \cdot \frac{dp_i}{dm_j} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\sum \frac{p_i}{n_i} \cdot \frac{dp_i}{dm_j} = 0.\quad j = 1, 2, \ldots k$ ஆகும்.

இச் சமன்பாடுகளை மேலும் திருத்தியமைப்பதன் மூலம் கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

அதாவது, $\sum_{i=1}^{c} \frac{p_i}{n_i + 1} \cdot \frac{dp_i}{dm_j} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots k.$

உதாரணம்: ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 1, அல்லது 6ஆம் எண் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $f$ என்று இருக்கட்டும். $n$ தடவை உருட்டியதில், $r$ தடவைகள் 1 அல்லது 6 விழுந்த தாகக் கொள்வோம். $T = \frac{r}{2n}$ என்ற ஒரு மதிப்பினை $f$-க்கான ஒரு மதிப்பீடாக எழுத்துக் கொள்வோம்.

$n$ உருட்டுகளில் '$i$' எனும் எண் ஏற்படுவதன் எண்ணிக்கையை $n_i$ என்போம்,

மேலும் $\Sigma n_i = n$ என்றும் இருக்கட்டும்.

1 அல்லது 6-க்கான நிகழ்தகவு $= f$ என்றால்

$$t = \frac{1-2f}{4} \text{ என்று குறிக்கவும்.}$$

இப்போது $i = 2, 3, 4, 5$-க்கு $E(n_i) = n.t$

$i = 1, 6$-க்கு $E(n_i) = nf.$

$$\therefore \quad x^2(f) = \frac{n_1^2 + n_6^2}{nf} + \frac{n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2}{nt} - n$$

இது எப்படி என்றால், $x^2$-ன் சூத்திரமானது

$$x^2(f) = \sum \frac{O_i^2}{E_i} - n$$

$$= \frac{n_1^2}{nf} + \frac{n_2^2}{nt} + \frac{n_3^2}{nt} + \frac{n_4^2}{nt} + \frac{n_5^2}{nt} + \frac{n_6^2}{nf} - n$$

$$= \frac{n_1^2 + n_6^2}{nf} + \frac{n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2}{nt} - n \text{ ஆகும்.}$$

$n_1^2 + n_6^2 = T$ என்றும்

$n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = S$ என்றும் குறித்தால்

$$x^2 = \frac{T}{nf} + \frac{S}{nt} - n$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{T}{f} + \frac{S}{t} - n^2\right]$$

$x^2$ஐ மீச்சிறுமமாக்குவதும் $\frac{T}{f} + \frac{S}{t}$ ஐ மீச்சிறுமமாக்குவதும் ஒன்றேயாகும்.

இப்போது $\frac{T}{f} + \frac{S}{t}$ ஐ $f$-க்கு வகைப்படுத்தி அதன் விளைவை பூஜ்யத்துக்குச் சமனிட்டால்,

$$\frac{d}{df}\left[\frac{T}{f} + \frac{S}{t}\right] = 0$$

அதாவது. $\frac{d}{df}\left[\frac{T}{f} + \frac{4S}{1-2f}\right] = 0$

$$\therefore \quad -\frac{T}{f^2} + \frac{4S(-1)(-2)}{(1-2f)^2} = 0$$

அதாவது, $\frac{T}{f^2} = \frac{8S}{(1-2f)^2}$

$$= \frac{16S}{2(1-2f)^2}$$

$$= \frac{S}{2t^2}$$

எனவே, $\frac{t^2}{f^2} = \frac{S}{2T}$

$$\frac{(1-2f)^2}{16 \cdot f^2} = \frac{S}{2T}$$

$$\frac{(1-2f)^2}{f^2} = \frac{8S}{T}$$

$$\frac{1-2f}{f} = \sqrt{\frac{8S}{T}}$$

$$1 - 2f = \left[\sqrt{\frac{8S}{T}}\right] f$$

$$f\left(2 + \sqrt{\frac{8S}{T}}\right) = 1.$$

$$\therefore \quad f = \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{8S}{T}}}$$

எனவே, $\hat{f} = f$-ன் மீச்சிறு கைவர்க்க மதிப்பீடு

$$= \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{8S}{T}}}$$ ஆகும்.

உதாரணம் : சோதனைக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட ஒரு பொருள் $A, B, C, D$ என்ற 4 வகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு, சோதனையின் விளைவுகள் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

| வகைகள் | அறிமுறைக்குரிய நிகழ் தகவு Theoretical probability | கண்டறியப்பட்ட அலைவெண் Observed frequency |
|---|---|---|
| $A$ | $(2+m) / 4 = p_1$ | $102 = n_1$ |
| $B$ | $(1-m) / 4 = p_2$ | $17 = n_2$ |
| $C$ | $(1-m) / 4 = p_3$ | $36 = n_3$ |
| $D$ | $m / 4. = p_4$ | $5 = n_4$ |
| மொத்தம் | 1 | $160 = n$ |

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு $m$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டினைக் கணக்கிடவும். பிறகு திருத்தப்பட்ட மீச்சிறு கைவர்க்க முறையினைப் பயன்படுத்தி $m$-க்கான மதிப்பீட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும். இரண்டிலும் எந்த மதிப்பீடு சிறந்தது என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு: முதலில் மீப்பெரு நிகழ்தகவு மதிப்பீட்டினைக் காண்போம்

இந்தப் பிரச்சினை ஒரு பல உறுப்புப் பரவலில் அமைந்துள்ளதால், நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$p(n_1, n_2, n_3) = f(n_1, n_2, n_3; m)$$

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ n_4} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot p_4^{n_4};$$

இங்கு $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1, \quad 0 < p_i < 1$ என்றும்,

$\sum_{i=1}^{4} n_i = n$ என்றும் உள்ளது.

எனவே, நிகழும் தன்மைச் சார்பலனைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் = L

$$= L(m) = f(n_1, n_2, n_3, u_4 ; m)$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot p_4^{n_4}.$$

$$= \frac{n\,!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4!} \cdot \left(\frac{2+m}{4}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{1-m}{4}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{1-m}{4}\right)^{n_3} \cdot \left(\frac{m}{4}\right)^{n_4}.$$

எனவே, $\log L = c + n_1 \cdot \log\left(\frac{2+m}{4}\right) + n_2 \log\left(\frac{1-m}{4}\right) + n_3 \log\left(\frac{1-m}{4}\right) + n_4 \log\left(\frac{m}{4}\right).$

$\log L$ ஐ $m$-க்கு வகைப்படுத்தி பூஜ்யத்திற்குச் சமனிட்டுக் தீர்வு கண்டால்,

$$\frac{d \log L}{dm} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{n_1}{\frac{(2+m)}{4}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{n_9}{\left(\frac{1-m}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{n_3}{\left(\frac{1-m}{4}\right)} \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{n_4}{\left(\frac{m}{4}\right)} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

அதாவது, $\frac{n_1}{2+m} - \frac{n_2+n_3}{1-m} + \frac{n_4}{m} = 0$

இப்போது $n_1, n_2, n_3, n_4$ மதிப்புகளைப் பிரச்சினையில் தரப்பட்டுள்ளவாறு எழுதினால்

$$n_1 = 102$$
$$n_2 = 17$$
$$n_3 = 36$$
$$n_4 = 5.$$

எனவே, $\frac{102}{2+m} - \frac{53}{1-m} + \frac{5}{m} = 0.$

அதாவது,

$$\frac{102\,m\,(1-m) - 53.\,m\,(2+m) + 5\,(1-m)\,(2+m)}{(2+m)\,(1-m)\,(m)} = 0.$$

$\therefore \quad 102m\,(1-m) - 53m\,(2+m) + 5\,(1-m)\,(2+m) = 0.$

$102m - 102m^2 - 53m^2 - 106m + 5(2-m-m^2) = 0.$

அதாவது, $102m - 106m - 5m - 102m^2 - 53m^2 - 5m^2 + 10 = 0.$

$\therefore \quad -160m^2 - 9m + 10 = 0.$

எனவே, $160m^2 + 9m - 10 = 0$

இப்போது $m$-க்குத் தீர்வு கண்டால்

$$m = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40\,(160)}}{320}$$

$m$-ன் மதிப்பு எதிர்மறை மதிப்பல்ல என்பதால்

$$m = \frac{-9 + \sqrt{81 + 6400}}{320}$$

$= 0{\cdot}22345$ ஆகிறது.

எனவே, மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு $\hat{m}$ என்பது

$\hat{m} = 0{\cdot}22345$ ஆகும்.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட கைவர்க்க முறையில் இப்போது $m$ன் மதிப்பீட்டைக் காண்போம்.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட கைவர்க்கம் $= \chi^2$ என்றால்

$$\chi^2 = \sum \frac{[n_i - E(n_i)]^2}{n_i} = n - \sum_{i=1}^{4} \frac{E(n_i)^2}{n_i}$$

$E(n_i) = n.p_i$

$E(n_1) = n.\left(\frac{2+m}{4}\right)$

$$E(n_2) = n.\left(\frac{1-m}{4}\right)$$

$$E(n_3) = n.\left(\frac{1-m}{4}\right)$$

$$E(n_4) = n.\left(\frac{m}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \chi^2 = \frac{\left\{n_1 - \left[n\,\frac{(2+m)}{4}\right]\right\}^2}{n_1} + \frac{\left\{n_2 - \left[n\,\frac{(1-m)}{4}\right]\right\}^2}{n_2}$$

$$+ \frac{\left\{n_3 - \left[\frac{n\,(1-m)}{4}\right]\right\}^2}{n_3} + \frac{\left\{n_4 - \left[\frac{n\,(m)}{4}\right]\right\}^2}{n_4}$$

இந்த $x^2$ ஆனது $m$-ன் சார்பலன் என்பதால் $x^2$ஐ மீச்சிறுமப் படுத்த,

$$\frac{d\,x^2}{d\,m} = 0 \qquad m = \hat{m} \text{ என்ற மதிப்பில்}$$

$$\frac{d^2\,x^2}{d\,m^2} > 0 \quad \hat{m} \text{ என்ற மதிப்பில்}$$

என்ற நிபந்தனைகள் பூர்த்தியாக்கப்பட வேண்டும் என்று முன்பே கண்டோம்.

இப்போது $\frac{d\,\chi^2}{d\,m} = 0$ சமன்பாட்டைக் கொண்டு $m$-ன் மதிப்பீடு என்ன என்று பார்ப்போம்.

$$\frac{d\,\chi^2}{d\,m} = 0 \text{ என்றால்}$$

$$-\,2\frac{\left[\frac{n(2+m)}{4}\right]\cdot\left(\frac{n}{4}\right)}{n_1} - 2\frac{\left[\frac{n(1-m)}{4}\right]\cdot\left(-\frac{n}{4}\right)}{n_2}$$

$$-\,2\frac{\left[\frac{n\,(1-m)}{4}\right]\cdot\left(-\frac{n}{4}\right)}{n_3} - 2\frac{\left[\frac{n\,(m)}{4}\right]\cdot\frac{n}{4}}{n_4} = 0.$$

$$-\frac{2n^2}{16}\left[\frac{(2+m)}{n_1} - \frac{(1-m)}{n_2} - \frac{(1-m)}{n_3} + \frac{m}{n_4}\right] = 0.$$

அதாவது,

$$\frac{2+m}{n_1} - \frac{1-m}{n_2} - \frac{1-m}{n_3} + \frac{m}{n_4} = 0$$

எனவே,

$$m\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right] + \frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} = 0.$$

$$\therefore\ m = \frac{\left(-\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right)}$$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{102} + \frac{1}{17} + \frac{1}{36}\right)}{\left(\frac{1}{102} + \frac{1}{17} + \frac{1}{36} + \frac{1}{5}\right)}$$

$$= 0.22602.$$

எனவே திருத்தியமைக்கப்பட்ட மீச்சிறு கைவர்க்க மதிப்பீடு $\hat{m} = 0{\cdot}22602$ ஆகின்றது.

ஆகையால், இரு வித முறைகளிலும் மதிப்பீட்டைக் கண்டு பிடித்துள்ளோம். இப்போது இவை இரண்டில் எது சிறந்தது என்று கண்டறிய, $i(m)$ என்ற சார்பலனை உபயோகிப்போம்.

$i(m) = -E\left(\frac{d^2 \log L}{d_{m^2}}\right)$ என்பதால்,

நாம் $\frac{d^2 \log L}{d_{m^2}}$ மதிப்பை, நிகழும் தன்மைச் சார்பலனைக் கொண்டு கண்டுபிடித்து அதன் மூலம் $i(m)$ஐக் காண்போம்.

மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு (variance of estimate) $= \frac{1}{i(m)}$

என்பதால் $i(m)$ சார்பலனில் $m = \hat{m}$ என்ற மதிப்பைச் சமனிட்டு $i(\hat{m})$ஐக் கண்டுபிடித்து அதிலிருந்து $\frac{1}{i(\hat{m})}$ காணலாம். இதன்

வர்க்கமூலம்தான் மதிப்பீட்டின் திட்டப் பிழையாகும். இங்கு $m$-ன் இரு முறை மதிப்பீடுகளுக்கும் திட்டப்பிழைகளைக் கண்டுபிடித்து இரண்டில் எந்தத் திட்டப்பிழை குறைவாக உள்ளதோ அந்த திட்டப் பிழைக்கான மதிப்பீடே சிறந்தது என்று முடிவு கட்டுகின்றோம்.

$$\frac{d^2 \log L}{d_{m^2}} = \frac{d}{m}\left(\frac{d \log L}{dm}\right)$$

$$= \frac{d}{d_m}\left[\frac{n_1}{(2+m)} - \frac{n_2+n_3}{1-m} + \frac{n_4}{m}\right]$$

$$= -\frac{n_1}{(2+m)^2} - \frac{(n_2+n_3)}{(1-m)^2} - \frac{n_4}{m^2}$$

$$= -\left[\frac{n_1}{(2+m)^2} + \frac{n_2+n_3}{(1-m)^2} + \frac{n_4}{m^2}\right]$$

$$\therefore \quad -E\left(\frac{d^2 \log L}{d_{m^2}}\right) = E\left(-\frac{d^2 \log L}{d_{m^2}}\right)$$

$$= E\left[\frac{n_1}{(2+m)^2} + \frac{n_2+n_3}{(1-m)^2} + \frac{n^4}{m^2}\right]$$

$$\therefore \quad -E\left(\frac{d^2 \log L}{d m^2}\right)$$

$$= E\left[\frac{n_1}{(2+m)^2} + \frac{n_2+n_3}{(1-m^2)} + \frac{n_4}{m^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(2+m)^2}E(n_1) + \frac{1}{(1-m)^2}E(n_2+n_3) + \frac{1}{m^2}E(n_4)$$

$$= \frac{1}{(2+m)^2} \cdot \frac{n.(2+m)}{4} + \frac{1}{(1-m)^2} \cdot \left[\frac{n(1-m)}{4} + \frac{n(1-m)}{4}\right] + \frac{1}{m^2} \cdot \left(\frac{n.m}{4}\right)$$

$$= \frac{n}{4}\left[\frac{1}{2+m} + \frac{1}{(1-m)} + \frac{1}{m}\right]$$

$$= \frac{160}{4}\left[\frac{1}{2+m} + \frac{2}{(1-m)} + \frac{1}{m}\right]$$

$$i(m) = -E\left(\frac{d^2 \log L}{dm^2}\right)$$
$$= 40\left(\frac{1}{2+m} + \frac{2}{1-m} + \frac{1}{m}\right).$$

இப்போது முதலில் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு $m=\hat{m}=0.22345$ ஐச் சமனிட்டு $i(\hat{m})$ கண்டுபிடித்து அதன் மூலம் இம்முறை மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழையைக் காண்போம்.

$$i(\hat{m})=40\left[\frac{1}{2.22345} + \frac{2}{0.77655} + \frac{1}{0.22345}\right]$$
$$= 300.0208$$

எனவே, மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறை மதிப்பீட்டின்

$$\text{திட்டப் பிழை} = \sqrt{\frac{1}{i(\hat{m})}}$$

$$\text{திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{1}{300.0208}} = 0.05773.$$

இப்போது திருத்தியமைக்கப்பட்ட மீச்சிறு கைவர்க்க முறை மதிப்பீடு $\hat{m}=0.22602$ ஐ $i(m)$-ல் சமனிட்டால்,

$$i(\hat{m}) = i(0.22302)$$
$$= 40\left[\frac{1}{2.22302} + \frac{2}{0.77398} + \frac{1}{0.22602}\right]$$

என்றால், இம்மதிப்பீட்டிற்கான திட்டப்பிழை $= \sqrt{\dfrac{1}{i(\hat{m})}}$

திட்டப்பிழை $= 0.05789$ என்று அறிகின்றோம்.

இவ்விரண்டு திட்டப் பிழைகளுக்குள் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழையானது, திருத்தியமைக்கப் பட்ட மீச்சிறு கைவர்க்க மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழையை விடக் குறைவாக இருப்பதால், மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு தான் சிறந்தது என்று தீர்மானிக்கின்றோம்.

மதிப்பீட்டு முறைகளையும் அவற்றின் குணப்பண்புகளையும் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் போட்டு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம். இங்கு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறை, திருப்புத் திறன்கள் முறை மீச்சிறு கைவர்க்க முறை இம்மூன்று முறைகளை மட்டும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கின்றோம்.

| கண்டறியப்படும் குணப்பண்புகள் | மதிப்பீட்டு முறைகள் | | |
|---|---|---|---|
| | மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறை | திருப்புத்திறன் முறை | மீச்சிறு கைவர்க்க முறை |
| 1. நடுநிலைமாறாத் தன்மை (Unbiasedness) | ○ | ○ | ○ |
| 2. கொள்கை மாறாத் தன்மை (Consistency) | √ | ○ | ○ |
| 3. திறமை வாய்ந்த தன்மை (Efficiency) | √ 90% | × | √ |
| 4. போதுமான தன்மை (Sufficiency) | √ | ○ | ○ |
| 5. மாறுபாடற்ற தன்மை (Invariance) | √ | × | × |
| 6. செய்முறையில் சடுதியில் செய்தல் (Practical Expediency) | × | √ | × |
| 7. பயன்பாடுகள் (Applications) | (i) அடர்த்திச் சார்பலன் தெரிந்திருக்க வேண்டும். (ii) விலங்கியல் துறை அள வெடுப்புகளில் உபயோகப்படுகிறது. (iii) பழிப்பு செய்யப்பட்ட மாதிரிகளில் (censured samples) பயன்படுகிறது. | (i) அடர்த்திச் சார்பலன் தெரிந்திருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. (ii) தொகுப்பு செய்யப்பட்ட அல்லது தொகுக்கப்படாத புள்ளி விவரங்களைப் பயன் படுத்த முடியும். | (i) காரணகாரிய நிகழ் தகவு (Apriori Probability) தெரிந்திருக்க வேண்டும. (ii) தொகுப்பு செய்யப் பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு மட்டுமே இம்முறை பயன்படும். (iii) ஒவ்வொரு அறை (கட்டத்தினுள்ளும்) க்குள்ளும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை இருக்க வேண்டும். (Limited to a number in each cell) |

குறிப்பு : இங்கு ○ இருக்கலாம் என்பதையும் (May be)
× இல்லை என்பதையும் (No)
√ உண்டு என்பதையும் (Yes) குறிக்கின்றது.

### பயிற்சிகள்

1. சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பீட்டின் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறையினை விளக்கிடுக. மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகளின் முக்கிய குணப் பண்புகளில் சிலவற்றை எழுதவும்.

2. $X$ எனும் ராண்டம் மாறி முறையே $p$, $1-p$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் முறையே $0$, $1$, மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்ளுகிறது. $n$—அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியைக் கொண்டு $p$க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டினைக் கண்டுபிடி.

3. $X$-ன் அலைவெண் சார்பலன்

$$f(X;\theta) = (1+\theta)\,X^{\theta},\quad \theta > 0,\quad 0 < x < 1$$

என்றால், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்ற $n$ மதிப்புகளுக்கு $\theta$-ன் மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

4. $X$-ன் நிகழ்தகவுச் சார்பலன் :

$$f(X;\theta) = \frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{X}{\theta}};\ X > 0,\ \theta > 0$$

என்றால், $\theta$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு யாது?

5. கீழ்க்கண்ட வகைகளுக்கு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறையில் $\theta$-க்கான மதிப்பீடுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்:

(i) $f(X;\theta) = \binom{n}{X}\cdot \theta^{X}(1-\theta)^{n-X};\ X = 0, 1, 2, \ldots n$

(ii) $f(X;\theta) = \dfrac{1}{\alpha!\,\theta^{x+1}}\cdot x^{\alpha}\cdot e^{-x/\theta},\ 0 < x < \infty$

(iii) $f(X;\theta) = \dfrac{(1+\theta)}{(x+\theta)^2},\ 1 < x < \infty$

6. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் :

$$f(X;\ \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2} \cdot e^{-(X-\theta\ )/\theta_2} \qquad \theta_1 < x < \infty$$

$$-\infty < \theta_1 < \infty, \quad 0 < \theta_2 < \infty$$

$= 0$ மற்ற இடங்களில் எல்லாம்

என்றால், இத்தகைய பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரி மதிப்புகள் $X_1, X_2, \ldots X_n$-க்கு மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறையினைப் பயன்படுத்தி $\theta_1, \theta_2$-க்கான மதிப்பீடுகளைக் கணிக்கவும்.

7. ஒரு மாறியானது 1,2,3,4 என்ற மதிப்புகளை முறையே $\frac{1-\theta}{2}$, $\frac{1-\theta}{2}$, $\theta(1-\theta)$, $\theta^2$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுத்துக் கொள்ளுவதாக அனுமானிப்போம். இவற்றின் கண்டறிந்த அலை வெண்கள் முறையே $n_1, n_2, n_3, n_4$ என்றால் $\theta$-வுக்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டைக் கண்டறிக.

8. ஓர் இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாட்டுக்கான மீப்பெரு நிகழ் தன்மை மதிப்பீட்டினைக் கண்டறிக. இங்கு முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu$, தெரிந்த மதிப்பு என்று கொள்க. இந்த மாறுபாட்டுக்கான மதிப்பீடு நடுநிலையற்றதா என்று ஆராய்க.

9. ஒரு பிறப்பு மூலத்துக் குரிய சோதனையில் (Genetic experiment), 4 வகைகளுக்கான கண்டறிந்த அலைவெண்கள் முறையே 2997, 1908, 1207, 308 என்றும், அறிமுறையில் இந்த அலைவெண்கள் முறையே $\frac{2+\theta}{4}$, $\frac{1-\theta}{4}$, $\frac{1-\theta}{4}$, $\frac{\theta}{4}$ என்ற விகிதத்தில் இருக்க வேண்டும் என்றால் $\theta$-க்கான மீப்பெரு நிகழும் தன்மை மதிப்பீட்டினைக் கண்டுபிடி. மேலும் இந்த மதிப்பீட்டின் மாறுபாட்டையும் மதிப்பிடுக.

10. திருப்புத் திறன்களின் முறையை உபயோகித்துக் கீழ்க் கண்ட பரவல்களுக்கு $\theta$-வின் மதிப்பீட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(a) $f(x;\theta) = (\theta + 1)\ x^{\theta}, \quad 0<x<1$

(b) $f(x;\theta) = e^{-\theta}\, \theta^{x} / \{ x!\,(1-e^{-\theta}) \}. \quad x = 1, 2, 3 \ldots$

11. $X$ என்ற ராண்டம் மாறி 0,1,2 என்ற மதிப்புகளை முறையே

$$\frac{\theta}{4N} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\theta}{N}\right)$$

$$\frac{\theta}{2N} + \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\theta}{N}\right)$$

$$\frac{\theta}{4N} + \frac{1-\alpha}{2}\left(1 - \frac{\theta}{N}\right)$$

என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுத்துக் கொள்ளுகிறது. இங்கு $N$ ஒரு தெரிந்த எண் $\theta$, $\alpha$ இரண்டும் தெரியாத சுட்டுருப்புகள் $X$-ன் 75 தனித்த குறிப்பீடுகள் (observations) 27, 38,10 என்ற அலைவெண்களுடன் 0,1,2 என்ற மதிப்புகளை முறையே கொடுக்குமானால் $\theta$, $\alpha$ இவற்றின் மதிப்பீடுகளைத் திருப்புத் திறன்களின் முறை கொண்டு மதிப்பீடு செய்க.

12. கீழே தரப்பட்ட விவரங்கள் பாய்சான் பரவலைச் சார்ந்து இருப்பதாகக் கொள்வோம். $\theta$-ன் மதிப்பை மீப்பெரு நிகழும் தன்மை முறையில் மதிப்பீடு செய்க. திருத்தியமைக்கப் பட்ட மீச்சிறு கைவர்க்க முறையிலான மதிப்பீட்டையும் கண்டு பிடித்து இரண்டு மதிப்பீடுகளையும் ஒப்பிடுக.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f$: | 100 | 65 | 22 | 8 | 1 |

# 4. இடைவெளி மதிப்பீடு

## (Interval Estimation)

ஒரு சுட்டுறுப்புக்கான மதிப்பீட்டை ஒரு தனி மதிப்பாக (by a single value) மதிப்பீடு செய்யும் முறைகளை இதுவரை ஆராய்ந்தோம். அத்தகைய மதிப்பீட்டைப் புள்ளி மதிப்பீடு (Point Estimation) என்று கூறுகிறோம். ஒரு மாற்று முறை (alternative procedure) யானது சுட்டுறுப்பின் தனி மதிப்பைச் சரியாகக் கண்டறிவதற்குப் பதிலாக, அந்தச் சுட்டுறுப்பு எந்த இடைவெளிக்குள் அமைந்து காணப்படுகிறது என்று நாம் ஆராய்ந்து ஓர் இடைவெளியினைக் கண்டுபிடிக்கின்றோம். இத்தகைய மதிப்பீட்டை "இடைவெளி மதிப்பீடு" (Interval Estimation) என்று அழைக்கின்றோம். இந்த அத்தியாயத்தில் சுட்டுறுப்புக்கான இடைவெளி மதிப்பீட்டினைப்பற்றி நாம் விவரமாகப் படிப்போம்.

$T_2 > T_1$ என்றவாறு, $T_1$, $T_2$ என்பன இரு மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவைகள் என்று கொள்வோம். இவற்றின் இணைந்த பரவலில் காணப்பெறும் ஒரு சுட்டுறுப்பு $\theta$ என்றால், $\theta$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$P(T_1 < \theta < T_2) = 1-\alpha$$

என்று கொள்வோம். இங்கு $\alpha$ என்பது ஒரு முன்பே குறிக்கப்பட்ட ஒரு மாறிலியாகும். இவ்வாறு இருந்தால் $(T_1, T_2)$ என்ற இவைவெளி மதிப்பீடு, $(1-\alpha)$ என்ற நம்பிக்கைக் கெழுவுடன் கூடிய $\theta$-க்கான ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளி என்று அழைக்கப்படும்.

ஒரு தரப்பட்ட சுட்டுறுப்பிற்கு, $(1-\alpha)$ என்ற ஒரே அளவு நம்பிக்கைக் கெழுவைக் கொண்ட, பலவித நம்பிக்கை இடைவெளிகள் இருக்கமுடியும். சில நிபந்தனை நியதிகளைப் பயன்படுத்தி, ஏற்றதொரு, தகுதியான ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை நாம் தீர்மானிக்கமுடியும்.

$$P(\theta > T_2) = 1-\alpha$$

அல்லது $P(\theta < T_1) = 1-\alpha$ என்றவாறான ஒருபக்க நம்பிக்கை இடைவெளியானது $(-\alpha, T_1)$ அல்லது $(T_2\ \alpha)$ என்ற வகைகளைச் சார்ந்தவாறு இருக்கும். நம்பிக்கைக் கெழுவானது, சுட்டுறுப்பின் உண்மை மதிப்பு இந்த இடைவெளிக்குள் விழுகிறது என்ற ஓர் உறுதி அளவைத் (a measure of assurance) தருகிறது. நம்பிக்கை மதிப்பீடுகள் இயற்கையாகவே $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற மாதிரி மதிப்புகளின் சார்பலன்களாக உள்ளன.

## 4.1 நம்பிக்கை இடைவெளிக்கும் எடுகோள் சோதனைக்கும் இடையேயான தொடர்பு (Relationship of Confidence Interval to Hypothesis Testing)

$m = m_0$ என்ற எடுகோளை வேறு ஒரு மாற்று எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதிப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். முதல் வகைப் பிழை (error of first kind) $\alpha$ என்றும் தீர்வுக் கட்டப் பகுதி (critical region) $\omega$ என்றும் கொள்வோம். இங்கு $X = \{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற மாதிரி மதிப்புகளுக்கான ஏற்கத்தக்க பகுதி (Acceptable Region) $\bar{\omega}$ என்றும் அனுமானிப்போம். $(1-\alpha)$ என்ற நம்பிக்கைக் கெழுவைக் கொண்ட $m$-க்கான ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை $I(X_1, X_2, \ldots X_n)$ என்று எழுதுவோம்.

இப்போது

$$P(m \in I / m)$$

$$= P(x \in \bar{\omega} / m) = 1 - \alpha$$ என்று தெரிகிறது.

ஆனால், இருக்கக்கூடிய எல்லா I-களிலும் ஒரு சரியான ஏற்ற தொரு $I^*$ ஐ $\theta \in I^*$, $X \in \bar{\omega}$ எனாருல் மட்டுமே

$$[\theta \in \bar{\omega} \text{ if and only if } X \in \bar{\omega}]$$

என்றவாறு தேர்ந்தெடுக்க முடியும்.

எனவே, ஓர் ஏற்கத்தக்க பகுதி (acceptable region) கிடைக்குமேயானால், (இருக்குமேயானால்) அதைப்பயன்படுத்தி ஒரு தகுதியான நம்பிக்கை இடைவெளியை நாம் கண்டுபிடிக்க முடியும். மேலும் ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளி நமக்குக் கிடைக்குமேயானால், எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கு அதைப் பயன்படுத்த முடியும்.

எனவே, வழி முறையானது;

"$m_0 \in I^*$ என்றால் ஏற்றுக்கொள் இல்லாவிடில் தள்ளுபடி செய்" என்பதேயாகும்.

விளக்கம் : $m$ சராசரி, 1 மாறுபாடு கொண்ட ஓர் இயல் நிலைப்பரவல் $N(m, 1)$ என்றிருக்கட்டும்.

$H_0 : m = 0$ என்ற சூன்ய எடுகோளை

$H_1 : m \neq 0$ என்ற மாற்று எடுகோளுக்குச் சோதிக்க வேண்டும் என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

$\alpha = 0 \cdot 05$ என்று இருக்கட்டும்.

$\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற மாதிரி ராண்டம் மாறிகளுக்கு

$$\bar{X} \cap N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad \sigma = 1 \text{ என்றால்}$$

$$\frac{\bar{X} - m}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cap N(0, 1) \text{ ஆகும்.}$$

$$P_n \cdot \left[ \left| \frac{\bar{X} - m}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right| < 1 \cdot 96 \right] = 0.95 \text{ என்பதால்}$$

$0 \cdot 95$ நிகழ்தகவில் $-1 \cdot 96 < \sqrt{n}\,(\bar{X} - m) < 1 \cdot 96$

அதாவது $0 \cdot 95$ நிகழ்தகவில் $\frac{-1 \cdot 96}{\sqrt{n}} < (\bar{X} - m) < \frac{1 \cdot 96}{\sqrt{n}}$ (1)

இதையே மாற்றி எழுதினால்

$$\bar{X} - \frac{1 \cdot 96}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{1 \cdot 96}{\sqrt{n}} \text{ ஆகிறது.} \qquad \ldots (2)$$

(1)-ம், (2)-ம் ஒன்றுக்கொன்று ஒத்தியைமான விவர வாசகங்களாகும்.

சூனிய எடுகோளின்படி $\bar{\omega}$ஐயும் $I$ஐயும் கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

$$\bar{\omega} : \left(-\frac{1.96}{\sqrt{n}}, \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right)$$

$$I : \left(\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right) \text{ என்றால்}$$

"$\bar{X} \in \bar{\omega}$ என்றால் ஏற்றுக் கொள் அல்லது நிராகரி" என்ற சோதனை முறையைப் பயன்படுத்தி $I$-ன் மதிப்பைக் காண்கிறோம்.

அதேபோல, $I$ஐ உபயோகித்துச் சோதனையைக் கீழ்க்கண்டவாறு செய்கின்றோம்.

"$m_0 \in I$ என்றால் ஏற்றுக்கொள் அல்லது தள்ளிவிடு (நிராகரி)"

## இயல்நிலைப் பரவல்

**4.2** சராசரி $m$ சுட்டுறுப்புக்கான ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியைக் கண்டுபிடித்தல் :— (i) $\sigma$ தெரிந்தபோது

$X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பன $(m, \sigma)$ சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாறிகள் என்றால்,

$$\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \text{ என்ற மாறியும்}$$

சராசரி $m$, மாறுபாடு $\frac{\sigma^2}{n}$ இவற்றைக் கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப் பரவலில் அமைகின்றது.

எனவே, $\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட (Standardised) இயல்நிலை மாறியாகும்.

$$Z = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cap N(0, 1)$$

இப்போது

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ என்பது இத்தகைய தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலைப் பரவலின் மேல்மட்ட (Upper) $100 \frac{\alpha}{2}\%$ புள்ளியாக இருக்கட்டும்.

எனவே,

$$P_r\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

அல்லது

$$P_r\left[ -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} < \bar{X} - m < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$

$$P_r\left[ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; Z_{\frac{\alpha}{2}} > -(\bar{X} - m) > -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; Z_{\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$

அதாவது,

$$P_r\left[ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; Z_{\frac{\alpha}{2}} > m > \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$

$$\therefore \quad P_r\left[ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; Z_{\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$ ஆகும்;

எனவே, நம்பிக்கைக் கெழு $1-\alpha$ என்றால், $\sigma$-ன் மதிப்பு தெரிந்த போது, $m$-க்கான இடைவெளி மதிப்பீட்டிற்கு ஏற்ற நம்பிக்கை இடைவெளியானது.

$$\left( \bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$ ஆகின்றது.

இப்போது $1-\alpha = 95\%$ என்றால் $\frac{\alpha}{2} = 2{\cdot}5\%$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் மேல் மட்ட 25% புள்ளியாகும்.

$Z_{2\cdot5\%} = Z_{0\cdot025} = 1{\cdot}96.$

ஆகையால், சுட்டுறுப்பு $m$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் கீழ்க்கண்ட விதம் எழுதலாம் :

$$\left( \bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \; \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

இங்கு $T_1 = \bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = நம்பிக்கை இடைவெளியின் கீழ் எல்லை.

$T_2 = \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = நம்பிக்கை இடைவெளியின் மேல் எல்லை.

(ii) $\sigma$ தெரியாதபோது : $m$-க்கான 100 $(1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி $\sigma$ தெரியாதபோது ஸ்டூடன்ட்ஸின் $t$ பரவலை உபயோகித்து $m$-க்கான இடைவெளி கண்டுபிடிக்கப் படுகிறது.

$$t = \frac{\bar{x}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \cap t_{n-1} \text{ (வரையற்ற பாகைகளில்)}$$

இங்கு $S^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (X_i - \bar{x})^2$ ஆகும்.

இப்போது $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட (degrees of freedom) $t$-பரவலின் மேல்மட்ட $100 \frac{\alpha}{2}\%$ புள்ளி $= t_{\frac{\alpha}{2}}$ என்று கொள்க.

$\sigma^2$-க்குப் பதிலாக $S^2$ ஒரு நல்ல மதிப்பீடாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுவதால் $\frac{\bar{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \cap t_{n-1}$ என்ற பரவலின் மூலம் $m$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்போம்.

$$P_r\left[\left|\frac{\bar{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

அதாவது,

$$P_r\left[-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\therefore \quad P_r\left[-t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X}-m < t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

அல்லது

$$P_r\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ஆதலால், $m$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}\ t_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}\ t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

இங்கு $t$ பரவலில் $(n-1)$ வரையற்ற பாகைக்கான 100 $\frac{\alpha}{2}$%-ன் மதிப்பை அட்டவணையின் மூலம் கண்டு எழுதலாம். 95% நம்பிக்கை இடைவெளிக்கு $1-\alpha=0{\cdot}95$ என்று கொண்டு $t_{\frac{\alpha}{2}}$-ன் மதிப்பை $t$ பரவலின் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் $(n-1)$ வரையற்ற பாகையின் மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டியது.

இதேபோல 99% நம்பிக்கை இடைவெளிக்கு $1-\alpha=0{\cdot}99$ என்பதால் $t$-பரவலின் 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் $(n-1)$ வரையற்ற பாகையின் மதிப்பாக $t_{\frac{\alpha}{2}}$-ன் மதிப்பை எடுத்துக் கொண்டு கணக்கிட வேண்டும்.

உதாரணம் : $\sigma^2=100$ ஐக் கொண்ட ஓர் இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $n=25$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது. மாதிரிச் சராசரி $\bar{X}$-ன் மதிப்பு$=67{\cdot}53$ என்று தரப்பட்டால், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு : $X\ \{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ ஒரு ராண்டம் மாதிரி.

$$\therefore\quad \bar{X} \cap N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\bar{X}$-ன் பரவல் சராசரி $\mu$, $\frac{\sigma^2}{n}$ மாறுபாடு இவற்றைக் கொண்ட ஓர் இயல் நிலைப் பரவலைச் சார்ந்தது.

$$\text{எனவே, } \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cap N(0,1) \text{ ஆகும்.}$$

$1-\alpha=0{\cdot}95$ என்பதாலும், $n=25$, $\sigma^2=100$ $\bar{X}=67{\cdot}53$ என்பதாலும்,

$$P_r\left[\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<1{\cdot}96\right]=0{\cdot}95$$ என்பதனை

$$P_r\left[\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$= 0{\cdot}95$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{\cdot}96$ ஆகும்.

ஆகவே, $\mu$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியானது.

$$\left(\bar{X}-1{\cdot}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+1{\cdot}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left[67{\cdot}53-1{\cdot}96\left(\frac{10}{5}\right),\ 67{\cdot}53+1{\cdot}96\left(\frac{10}{5}\right)\right]$$

$= (63.61, 71.45)$ ஆகின்றது.

உதாரணம்: $n = 10$, $\bar{x} = 8{\cdot}22$, $s = 1.17$ என்றால் $\mu$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி யாது?

இங்கு $s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i-\bar{x})^2 = (1{\cdot}17)^2$ ஆகும்.

$$\frac{ns^2}{0}=\Sigma(X_i-\bar{x})^2=(n-1)\,S^2.$$

$$\frac{S^2}{n}=\frac{s^2}{n-1}$$

$$\frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{s}{\sqrt{n-1}}=\frac{1.17}{\sqrt{9}}=\frac{1.17}{3}=0{\cdot}39$$ ஆகும்.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு $\sigma^2$ தெரியாதபோதும் $n$-ன் அளவு சிறியதாக இருக்கையில் $S^2$ஐ $\sigma^2$-ன் நடுநிலை மாறுத ஒரு மதிப்பீடாக எடுத்துக்கொண்டு $t$ பரவலைச் சார்ந்தவாறு $\mu$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி மதிப்பீட்டைக் காண்போம்.

$\mu$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$\left( \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} , \ \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$ ஆகும்.

$1 - \alpha = 0.95, \frac{\alpha}{2}\ 0{\cdot}025$ என்பதால் $n - 1 = 9$ வரையற்ற பாகையுடன் கூடிய $t$-பரவலிற்கு $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.26$ என்பதால் ($t$-அட்டவணை 3 மூலம்)

$\mu$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$(3{\cdot}22 - 0.39 \times 2.260, 3.22 + 0.39 \times 2.260)$$
$$= (2{\cdot}34, 4{\cdot}10)$$ ஆகிறது.

$\mu$-க்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளி:

$n - 1 = 9$-க்கு $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0{\cdot}005} = 3.250$ ($t$-அட்டவணையிலிருந்து) என்பதால்

$\mu$-க்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளி:

$$\left[ \bar{x} - 0.39 \left( t_{\frac{\alpha}{2}} \right), \ \bar{x} + 0.39 \left( t_{\frac{\alpha}{2}} \right) \right]$$
$$= (3.22 - 0{\cdot}39 \times 3.250,\ 3{\cdot}22 + 0{\cdot}39 \times 3.250)$$
$$= (1.94, 4{\cdot}50)$$ ஆகும்.

## 4.3 இரு சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடுகளுக்கான இடைவெளி மதிப்பீடு (Interval Estimation of Difference between Two Means) :

இரு மாதிரிச் சராசரிகளினிடையேயான வேறுபாடு ஒரு ராண்டம் மாறியாகும்.

$n_1$, $n_2$ அளவுகளுடைய இரு தனித்த ராண்டம் மாதிரிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இவை $\mu_1$, $\mu_2$ சராசரிகளையும், $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ மாறுபாடுகளையும் முறையே கொண்ட இரு இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை எனக் கொள்வோம்.

இவ்விரண்டு மாதிரிச் சராசரிகளும் $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ என்றால்,

வேறுபாடு $D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ எனக் கொள்வோம்.

இப்போது $D$ என்ற மாறியானது $(\mu_1 - \mu_2)$ சராசரியையும் $\frac{\sigma_1^2}{n_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ மாறுபாட்டையும் கொண்ட ஓர் இயல் நிலை மாறியாகும். எப்படியெனில்,

$$E(D) = E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2 = \delta, \text{ என்க.}$$

$$V(D) = \sigma^2_D = \sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$$

$= V(\bar{x}_1) + V(\bar{x}_2)$; ஏனெனில், இரு மாறிகளும் (தனித்த) தற்சார்பற்றவையாகும்.

$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ இரண்டும் இயல்நிலை மாறிகளானதால், $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = D$ யும் ஓர் இயல் நிலை மாறியாகும்.

$D$ என்பது இரு மாதிரிச் சராசரிகளின் வேறுபாடு என்றால், $\delta$ என்பது இரு முழுமைத் தொகுதிச் சராசரிகளின் வேறுபாடு ஆகும். இந்த வேறுபாடு $\delta$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளிக்கான மதிப்பீட்டினை நாம் இப்போது காண்போம்.

$(1 - \alpha)$ என்ற நம்பிக்கைக் கெழுக் கேற்ற $\delta$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி மதிப்பீடு கீழ்க்கண்ட நிகழ் தகவு மூலம் கிடைக்கின்றது.

$$Z = \frac{D - \delta}{\sigma_D} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \cap N(0, 1) \text{ என்றால்,}$$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ இயல்நிலைப் பரவலின் மேல்மட்ட $100\frac{\alpha}{2}\%$ புள்ளி என்றால்,

$$P_r \left[ \left| \frac{D - \delta}{\sigma_D} \right| < Z_{\alpha} \right] = 1 - \alpha$$

எனவே,

$$P_r \left[ D - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \delta < D + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

எனவே, δ-க்கான 100 $(1-\alpha)$% நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$D = \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் : ஒரு காப்புறுதித் தொழிற்சாலையில் (insurence industry) கல்லூரிப் படிப்பு படித்த தொழிலாளர்களில் 45 பேர் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியையும், பள்ளிப்படிப்பு படித்த தொழிலாளர்களில் 60 பேர் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியையும் எடுத்துக் கொள்வோம். இரு வகைத் தொழிலாளர்களிடையே உள்ள விற்பனைத் திறன்களின் வேறுபாட்டை அளந்து பார்க்க விரும்புகின்றோம். கல்லூரிப்பட்டம் வாங்கிய தொழிலாளர்களின் சராசரி விற்பனை 32 ஆயிரம் டாலர்கள் என்றும், பள்ளி டிப்ளமா வாங்கிய தொழிலாளர்களின் சராசரி விற்பனை 25 ஆயிரம் டாலர்கள் என்றும் தெரிகிறது. மாத விற்பனைகளின் மாறுபாடுகள் முறையே 48 என்றும் 56 என்றும் இருக்குமேயானால், இரு வகையான விற்பனையாளர்களின் சராசரி விற்பனைகளுக்கு இடையேயான வேறுபாட்டிற்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி என்ன என்று பார்ப்போம்.

$n_1 = 45$, $n_2 = 60$; $\bar{x}_1 = 32$, $\bar{x}_2 = 25$.

$\sigma_1^2 = 48$, $\sigma_2^2 = 56$ என்றால்,

$D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 32 - 25 = 7$.

முழுமைத்தொகுதிச் சராசரிகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு δ என்றால், $S$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= D \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= 7 \pm 1{\cdot}96 \sqrt{\frac{48}{45} + \frac{56}{60}}$$

$$= 7 \pm 1{\cdot}96\,(1{\cdot}414) = (4{\cdot}28,\ 9{\cdot}77) \text{ ஆகும்.}$$

### 4.4 ஒரு விகிதத்துக்கான இடைவெளி மதிப்பீடு (Interval Estimation of a proportion)

ஒரு சோதனையில் $n$ முயற்சிகளில் $X$ வெற்றிகள் ஏற்படுமாயின், $X$ மாறியை ஓர் ஈருறுப்பு மாறி என்று கூறினால் ஒரு மாதிரி வெற்றி விகிதத்தை $\hat{p}$ என்று கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$\hat{p} = \frac{X}{n}$ ஆகும்.

இப்போது முழுமைத்தொகுதியின் வெற்றி விகிதம் $p$ என்றால் $p$-க்கான மதிப்பீட்டிற்கு ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை நாம் காண முயலுவோம். $\hat{p}$ என்ற ராண்டம்மாறி $p$ எனும்சராசரியையும் $\frac{p(1-p)}{n}$ என்ற மாறுபாட்டையும் கொண்டு காணப்படுகிறது.

மாதிரிகள் பெரிய அளவுடையதாக இருப்பின், மாதிரிவிகிதம் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகிறது என்று நாம் அறிவோம்.

எனவே, விகிதத்தின் மாறுபாட்டை $\frac{p(1-p)}{n}$ என்பதற்குப் பதில் $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ என்று எழுதுவோம்.

ஆகையால்,

$$P_r\left[\frac{X}{n}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}<p<\frac{X}{n}+Z_{\frac{\alpha}{n}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]=1-\alpha$$

எனவே, $p$-க்கான $100(1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$\frac{X}{n}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ .$$

உதாரணமாக, $p$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\frac{X}{n}\pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

அதே போல $p$-க்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\frac{X}{n}\pm 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$ ஆகும்.

ஓர் இட்லி சட்னி அரைக்கும் இயந்திரத்தை அதன் விலை, தரம் தரப்பட்டபோது இந்தியக் குடும்பப் பெண்மணிகள் எத்தனை விகிதத்தினர் வாங்க விரும்புவார்கள் என்று அந்த இயந்திரம் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலை அறிய விரும்புகின்றது.

ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் 100 குடும்பப்பெண்மணிகளில் 20 பேர் வாங்க விரும்புகின்றனர்; 80 பேர் பிரியப்படவில்லை, என்ருல் ஒரு 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி தேவைப்படுகின்றதென்ருல், உண்மை விகிதம் $p$ எவ்வளவாக இருக்கும்?

ஒரு 95% நம்பிக்கை இடைவெளிக்கு $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1 \cdot 96$

$n = 100, \quad X = 20$ என்ருல்.

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{20}{100} = 0.20$$

எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் சுட்டுறுப்பான விருப்பு விகிதம் $p$-க்கான தோராய 95% நம்பிக்கை இடைவெளியானது

$$\left(\frac{X}{n} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \frac{X}{n} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

என்ருல், நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= \frac{20}{100} \pm 1.96\sqrt{\frac{0.20(0.80)}{100}}$$

$$= 0.20 \pm 1.96\sqrt{\frac{.16}{100}}$$

$$= 0.20 \pm 1.96 \times 0.04$$

$$= 0.20 \pm \frac{7.84}{100}$$

$$= 0.2000 + 0.0784$$

$$= (0.1216, 0.2784)$$

எனவே, $0.1216 < p < 0 \cdot 2784$ ஆகும்.

## இயல்நிலைப் பரவல்

### 4.5 $\sigma^2$-க்கும் $\sigma$-க்குமான நம்பிக்கை இடைவெளிகள் :

(i) $m$ தெரியாவிட்டால் : இங்கு $S_1^2 = \Sigma(X_i - \bar{x})^2$ என்று இருக்கட்டும்.

$\frac{S^2{}_1}{\sigma^2}$ ஒரு $(n-1)$ வரையற்ற பாகையுடன் கூடிய ஒரு $x^2$ கைவர்க்கப்பரவலாகிறது.

இந்த $x^2$-ன் மேல் மட்ட, கீழ்மட்ட $00\frac{\alpha}{2}$% புள்ளிகளை $x^2_{\frac{\alpha}{2}}$ என்றும், $x^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ என்றும் முறையே கூறலாம்.

எனவே,

$$P_r\left[x^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{S_1^2}{\sigma^2} < x^2_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

அதாவது,

$$P_r\left[\frac{1}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\sigma^2}{S_1^2} > \frac{1}{x^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\therefore \quad P_r\left[\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\sigma^2}{S_1^2} < \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1 - \alpha$$

ஆதலால்,

$$P_r\left[\frac{S_1^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{S_1^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1 - \alpha$$

$\therefore$ **$\sigma^2$-க்கான $100(1-\alpha)$% நம்பிக்கை இடைவெளி ;**

$$\left(\frac{S_1^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_1^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

$\sigma^2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளிக்கான நிகழ் தகவிலிருந்து

$$P_r\left[\frac{S_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}} < \sigma < \frac{S_1}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right] = 1 - \alpha.$$

ஆகையால், $\sigma$-க்கான $100(1-\alpha)$% நம்பிக்கை இடைவெளியை $\left(\frac{S_1}{\sqrt{x^2_{\frac{\alpha}{2}}}}, \frac{S_1}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)$ என்று குறிக்கின்றோம்.

(ii) $m$-ன் மதிப்பு தெரிந்தபோது : இங்கு $S_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$

இது $n$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு கை வர்க்கமாகும்.

எனவே, முன்னதைப் போன்றதொரு நம்பிக்கை இடைவெளி கிடைக்கிறது. ஆனால், $(n-1)$-க்குப் பதில் $n$ வரையற்ற பாகைகள் இருப்பதால், $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$-ம் $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$-ம், $n$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட $\chi^2$ பரவலின் மேல், கீழ் மட்ட $100\frac{\alpha}{2}\%$ புள்ளிகளாகும்.

எனவே, $\sigma^2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$\left(\frac{S_2^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_2^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

மேலும் $\sigma$-க்கான $100(1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$\left(\sqrt{\frac{S_2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}}, \sqrt{\frac{S_2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)$$ ஆகிறது.

இங்கு $\sigma^2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியினைக் கண்டு பிடிக்க, வேறு ஒரு முறையைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

**மாற்றுமுறை :** சராசரி $\mu$, மாறுபாடு $\sigma^2$, சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற $n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம். இப்போது $\sigma^2$-க்கான ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியைக் கண்டுபிடிக்கும் பிரச்னையை ஆராய்வோம். முதலில் $\mu$-வின் மதிப்பு ஒரு தெரிந்த எண்ணாக இருக்கும்போது, பிறகு இரண்டாவதான $\mu$-வின் மதிப்பு தெரியாதபோது. $\sigma^2$-ன் நம்பிக்கை இடைவெளிகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

(i) $\mu$ தெரிந்தபோது : இப்போது $Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$

என்று வரையறுப்போம். $Y$-மாறி $n$ வரையற்ற வகைகளைக் கொண்ட ஒரு $\chi^2$ மாறியாகும். 0.95 என்ற ஒரு நிகழ்தகவை நாம்

எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரு குறிப்பிட்ட நேர் எண் $n$-க்கு $a$, $b$ என்ற இரண்டு மதிப்புகளை அட்டவணையின் மூலம் தீர்மானிப்போம். இங்கு $a < b$ ஆகும்.

மேலும் $P_r(a < Y < b) = 0.95$ என்றவாறு $a, b$ மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும். எனவே,

$$P_r\left[a < \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < b\right] = 0{\cdot}95$$

அல்லது

$$P_r\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{b} < \sigma^2 < \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{a}\right] = 0.95$$

$\mu$, $a$, $b$ என்பன அறிந்த மாறிலிகள் என்பதால்

$\sum \frac{(X_i - \mu)^2}{b}$, $\sum \frac{(X_i - \mu)^2}{a}$ ஒவ்வொன்றும் ஒரு மாதிரி புள்ளியளவையாகும்; மேலும்

$$\left[\sum \frac{(X_i - \mu)^2}{b}, \sum \frac{(X_i - \mu)^2}{a}\right]$$

என்ற இடைவெளி, $0{\cdot}95$ என்ற நிகழ்தகவைக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் இடைவெளி.

$\sigma^2$ என்ற சுட்டுறுப்பின் தெரியாத மதிப்பு இந்த இடைவெளிக்குள் விழுந்துள்ளது. இப்போது $a$. $b$ என்ற இரண்டு மதிப்புகளையும் காண்பதற்கான ஒரு பொதுவான முறை கீழ்க் கண்டவாறு விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$$P_r(y < a) = 0{\cdot}025$$

மற்றும் $$P_r(b < y) = 0{\cdot}025$$

(ii) $\mu$ தெரியாதபோது : மாதிரி மதிப்புகளிலிருந்து $\bar{X}$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அதன் மூலம்

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \cap \chi^2 (n-1)\ d.f.$$

$\frac{ns^2}{\sigma^2}$ என்பது $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு கைவர்க்கப்பரவல் என்பதால் $n > 2$ என்றவாறு ஒரு நிலைத்த $n$ மதிப்புக்கு $a, b$ மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

இங்கு $a < b$ ஆகும்.

மேலும் $P_r\left[a < \frac{ns^2}{\sigma^2} < b\right] = 0{\cdot}95$

என்பதற்கு ஏற்றவாறு, $a, b$ மதிப்புகள் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். $a, b$ என்ற மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்கக் கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$P_r\left(\frac{n\,s^2}{\sigma^2} < a\right) = 0{\cdot}025$$

$$P_r\left(\frac{n\,s^2}{\sigma^2} > b\right) = 0{\cdot}025$$

எனவே,

$$P_r\left(\frac{ns^2}{b} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{a}\right) = 0{\cdot}95$$

ஆகவே, சுட்டுருப்பு $\sigma^2$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= \left(\frac{ns^2}{b}, \frac{ns^2}{a}\right) \text{ ஆகிறது.}$$

இதேபோன்று 90% நம்பிக்கை இடைவெளி, 99% நம்பிக்கை இடைவெளி போன்றவற்றை அவற்றிற்கேற்ற $a,b$ மதிப்புகளின் மூலம் கண்டறியலாம்.

உதாரணமாக, $n=9$, $s^2=7.63$ என்று தரப்பட்டிருந்தால், $\sigma^2$ மாறுபாட்டிற்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= \left(\frac{9 \times 7.63}{b}, \frac{9 \times 7.63}{a}\right)$$

அட்டவணை 4-ன் மூலம், $a = 2.73$ என்றும்; $b = 15{\cdot}5$ என்றும் தெரிகிறது.

எனவே, நம்பிக்கை இடைவெளி $= \left(\frac{9 \times 7{\cdot}63}{15{\cdot}5}, \frac{9 \times 7{\cdot}63}{2{\cdot}73}\right)$

$= (4{\cdot}43, 25{\cdot}15)$ ஆகும்.

உதாரணம் : $\mu = 0, n = 10, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 106.6$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மாறுபாடு $\sigma^2$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி மதிப்பீட்டைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: $\sigma^2$-க்கான, 95% நம்பிக்ககையிடைவெளி $\mu$ கொடுக்கப்பட்டபோது,

$$\left(\frac{S_2^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_2^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

$Y = \chi^2$ என்பது 10 வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு கைவர்க்கப் பரவல் என்பதால்,

$P_r\,[\chi Y < 3.94] = 0{\cdot}05$ என்றும்,

$P_r\,[Y > 18.31] = 0.05$ என்றும்

$\chi^2$ அட்டவணை 4 மூலம் அறிகிறோம். எனவே, $\sigma^2$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி $= \left(\frac{106.6}{18.31}, \frac{106.6}{3.94}\right)$

$= (5.8, 27.1)$ என்று அறிகிறோம்.

## 4·6 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி :

$X$, $Y$ என்பன முறையே $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ என்றவாறுள்ள தனித்த ராண்டம் மாறிகள் என்றால் $\mu_1$, $\mu_2$ தெரியாதபோது, $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியினை நாம் இப்போது கவனிப்போம்.

$X$ பரவலிலிருந்து $n > 2$ அளவுடைய $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற ஒரு ராண்டம் மாதிரியையும், $Y$ என்ற தனித்த பரவலிலிருந்து $m > 2$ அளவுடைய $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ என்ற ஒரு ராண்டம் மாதிரியையும் எடுத்துக் கொள்வோம். $n, m$ இரண்டும் சமமான அளவு இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

$\overline{X}$ , $\overline{Y}$ அவற்றின் சராசரியாக உள்ளன.

$$s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \overline{Y})^2$$ ஆகும்.

$\frac{n s_1^2}{\sigma_1^2}$, $\frac{m s_2^2}{\sigma_2^2}$ என்ற இரு ராண்டம் மாறிகளும் முறையே $(n-1)$, $(m-1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட $(\chi^2)$ கை வர்க்கப் பரவலில் அமைந்துள்ளன.

இப்போது $F$ என்ற ஒரு புள்ளியியல் அளவையை வரையறுப் போம்.

$$F = \frac{ns_1^2/[\sigma_1^2(n-1)]}{ms_2^2/[\sigma_2^2(m-1)]}$$

இந்த $F$ மாறி ஒரு $F$ பரவலில் $n-1$, $m-1$ என்ற சுட்டுறுப்பு களைக் கொண்டவாறு அமைகின்றது. ஒரு முன்னறிந்த நிகழ் தகவுக்கும், உதாரணமாக 0·95-க்கு ஏற்றதும் தரப்பட்ட $n, m$ மதிப்புகளுக்குமான வாறு, $a, b$ என்ற இரு எண்களை நாம் இப் போது கீழ்க்கண்டவாறு தேர்ந்தெடுக்க விரும்புகின்றோம்.

$0 < a < b$ என்றால்,

$$P_r\left[a < \frac{ns_1^2/[\sigma_1^2(n-1)]}{ms_2^2/[\sigma_2^2(m-1)]} < b\right] = 09{\cdot}5$$

அதாவது,

$$P_r\left[a.\frac{ms_2^2/(m-1)}{ns_1^2/(n-1)} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < b.\frac{ms_2^2/(m-1)}{ns_1^2/(n-1)}\right] = 0.95$$

$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியானது.

$$\left(a.\frac{ms_2^2/(m-1)}{ns_1^2/(n-1)},\ b\frac{ms_2^2/(m-1)}{ns_1^2/(n-1)}\right)$$ ஆகும்.

இப்போது $a, b$ இவற்றின் மதிப்பினை $F$-அட்டவணையின் மூலம் அறிகின்றோம்.

உதாரணம் :

$n = 10$
$m = 5.$
$s_1^2 = 20.0$
$s_2^2 = 35.6$ என்று தரப்பட்டபோது,

$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியினை மதிப்பீடு செய்க.

**தீர்வு :**

$n-1=9$, $m-1=4$-க்கு ஏற்றவாறு $F$ அட்டவணை மதிப்பிலிருந்து $a = \frac{1}{3\cdot 63}$ என்றும்,

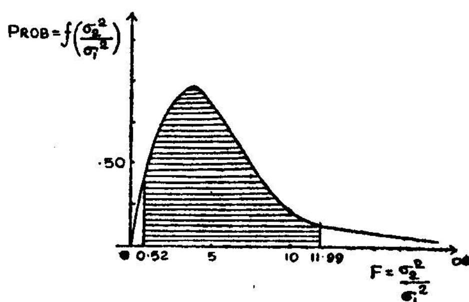
$b = 6\cdot 00$ என்றும் காண்கிறோம்.

எனவே, $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= \left(a.\frac{ms_2^2/m-1}{ns_1^2/n-1}, b\frac{ms_2^2/m-1}{ns_1^2/n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3.63}\quad\frac{5\,(35.6)/4}{10(20.0)/9}, 6.00\ \frac{5(35.6)/4}{10(20.0)/9}\right)$$

$= (0.52, 11.99)$ ஆகும்.




படம் 2.

இதனை வரைபடம் மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

$$\text{Prob} = f\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)$$

படம் : $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி (கோடிட்ட பகுதி).

## பயிற்சிகள்

1. ஓர் இயல் நிலைப்பரவல் $N(\mu, 80)$-லிருந்து 20 அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் சராசரி $\bar{x}$-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு$=81.2$ என்றால், $\mu$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியினை மதிப்பீடு செய்யவும்.

2. $N(\mu, q)$ என்ற ஓர் இயல் நிலைப்பரவலிலிருந்து $n$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் சராசரி $\bar{x}$ ஆக இருக்கட்டும்.

$P_r(\bar{x}-1<\mu<\bar{x}+1) = 0.90$ தோராயமாக என்றால், அதற்கேற்றவாறு $n$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

3. $N(\mu, \sigma^2)$ என்ற ஓர் இயல் நிலைப்பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n = 17$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியிலிருந்து $\bar{x}=4.7$, $s^2=5.76$ என அறிகிறோம். $\mu$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியினைத் தீர்மானி.

4. $Y$ என்பது $b(800,p)$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புப்பரவலைச் சார்ந்துள்ளது என்றால் $Y$-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $y$ என்றால், $p$-க்கான தோராயமான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி என்னவாயிருக்கும்.

5. இரண்டு தனித்த இயல் நிலை மாறிகள் முறையே $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$ பரவலில் அமைந்திருந்து, $n_1 = n_2 = 10$ என்ற சம அளவுடைய இரு மாதிரிகளிலிருந்து கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் கிடைத்தால், அவற்றைப்பயன்படுத்தி $(\mu_1-\mu_2)$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி யாது ?

$$\bar{X} = 4.8, \quad \bar{Y} = 5.6; \quad s_1^2 = 8.64, \quad s_2^2 = 7.88.$$

6. $n=10$, $m = 7$, $\bar{X}=4.2$, $\bar{Y}=3.4$, $s_1^2=49$ $s_2^2=32$ என்றால், $\bar{X} \cap N(\mu_1, \sigma^2)$ $Y \cap N(\mu_2, \sigma^2)$ என்றால், $\mu_1-\mu_2$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் கண்டுபிடி.

7. $Y_1 \cap b(n_1, p_1)$

$Y_2 \cap b(n_2, p_2)$ என்ற ஈருறுப்புப் பரவலில் அமைந்திருப்பின் $y_1=30$, $y_2=80$, $n_1=100$, $u_2 = 400$ என்றால், $p_1 - p_2$-க்கான 95% தோராயமான நம்பிக்கை இடைவெளி மதிப்பீடு என்ன ?

8. இரு முழுமைத் தொகுதிகள் முறையே $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$ என்ற இயல் நிலைப்பரவலில் அமைந்து, அவற்றிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரே அளவு$=n$ கொண்ட இரு தனித்த ராண்டம் மாறிகளின் சராசரி $\overline{X}$, $\overline{Y}$ முறையே என்றால், பொதுவான மாறுபாடு $\sigma^2$ தெரிந்திருந்தால்,

$$P_r\left[X-\overline{Y}-\frac{\sigma}{5}<\mu_1-\mu_2<X-\overline{Y}+\frac{\sigma}{5}\right]=0\cdot 90$$

என்பதற்கொப்பான $n$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

9. இரு இயல்நிலைப் பரவல்கள் $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ என்றால் $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ என்றால், $\sigma_1^2$, $\sigma_1^2$ இரு மதிப்புகளும் தரப்பட்டபோது, $(\mu_1-\mu_2)$-க்கான ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியினை மதிப்பீடு செய்யும் பிரச்சினையை ஆராய்க.

10. ஒரு $N(8, \sigma^2)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n=9$ அளவுடைய ராண்டம் மாதிரியின் மதிப்புகள் முறையே 8·6, 7·9, 8·3, 6·4, 8·4, 9·8, 7·2, 7·8, 7·5 என்றால், $\sigma^2$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியினை அமைக்கவும்.

11. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் $N(\mu, \sigma^2)$ இருந்து எடுக்கப்பட்ட $n=15$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரி $\bar{x}=3\cdot 2$, $s^2=4\cdot 24$ என்ற மதிப்புகளைத் தருகிறது. $\sigma^2$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியினை மதிப்பீடு செய்க.

12. இரு தனித்த இயல்நிலைப்பரவல்கள் முறையே $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ என்றால், $n=16$, $m=10$ என்ற அளவுகளுடைய தனித்த ராண்டம் மாறிகள் $X=8\cdot 6$, $\overline{Y}=13\cdot 6$, $s_1^2=4\cdot 14$, $s_2^2=7\cdot 26$ என்ற மதிப்புகளைத் தருகின்றன. $\mu_1$, $\mu_2$ தரப்பட்டிருந்தால் $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியை மதிப்பீடுக.

# 5. புள்ளியல் எடுகோள்களைச் சோதித்தல்

(Testing Statistical Hypotheses)

**5·1 அறிமுகம் :**

ஒரு புள்ளியியல் எடுகோள் என்பது ஒரு மாதிரி சூத்திரத்தைப் பற்றியதோர் அனுமானம் ஆகும். அதாவது, ஒரு ,ாண்டம் மாறியின் பரவலைப்பற்றிய ஓர் அறிக்கையாகும். வழக்கமாகப் புள்ளியல் பிரச்சினைகளில், ஓர் எடுகோள் என்பது முழுமைத் தொகுதியுடன் சேர்ந்த ஒன்று அல்லது பல சுட்டுறுப்புகளைப் பற்றி விவரிக்கின்றது.

சில சமயங்களில் ஒ கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்கு ஏற்ற ஓர் எடுகோளை வடிவமாக்குவதில் சிக்கல் ஏற்படுகிறது. ஒரு வழியாக அச்சிக்கலைத் தீர்த்து விடுவதாகக் கொண்டோமானால் நமது அடுத்த குறிக்கோள், அந்த எடுகோளைச் சோதிப்பதாகும், இதைச் செய்வதற்காக, எடுகோள் உண்மையானால், தரப்பட்ட மாதிரிப் பரவலின் ஒரு மாதிரி அளவையை (statistic)க் கவனிப்போம். அந்த அளவையின் சில மதிப்புகள், எடுகோள் பொருத்தமற்றதாகவும், நிராகரிக்கப்பட வேண்டியதாகவும் நம்பக்கூடிய அளவுக்கு, நம்மைச் சில சமயங்களில் உந்தித் தள்ளும். ஏனைய மதிப்புகள் எடுகோளுக்கு ஆதரவாகக் கருதப்படும். இருப்பினும் மாதிரி அளவையின் நியாயமான ஒரு மதிப்பை நாம் கண்டறிவது எடுகோள் உண்மையானது என்பதை நிரூபிக்காது. உதாரணமாக, 25 சோதனைகளில் 22 வெற்றிகள், ஓர் ஈருறுப்புக்கான நிபந்தனைகளின்படி, ஒரு பொருத்தமான முடிவாகிறது. இங்கு $p=0{\cdot}85, p=0{\cdot}90$ என்ற இரு மதிப்புகளிலும் பொருத்தமான முடிவாகின்றது. இப்போது எடுகோள் சோதனையின் சில எடுத்துக்காட்டுகளைப்பற்றி விளக்குவோம்.

**25. ஒரு தனித்த (மாதிரி) உதாரணம் :**

ஒரு $n$ அளவு மாதிரியில் காணப்படும் நல்ல உருளைக் கிழங்குகளின் எண்ணிக்கை $x$ என்றால், $x$-ன் பரவலுக்கான சூத்திரம்,

$$p\,(x\,;\,n,\,p) = \binom{n}{x} p^{x}\, q^{n-x}$$

என்றவாறு அமைவதைக் காண்கின்றோம். இங்கு '$p$' என்பது நல்ல உருளைக் கிழங்கிற்கான நிகழ்தகவு. மேலும் $q = 1 - p$ ஆகும். '$p$'-ன் மதிப்பைப்பற்றி நாம் ஏதும் முடிவு கட்டவில்லை ; எனினும் $p = 0{\cdot}90$ என்ற ஒரு மதிப்பைச் சோதிக்க விரும்புகின்றோம். எனவே, $p = 0{\cdot}90$ என்பது ஓர் எடுகோள் ஆகிறது. இன்னுமொரு சுட்டுறுப்பு '$n$'ஐ நாம் இன்னும் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது. இப்போது உதாரணமாக $n = 25$ அளவுள்ள ஒரு ராண்டம் மாதிரியினை எடுத்துக்கொண்டு $x$-ன் மீது $p$-ஐப் பற்றிய நமது முடிவை அறிய முற்படுவோமேயானால், மேலே கூறிய மாதிரி சூத்திரம் (model formula) எடுகோள் உண்மையாக இருக்கையில், கீழ்க்கண்டவாறு அமைவதைக் காண்கிறோம்.

அதாவது, $p\,(x;\,25,\,09{\cdot}0) = \binom{25}{x} (0{\cdot}90)^{x}\, (0.10)^{25-x}$

இப்போது, அடுத்தக் கட்டப் பிரச்சினையானது, எடுகோளைச் சந்தேகிக்கக்கூடிய $x$ மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதாகும். ஒரு மாதிரியில் 0, 1 அல்லது 2 உருளைக் கிழங்குகள் நல்லவை என்றால் $p = 0.90$ என்று யாரும் நம்பமாட்டார்கள். $x = 10$ என்றாலும், நிரம்பப்பேர் எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்ளமாட்டார்கள். ஆனால், $x = 23$ என்றால், $p = 0.90$ என்பதைப் பொருத்தமற்றது என்று யாரும் கருதமாட்டார்கள். எனவே, நாம் எந்த முடிவுகள் பொருத்தமற்ற முடிவுகள் என்பதைப் பற்றி ஒரு புள்ளியியல் (தீர்ப்பு) கருத்தினை ஏற்படுத்த வேண்டும். இன்னும் விளக்கமாகக் கூறப்போனால், $x$-ன் மதிப்பு 19 அல்லது அதற்குக் குறைவாக இருந்தால், $p = 0.90$ஐ நிராகரிக்க முடிவு செய்வதாகக் கொள்வோம். அதாவது நம் சோதனை :

"$x < 19$ என்றால் $p = 90$ஐ நிராகரி" என்பதாகும். இப்போது இந்தச் சோதனை முறையின் (test rule) சில வினாவுகளை நாம் ஆராய்வோம்.

$p = 0.90$ என்றால்,

$$P_r\,(x < 19) = \sum_{x=0}^{19} \binom{25}{x} (0.90)^{x}\, (0.10)^{25-x}$$

$$= \sum_{x=6}^{25} \binom{25}{x} (0.10)^{x}\, (0.90)^{25-x}$$

$$P_r(x < 19) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{25}{x} (0.10)^x (0.90)^{25-x}$$

$$= 1 - 0.9666$$

$$= 0.0334$$

ஆகவே, எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் போது, எடுகோளை நிராகரிப்பதற்கான நிகழ் தகவு = 0.03340. வேறு விதமாகக் கூறப்போனால், ஒவ்வொரு 100 மாதிரிகளிலும் 3 மாதிரிகள் நமக்குத் தவறான முடிவைத் (incorrect decision) தர முற்படுகின்றன. எடுகோள் உண்மையாக இருக்கையில் அந்த எடுகோள் நிராகரிக்கப்பட வேண்டியுள்ளது. இத்தகைய தவற்றினை "முதல் வகைத் தவறு" (Type 1 Error) என்று அழைக்கிறோம். இந்த முதல் வகைத் தவறு ஏற்படுவதற்கான நிகழ் தகவை "மிகைத்தன்மை மட்டம்" அல்லது ' பொருளுடைத்தான (Level of Significance) என்று கூறுகிறோம். இந்த அளவை '$\alpha$' என்று சுட்டிக் கூறுகிறோம். இங்கு $\alpha = 0.03340$. எடுகோள் நிராகரிப்பை வலியுறுத்தும் இந்தச் சோதனைக்கான விளைவுகளின் தொகுப்பினை ($x = 0, 1, 2, \quad 19$) நாம் ஒரு "தீர்வு கட்டமான பகுதி" (Critical region) என்று அழைக்கிறோம்.

அடுத்தபடியாக, '$p$'-ன் உண்மையான மதிப்பு 0.90 என்று இல்லாமல் 0.80 என்று இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது

$$P_r[x < 19] = \sum_{x=0}^{19} \binom{25}{x} (0.80)^x (0.20)^{25-x}$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{25}{x} (0.20)^x (0.80)^{25-x}$$

$$= 1 - 0.61669$$

$$= 0.38331$$

இப்போது எடுகோள் பொய்யாக இருக்கவே, நாம் ஒரு மிகப் பெரிய நிகழ் தகவுடன் எடுகோளைத் தள்ளிவிட (நிராகரிக்க) விரும்புவோம். $P_r[x<19]$ மதிப்பை 0.38331 என்று இருப்பதை விட 1.00 மதிப்பை ஒட்டியவாறு இருப்பதையே நாம் விரும்புகிறோம். சோதனை முறையினை உபயோகித்து $p = 0.90$

என்ற எடுகோளினை நாம் ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ் தகவு $= 0{\cdot}61669$. ஒரு ஒரு பொய்யான எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்வதால், நாம் மற்றொரு தவறினைச் செய்கிறோம். இத் தவற்றை "இரண்டாம் வகைத் தவறு" (Type II Error) என்று அழைக்கிறோம். இத்தகையதொரு இரண்டாம் வகைத் தவற்றினைச் செய்வதற்கான நிகழ்தாவை '$\beta$' என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

(இங்கு $p = 0{\cdot}80$ எனும்போது $\beta = 0{\cdot}61669$ ஆகிறது.) எடுகோளைப்பற்றி பலவித சாத்தியக் கூறுகளைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் காண்போம்.

பட்டியல்

| முடிவு / எடுகோள் | முடிவு | |
|---|---|---|
| | ஏற்றுக்கொள் | நிராகரி |
| எடுகோள் உண்மை | சரியான முடிவு | முதல்வகைத் தவறு |
| எடுகோள் பொய் | இரண்டாம் வகைத் தவறு | சரியான முடிவு |

$p = 0{\cdot}90$ என்ற எடுகோள், $x < 19$ என்று கண்டறிந்து நிராகரிக்கப்பட்டால், நாம் $p < 0{\cdot}90$ என்று முடிவு கட்டுகிறோம். இத்தகைய முடிவினை "மாறெதிரான எடுகோள்" (Alternative Hypothesis என்று அழைக்கிறோம்.

ஒரு தரப்பட்ட அல்லது எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட எடுகோளை (சில சமயங்களில் சூனிய எடுகோள் என்று அழைக்கப்படும் எடுகோளை) $H_0$ என்றும், மாறெதிரான எடுகோளை $H_1$ என்றும் பெயரிட்டு அழைக்கிறோம். ஆகையால், நமது உதாரணத்தில், நாம் $H_0 : p = 0{\cdot}90$, $H_1 : p < 0{\cdot}90$ என்ற இரு எடுகோள்களில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கின்றோம். சுருறுப்பு ராண்டம் மாறி $x$–ன் அளவைப் (size) பொறுத்து இத் தேர்வு (அமைகிறது) ஏற்படுகிறது. எனவே, எடுகோள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போதே, மாறெதிரான எடுகோளையும் வடிவாக்க வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது; அதுவும் ஒரு முடிவினை அமைவதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் மாதிரி அளவையைக் (Statistic) கண்டறிவதற்கு முன்னாலேயே, மாறெதிரான

எடுகோள் வரையறுக்கப்படுவது அவசியமான தொன்றும். மற்றுமொரு முக்கியத்துவம் 'திறன்' அல்லது ஆற்றல் (Power) எனப்படுவதாகும். ஒரு சோதனையின் திறன் எடுகோளை நிராகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. நமது உதாரணத்தில், $p = 0{\cdot}90$ என்றபோது, திறன் $= 0{\cdot}3340$ என்றும், $p = 0{\cdot}80$ என்றபோது, திறன் $= 0\ 38331$ என்றும் காண்கிறோம். திரள் ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு கணக்கீடுகள் மூலம், எந்த ஒரு தரப்பட்ட '$p$' மதிப்பிற்கும் $p_r(x < 19)$ மதிப்பைக் கணிக்கமுடியும்.

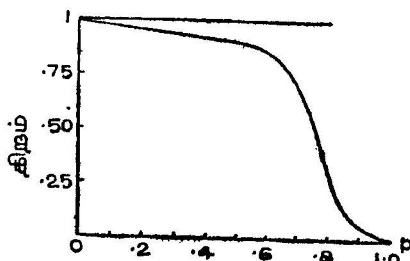
$$
\begin{aligned}
\text{திறன்} &= B(19;\ 25;\ 0{\cdot}75)\\
&= 1 - B(5;\ 25;\ 0{\cdot}25)\\
&= 1 - 0{\cdot}37828\\
&= 0{\cdot}62172,\ p = 0{\cdot}75 \text{ எனும்போது}
\end{aligned}
$$

இதைப்போல, $p = 0{\cdot}70$ என்றால்,

$$
\begin{aligned}
\text{திறன்} &= B(19;\ 25;\ 0{\cdot}70)\\
&= 1 - B(5;\ 25;\ 0{\cdot}30)\\
&= 1 - 0{\cdot}19349\\
&= 0{\cdot}80651
\end{aligned}
$$

$p = 0{\cdot}60$ என்றால், திறன் $= 0{\cdot}92348$

$p = 0{\cdot}50$ என்றால், திறன் $= 0\ 99796$




படம் 3.

படம் : $H_0$-க்கான சோதனைக்கான திறன் வளைகோடு

$H_0;\ p = p_0 = 0.90$

$H_1;\ p < 0.90$

$n = 25$ இங்கு

இதேபோன்று பலவிதமான $p$ மதிப்புகளுக்கும் திரள் ஈருறுப் புப்பரவல் மதிப்புகளைக் (நிகழ்தகவினை) கணக்கீடு செய்து, திறன்களைக் (Powers) கண்டுபிடிக்க முடியும். ஒரு வரைபடத்தில் அந்தத் திறப்புள்ளிகளைக் குறியிட்டு ஒரு "திறன் வரை கோடு" (Power Curve) வரையலாம். ஒரு குறிக்கோள் நிலையான (ideal) திறன் வரைகோடு, $H_1$ ஆல் குறிக்கப்படும் சுட்டுறுப்பின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உயரம் 1 ஆகவும், $H_0$ ஆல் குறிக்கப்படும் சுட்டுறுப்பின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உயரம் $O$ ஆகவும் இருக்கும்.

அதாவது, $H_0$ உண்மையானுல், நாம் அதை எப்போதும் ஏற்கவே விரும்புவோம். அதே போல, எடுகோள் பொய்யானுல் நாம் அதை எப்போதும் நிராகரிக்கவே விரும்புவோம் நிறைய கணிதப் புள்ளியல் ஏடுகள் (சுவடிகள்)(Literature) $H_1$ உண்மையாக இருக்கும்போது அதிகத்திறம் வாய்ந்த ஒரு கொடுக்கப்பட்ட $H_0$-க்கான சோதனைகளைக் கண்டறிவதில் முற்படுகின்றன.

ஒரு சோதனையை வடிவாக்குகையில், உதாரணமாக, உருளைக் கிழங்குக்கணக்கில், நாம் யதேச்சையாகத் (arbitrarily) தீர்வுக் கட்டமான பகுதியினை (critical region) $x = 0,1,2,...,19$ என்று இருக்குமாறு தேர்ந்தெடுத்தோம். ஆனுல், அதற்குப் பதிலாக ஒரு புள்ளியியல் நிபுணன் வழக்கமாக முதலில் "$\alpha$"ஐத் தேர்ந்தெடுத்து, பிறகு அதற்கு ஏற்ற தீர்வுகட்டமான பகுதியைக் கண்டுபிடிக்கின்ருர். $\alpha$-வுக்கான பொதுவான தேர்வுமதிப்புகள் 0.05-யும் 0.01-ம் ஆகும். நமது உருளைக்கிழங்கு உதாரணத்திற்கு $\alpha = 0.05$ என்று கொள்வோமேயானுல், ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு கணக்கீடு மூலம் $p = 0.90$ என்ற மதிப்புக்கு $P_r(x > 19) = 0.03840$ என்று காண்கிருேம். $P_r(x > 20) = 0.09779$ என்பதால், இது '$\alpha$'க்கு (சரியில்லாத) ஒத்துவராததைக் காட்டுகிறது. எனவே, $\alpha = 0.03840$ என்றவாறு $x = 0,1,2,...,19$ என்று நாம் தீர்வு கட்டமான பகுதியை எடுத்துக் கொள்ளலாம்; அல்லது, $\alpha = 0.09779$ என்று கொண்டு $x = 0,1,2, ..., 19,20$ என்று நாம் தீர்வு கட்டமான பகுதியை எடுத்துக் கொள்ளலாம். சோதனைக்கு நாம் உபயோகிக்கும் மாதிரி அளவை ஒருதொடர்ந்த பரவலில் அமையுமேயானுல், $\alpha$ மதிப்பு 0.05, 0.01 அல்லது வேறு ஏதோ ஒர் ஏற்றதொரு மதிப்பாகக் கொள்ள முடியும்.

## 5·3 ஒரு தொடர்ச்சியான உதாரணம் (A continuous example)

உதாரணமாக ஒரு புகைஞர் (smoker) சிகரெட் குடிக்கும் பழக்கத்திற்கு அடிமையாகிருர் என்று கொள்வோம். இப்படிக் குடிப்பதால் நுரையீரலில் புற்று நோய் வந்துவிடும் என்று நன்கு,

தெரிந்த போதிலும் அவரால் இப் புகைக்கும் பழக்கத்தைக் கை விட முடியவில்லை. சிகரெட்டில் 30 மில்லிகிராம் அல்லது அதற்கும் மேலே நிகோடின் (Nicotine) சராசரியாக இருந்தால் புகை ஒருக்கு நுரையீரலில் புற்று நோய் காண்பது நிச்சயமே என்று விஞ்ஞானிகளால் திட்ட வட்டமாகக் கூறப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். அந்தச் சராசரி $\mu < 30$ மில்லிகிராம் என்றால்; புகைஞர் வரத்தகும் இடரினை எதிர்நோக்க விழைகின்றார். (willing to take chances). $A$ வகைப்பட்ட 100 சிகரெட்டுகளின் ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் செய்யப்பட்ட சோதனையானது $\bar{x}=26$ மில்லிகிராம் நிகோடின் என்ற செய்தியைத் தருகின்றது. இப் போது $\sigma = 8$ மில்லிகிராம் என்றால். புகைஞர் என்ன முடிவை மேற் கொள்வார்?

$\bar{x}$ குறைவாக இருப்பின்; $A$ வகை சிகரெட்டை அவர் நிச்சய மாக உபயோகிக்க விரும்புவார். $x=10$ என்றால்; சந்தேகமே வேண்டாம்; நிச்சயம் உபயோகிப்பார். $x=31$ என்றால்; $A$ வகையினை உபயோகிப்பதற்கு அவ்வளவு துணிவு ஏற்படாது. இவ்விரண்டுக்குமிடையே எங்கோ ஓரிடத்தில் ஓர் எல்லைக்கோடு (boder line) அல்லது ஒரு தீர்வு கட்ட மதிப்பு கிடைக்கிறது.

ஒரு வழியாக யாதெனில், $\mu = 30$ என்ற அனுமானத்தில்; $P_r[\bar{x} < 26]$ நிகழ்தகவைக் கணிக்க வேண்டும். மத்திய வரம்புத் தேற்றம் அல்லது நடு எல்லைத் தேற்றத்தின் (Central Limit Theorem) வாயிலாக, $\bar{x}$-ன் பரவல் சராசரி 30, திட்ட விலக்கம் $\frac{8}{\sqrt{100}} = 0\cdot8$ஐக் கொண்டு தோராயமாக ஓர் இயல் நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளது என்று அறிகிறோம்.

எனவே,

$$P_r[\bar{x} < 26] = P_r[\bar{x} < 26]$$

$$= P_r\left[\frac{\bar{x}-30}{0\cdot8} < \frac{26-30}{0\cdot8}\right]$$

$$= P_r[Z < -5]$$

$$= 0.$$

(இங்கு $Z$ மாறி ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி) இதனால் அறியவரும் இரு முடிவுகள் : (1) $\mu$-ன் மதிப்பு 30ஆக இருந்து ஓர் அற்புதம் நிகழ்ந்திருக்கலாம். அல்லது (2) $\mu$-ன் மதிப்பு 30ஐ விடக் கொஞ்சம் குறைவாக இருக்கலாம். இங்

விரண்டில் இங்குச் சரியான முடிவு இரண்டாவது முடிவே என்று நிச்சயமாகத் தெரிய வருகிறோம்.

மேற்கூறிய இந்த ஓர் உதாரணத்தை எடுகோள் சோதனைப் பிரச்சினையாகக் கருதினால்; ஒரு புள்ளியல் நிபுணர் தன் சூனிய எடுகோளாக $H_0 : \mu = 30$ என்றும், மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \mu < 30$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வார். ஓர் உச்ச அளவு நம்பிக்கையுடன் $H_0$ஐ நிராகரிக்கக்கூடிய அளவுக்கு $\bar{x}$ சிறியதாக இருந்தால், $A$ வகை தீங்கற்றது என்ற ஒரு நியாயமான முடிவுக்கு வரலாம்.

உதாரணமாக, ஒரு புகைஞர், (smoker) $\bar{x}$ஐக் கண்டறிவதற்கு முன்பே கீழ்க்கண்டவாறு தீர்மானிக்கிறார் எனக் கொள்வோம். அதாவது, எடுகோள் உண்மையாக இருக்கையில், $\bar{x}$-ன் மதிப்பு ஆனது $\bar{x}_0$ என்ற ஏதாவதொரு மதிப்பினையோ அதை விடக் குறைவாகவோ, $P_r(\bar{x} < \bar{x}_0) = 0{\cdot}01$ என்ற முறையில் அமைந்திருந்தால் அந்த $A$ வகை சிகரெட்டைப் புகைத்துத்தான் பார்க்கலாமே என்ற முடிவுக்கு வருகிறார்.

உண்மையாகவே, $Z$ என்ற மாதிரி அளவை (Statistic)

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\bar{x} - 30}{0{\cdot}8}$$ ஐ; $\bar{x}$ஐப் போலவே பயன்படுத்த

லாம். ஏனெனில், நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிப்பதற்குத் தரமான இயல்நிலைப் பட்டியல்கள் தேவைப்படுகின்றன. $Z$-ன் வழியாகக் கூறப்போனால் பரவலின் (இயல்நிலைப் பரவலின்) இடது கோடியில் ஓர் இடைவெளியில் $0{\cdot}01$ என்ற நிகழ்தகவுடன் (பரப்புடன்) இருக்கக்கூடிய மிகச்சிறிய $Z$ மதிப்பைத் தவிர. மற்ற எல்லா $Z$ மதிப்புகளுக்கும்; $H^0$ உண்மையாக இருக்கும் என்று புகைஞர் நம்புகிறார். இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து

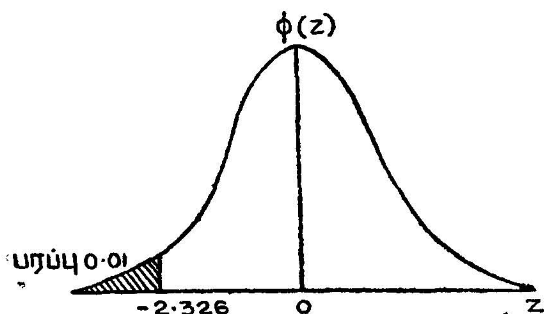
$P_r(Z < Z_0) = 0{\cdot}01$ என்றால், $Z_0$-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$Z_0 = -2{\cdot}326$

எனவே, $P_r[Z < -2{\cdot}326] = 0{\cdot}01$

$Z$-க்கான தீர்வு கட்டப்பகுதி கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

எனவே, புகைஞர் $Z$ஐக் கணித்து, $Z < -2{\cdot}326$ என்ற பகுதியைத் தவிர மற்றச் சமயங்களில் $H_0$ஐ உண்மை என முடிவு கட்டுகின்றார்.




படம் 4.

படம் : ஒரு பக்கத்தீர்வு கட்டப்பகுதியும், அதைச் சார்ந்த மிகைத்தன்மை மட்டமும் :
($H_0 : \mu = 30; H_1 : \mu < 30$ என்ற சோதனை)

இப்போது முதல்வகை, இரண்டாம் வகைத் தவறுகளின் விளைவுகளை ஆராய்வோம். முதல்வகைத் தவறு நிகழ்ந்தால், சராசரி 30ஐ விடக் குறைவு என்று முடிவு கட்டுகிறோம்; அவ்வாறு உண்மையிலே இல்லாவிட்டாலும் கூடச் சராசரி 30ஐ விடக் குறைவு என்ற முடிவுக்கு வருகின்றோம். இது ஒரு மிகவும் ஆபத்தான தவறு; ஏனெனில், புகைஞர் தன் வாழ்வையே குலைக்கக்கூடியதான $A$ வகை சிகரெட்டைப் புகைக்கப் போகின்றார். $\alpha$-ன் நிகழ்தகவை 0·01 என்றவாறு கொண்ட போதிலும், ஒரு வாழ்வுக்கு ஆபத்தான சமயத்தில், இதுவே ஒரு பெரிய மதிப்பாகும். $\alpha$-ன் மதிப்பு 0·001 அல்லது 0·0001 என்பது சாலச் சிறந்ததாகத் தோன்றுகிறது.

உண்மையாலுமே $\mu < 30$ என்று இருக்கையில் $\mu = 30$ என்ற முடிவுக்குக் கண்டறிந்த $\bar{x}$ நம்மைக் கொண்டு செல்கையில் இரண்டாம் வகைத் தவறு நிகழ்கிறது. $A$ வகை சிகரெட் புகைஞரால் குறிக்கப்பட்ட தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்திருந்த போதிலும், $A$ வகை சிகரெட்டுகள் உபயோகப்படுத்த முடியாமல் போகின்றன. ஒருக்கால், மற்றொரு வகை சிகரெட்டைச் சோதிக்கக்கூடும். எப்படி இருந்தாலும், இரண்டாம் வகைத் தவற்றின் விளைவு எவ்விதத்திலும் மிக அபாயகரமானதன்று. எனவே, இம்மாதிரியில், ஒரு மிகக் குறைந்த $\alpha$ மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். $\beta$ மதிப்பைப் பற்றியோ அல்லது திறன் மதிப்பைப் பற்றியோ கவலைப்பட வேண்டியதில்லை.

$\alpha = 0{\cdot}01$ என்றால், சோதனை : $\dfrac{\bar{x}-30}{0{\cdot}8} < -2{\cdot}326$ என்றால், சூனிய எடுகோளை நிராகக. ஏனெனில்,

$P_r(Z < -2.326) = 0.01$ என்று (இயல்நிலைப் பரவல் பரப்பு) அட்டவணை 2 மூலம் காணலாம்,

$$\text{சோதனையின் திறன்} = P_r\left(\frac{\bar{x}-30}{0.8} < -2.326\right)$$

வெவ்வேறு $\mu$ மதிப்புகளுக்கு இந்தத்திறம் மதிப்புகளும் வெவ்வேறாக இருக்கும்.

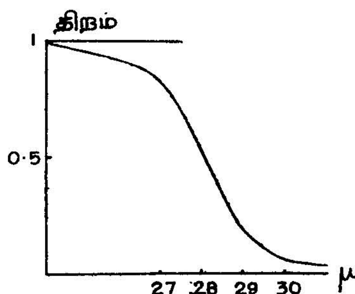
குறிப்பாக, $\mu = 30$ என்ற போது,

$$P_r\left[\frac{\bar{x}-30}{0.8} < -2.326\right] = 0.01 \text{ ஆகும்.}$$

ஏனெனில், $Z = \dfrac{\bar{x}-30}{0.8}$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் மாறி

$\mu = 29$ என்றால், $\dfrac{\bar{x}-29}{0.8}$ மாறியானது, $Z$ பரவலில் அமைந்த ஒரு ராண்டம் மாறியாகும். எனவே, நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு முன் சமனிலியின் இடது பக்க மாறியை மாற்றியமைக்க வேண்டும். எனவே,

$$P_r\left[\frac{\bar{x}-8}{0.8} < -2.326\right]$$
$$= P_r\left[\frac{\bar{x}-29}{0.8} + \frac{29-30}{0.8} < -2.323\right]$$
$$\simeq P_r[Z - 1.25 < -2.326]$$
$$= P_r[Z < -1.076]$$




படம் 5.

$= 0.141$ (இயல் நிலைப் பரவல் பரப்பு அட்டவணை 2-லிருந்து)

$n=100$; $H_0: \mu=30$; $H_1: \mu<30$ சோதனைக்கான திறம் வளைகோடு.

இதைப்போல, $\mu=28$ என்ருல்,

திறன்

$$= P_r\left[\frac{\bar{x}-30}{0.8} < -2.326\right]$$

$$= P_r\left[\frac{\bar{x}-28}{0.8} + \frac{28-30}{0.8} < -2.326\right]$$

$$\simeq P_r[Z - 2.50 < -2.326]$$

$$= P_r[Z < .174]$$

$$= 0{\cdot}569$$

$\mu = 27$, என்ருல்,

$$\text{திறன்} = P_r[Z < 1.424]$$

$$= 0.923$$

இன்னும் சில திறன் மதிப்புகளைக்கொண்டு திறன் வளைகோடு வரையப்பட்டுள்ளது. தொடர் ராண்டம் மாறிகளைக் கொண்ட பல சோதனைகளுக்கு இதேபோன்ற திறன் வளைகோடு வரையலாம்.

உருளைக் கிழங்கு, சிகரெட் மாதிரிக் கணக்குகளில் மாதிரி அளவையின் சிறிய மதிப்புகள் எடுகோளை நிராகரிக்க வழி கோலுகின்றன. ஒவ்வொன்றிலும் எடுகோளுக்கு மாறெதிரான எடுகோள் ஒரு பக்கமானவை. நிறைய பிரச்சினைகளில் இரு பக்கமான மாறெதிர் எடுகோள்கள் அனுமானிக்கப்படும். அவை மாதிரி அளவையின் சிறிய, பெரிய மதிப்புகளால் சூனிய எடுகோள் நிராகரிக்கப்படும் தன்மை வாய்ந்த மாறெதிர்எடுகோள்கள் ஆகும். கீழ்கண்ட மற்ருெரு மாதிரிப்பிரச்சினையைக் காண்போம்

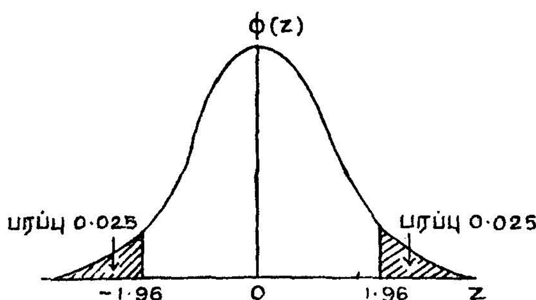
தக்காளிச் சாறு, தகர அடைப்புகளில் அடைத்து அனுப்பப்படும் ஓர் இடத்தில், ஒவ்வொரு டப்பாவிலும் 46 அவுன்ஸ் சாறு நிரப்ப முற்படுவதாகக் கொள்வோம். ஒரு தானே இயங்கும் அளவுகோல்) தனிபங்கு அளவுகோல் $x$ அவுன்ஸ் சாறினை நிரப்புகிறது. இங்கு $x$ மாறி ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் அமைகிறது எனக் கொள்வோம். சராசரிக் கொள்ளவு 46 அவுன்ஸுக்கும் குறைவாக இருந்தால், அரசாங்கச் சோதனையாளர்களிடம்

அந்தக் கம்பெனி சிக்கலில் மாட்டிக் கொள்ளும். ஆனால், சராசரிக் கொள்ளளவு 46 அவுன்ஸுக்கு மேலே இருப்பின், கம்பெனிக்கு இழப்பு ஏற்படும். குறைந்த இலாபமே கிடைக்கும். $\bar{x}$-ன் சிறிய அல்லது பெரிய மதிப்புகளை ஒட்டியவாறு $H_0 : \mu = 46$ என்ற ஓர் எடுகோளை எடுத்துக்கொள்வதே சோதனைக்குப் பொருத்தமான எடுகோள் ஆகும். $H_0$ நிராகரிக்கப்பட்டால் $\mu \neq 46$ என்பது முடிவாகும் என்பதால், மாறெதிரான எடுகோள் $H : \mu$ என்று கொள்வோம்.

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 0{\cdot}5$ அவுன்ஸ் எனக் கொள்வோம்; எடுகோளைச் சோதிக்க $n = 25$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக்கொண்டு $\bar{x}$ஐத் தீர்மானிப்போம். அந்தக் கம்பெனிப் புள்ளியல் நிபுணர் $\alpha = 0{\cdot}05$ என்று எடுத்துக் கொள்கிறார்; ஏனெனில், அரசாங்கச் சோதனையாளர் உபயோகிக்கும் அளவும் அதேதான் என்பதால்,

$$\text{இப்போது} \quad Z = \frac{\bar{x} - 46}{\frac{0{\cdot}5}{\sqrt{25}}}$$

$\frac{\bar{x} - 40}{0{\cdot}1}$ ஐக் கணிக்கவேண்டும். சிறிய அல்லது பெரிய $Z$ மதிப்பைத் தவிர மற்ற சமயங்களில் $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. $Z$-க்கான பொருத்தமான தீர்வுகட்டப் பகுதி கீழே படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.




படம் 6.

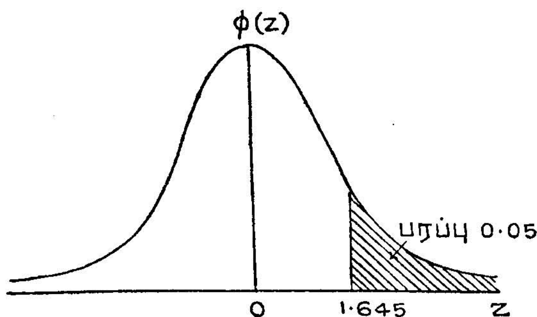
படம் :—$H_0 : \mu = 46$ ; $H_1 : \mu \neq 46$ சோதனைக்கான இரு—பக்க தீர்வு கட்டப் பகுதியும் அதற்கான மிகைத் தன்மை மட்டமும்.

எனவே, $H_0$ உண்மையாக இருக்கையில், $Z$ தீர்வு கட்டப் பகுதியில் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·05 ஆகிறது. சிறிய $Z$ மதிப்பு, பெரிய $Z$ மதிப்பு இரண்டுமே ஆட்சேபத்துக்குரிய மதிப்புகளாகின்றன.

தீர்வுகட்டப் பகுதியைத் தீர்மானித்த பின்னர், புள்ளியல் நிபுணர் $n=25$ ராண்டம் மாதிரியை எடுத்து $\bar{x} = 43·18$ என்று கண்டு பிடிக்கிறார்.

$$\frac{\bar{x}-46}{0·1} = \frac{46·18-46}{0·1} = 1·8$$ என்பதால், எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. வேறு விதமாகக் கூறினால், $\bar{x}$ ஆனது 46ஐ விட்டுப் பெரிதும் விலகி $H_0$ஐ நிராகரிக்காதவாறு ராண்டம் மாதிரி $\bar{x}$-ன் மதிப்பைத் தருகிறது.

இப்போது புள்ளியல் நிபுணர் எடுகோளையோ, மாறெதிர் எடுகோளையோ தீர்மானிப்பதற்கு முன்பு தனது மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்து $\bar{x}$ஐக் கணிக்கின்றார் என்று கொள்வோம். $\bar{x}$ மதிப்பு 46ஐ விடக் கூடுதலாக இருப்பதால் அவர் தனது மாறெதிர் எடுகோளை $H_1 : \mu > 46$ என்று எடுத்துக் கொள்ள விரும்புகிறார். இதன் விளைவாக $H_0 : \mu = 46$ என்ற எடுகோளை, $H_1$-க்குச் சாதகமாக, நிராகரித்தால், சராசரி 46 அவுன்ஸ்களை விட அதிகம் என நிரூபிப்பார். அதிக $\bar{x}$ மதிப்புகள் மட்டுமே (அதனால் $Z$ மதிப்புகள் மட்டுமே) புதிய $H_1$ஐ ஆதரிக்கும். அதே $\alpha$ஐப் பயன்படுத்திப் புதிய $H_1$ஐத் தேர்ந்தெடுக்கக்கூடிய தீர்வு கட்டப்பகுதி கீழே படத்தினில் காட்டப்பட்டுள்ளது.




படம் 7.

படம்: $H_0 : \mu = 46$; $H_1 : \mu > 46$ சோதனைக்கான ஒரு பக்கத்தீர்வு கட்டப்பகுதியும், அதைச் சார்ந்த மிகைத் தன்மை மட்டமும்.

இங்குக் கண்டறிந்த $Z = 1 \cdot 8$ மதிப்பு தீர்வு கட்டப்பகுதிக்குள் விழுகின்றது. எனவே, புள்ளியல் நிபுணர் டப்பா ஒவ்வொன்றின் சராசரி எடை 46 அவுன்ஸீக்கும் அதிகம் என்று முடிவு கட்டுகிறார். ஆகையால், புள்ளி விபரங்களைக் கொண்டு மாறெதிர் எடுகோளைத் தேர்ந்தெடுத்தால், வாத ஆதாரமற்ற (Unwarranted) முடிவு ஒன்றை மேற்கொள்ள வேண்டியுள்ளது. பொதுவாக புள்ளி விவரங்களை வைத்துக் கொண்டு ஓர் எடுகோளை வடிவாக்குவதும்; பிறகு அதைப் புள்ளி விவரங்களைச் சோதனைக்குப் பயன்படுத்துவதும் சரியான முறையன்று. ஒரு சில சந்தர்ப்பங்களில் மட்டுமே இவ்வாறு பரிசோதனை செய்யப்பட்ட பின்னர் எடுகோள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

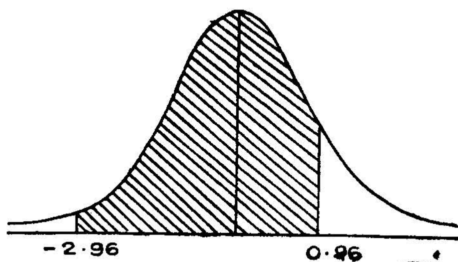
இருப்பக்கச் சோதனையின் திறன்

$$= P_s\left[\frac{\bar{x}-46}{0 \cdot 1} < -1 \cdot 96\right] + P_r\left[\frac{\bar{x}-46}{0 \cdot 1} > 1 \cdot 96\right]$$

$$= 1 - P_r\left[-1 \cdot 96 < \frac{\bar{x}-46}{0 \cdot 1} < 1 \cdot 96\right]$$

$\mu = 46$ என்றால், இந்தமதிப்பு $= 0 \cdot 05$ ஆகும்; ஏனெனில் $Z = \dfrac{\bar{x}-46}{0 \cdot 1}$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலைப் பரவலில் அமைந்து இருக்கும்.

$\mu = 46 \cdot 1$ என்றால், $Z = \dfrac{\bar{x}-46 \cdot 1}{0 \cdot 1}$ என்பது ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் மாறியானதால், சோதனையின் திறம், நிகழ்தகவு மதிப்பில்,




படம் 8.

$$1 - P_r\left[1 \cdot 96 < \frac{\bar{x}-46 \cdot 1}{0 \cdot 1} < \frac{46 \cdot 1-46}{0.1} < 1 \cdot 96\right]$$

$$= 1 - P_r[-1 \cdot 96 < Z + 1 < 1 \cdot 96]$$

$= 1 - P_r[-2{\cdot}96 < Z < 0\ 96]$

$= 1 - (0{\cdot}8315 - 0{\cdot}0015$

$= 0{\cdot}170$

$\mu = 46{\cdot}2$ என்றால்,

திறன் $= 1 - P_r(-1{\cdot}96 < Z + 2 < 1{\cdot}96)$

$= 1 - P_r(-3{\cdot}96 < Z < -0{\cdot}04)$

$= 1 - 0{\cdot}4840 = 0{\cdot}5160$

இதேப்போல், $\mu = 46{\cdot}3$ எனில்,

திறன் $= 0{\cdot}8508$ ஆகிறது.

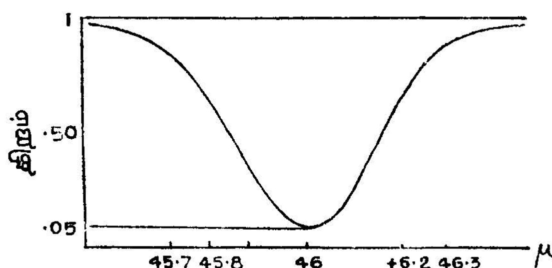
இதைப் போலவே,

$\mu = 45{\cdot}9$-க்குத் திறன் $= 0{\cdot}1700$ என்றும்,

$\mu = 45{\cdot}8$-க்குத் திறன் $= 0{\cdot}5160$ என்றும்,

$\mu = 45{\cdot}7$-க்குத் திறன் $= 0{\cdot}8508$ என்றும் காண்கிறோம்.

இந்தப் புள்ளிகளைக் கொண்டு வரையப்பட்ட திறன் வளை கோடு கீழே வரையப்பட்டுள்ளது.




படம் 9.

$H_0 : \mu = 46;\ H_1 : \mu \pm 46$ சோதனைக்கான திறம் வளைகோடு

மேலே விளக்கப்பட்ட உதாரணங்களில் சோதனைக்குரிய புள்ளியல் அளவை அல்லது தீர்வு கட்டப் பகுதியைத் தேர்ந் தெடுப்பதைச் சரியெனக் காட்ட எந்தவித ஆதாரமும் இல்லை. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பிற்கான விகிதத்தைப்பற்றி எடுகோள்களைச் சோதிக்க, ஓர் ஈருறுப்பு ராண்டம் மாறியை உபயோகிப்பது பொருத்தமானதாகும்.

அதேபோல $\mu$ஐப்பற்றிய எடுகோள்களைச் சோதிக்க ஐஐ உபயோகிப்பது பொருத்தமானதாகும். இதே எடுகோள்களுக்கு வேறு வித சோதனைகளும் இருக்கின்றன; மேலும், மற்ற ஒரு சோதனை, அதே மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$ மதிப்புடன் ஒரு சிறந்த திறன் வளைகோட்டைக் கொடுக்கும்; எனவே, இந்தச் சோதனை விரும்பி ஏற்கப்படும்.

$\alpha$, $\beta$ இரண்டும் ஒன்றையொன்று சார்ந்து இருக்கும். ஒரு நிலைத்த மாதிரி அளவிற்கு $\alpha$ கூட்டினால் $\beta$ குறையும்; அதேப்போல $\alpha$ குறைந்தால் $\beta$ கூடும். சில சமயங்களில், உதாரணமாகப் புகை ஓர் பிரச்சினையில் முதல் வகை (பிழை) தவறு, இரண்டாம் வகைத் தவற்றினைவிட மிகவும் அபாயகரமானது. எனவே, இதன் விளைவாக, இரண்டாம் வகைத் தவற்றின் விளைவுகளைப்பற்றி ஆராயாமல், ஒரு சிறிய $\alpha$ மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். தக்காளிச்சாறு பிரச்சினையில் இரண்டாம் வகைத் தவறு மிக அபாயமானது. $H_0 : \mu = 46$, உண்மையாயிருக்கையில் அது நிராகரிக்கப்படும்போது, எடைபோடும் முறையைச் சரிப்பார்ப்பதில் சிறிது நேரம் கூட ஆவதுதான் இழப்பாகும். ஆனால் $H_0$ நிராகரிக்கப்பட வேண்டியதுபோது, அதை ஏற்றுக் கொள்வதால், அக் கம்பெனி ஒரு பெரிய தண்டத் தொகை அல்லது இலாப இழப்பை ஏற்க நேரிடுகிறது. எனவே, $\alpha$ஐ 0·10-க்கு உயர்த்தி, திறத்தினை அதிகமாக்கி ஒவ்வொரு $\mu \neq 46$-க்கும் $\beta$ஐக் குறைப்பது சாலச் சிறந்ததாகும். எடைபோடும் முறையைச் சரிபார்ப்பதால் ஆகும் நேரம் தடைப்பட்ட உற்பத்தியின் காரணமாக அதிகம் செலவாவதால், இங்கு முதல் வகைத் தவறு, இரண்டாம் வகைத் தவறு இரண்டும் ஒரே அளவு ஆபத்தானவை; இவை இரண்டையும் சிறிதாக்க வேண்டியது அவசியமாகிறது. நிலைத்த $\alpha$ மதிப்புக்கு, மாதிரி அளவு கூட்டப்பட்டால் $\beta$-வைக் குறைக்க முடியும் என்று மேலே உள்ள பயிற்சிகளைத் தீர்வு காண்பதன்மூலம் அறியமுடியும்.

## 5·4 எடுகோள் சோதனைக்கான திட்டவரை (An Outline for Testing Hypothesis)

ஓர் எடுகோளைச் சோதிக்கும் பிரச்சினையில், ஒரு திட்டவரையினைக் குறிப்பிடுவது நல்ல முறையாகும். எடுகோள் சோதனையைப் பற்றி நன்கு அறியாதவர்களுக்கு இது மிக்க பயனளிக்கும். தேர்ச்சி வாய்ந்த புள்ளியல் நிபுணருக்கும் இது பயனளிக்கும்; ஏனெனில், மற்றவர்கள், இவரது (விளைவுகளை) முடிவுகளைப் படித்து அறிவதற்கு விரும்பலாம். இந்தத் திட்டவரை கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கப்படும்.

1. முதலில் எடுகோளையும், மாறெதிர் எடுகோளையும் தெளிவாக எழுதவேண்டும்.

2. பிழைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$ ஐத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

3. எடுகோள் உண்மையாக இருந்து, மற்றச் சில நிபந்தனைகளும் திருப்திகரமாக இருந்தால், ஓர் அறிந்த மாதிரிப் பரவலின் ஒரு புள்ளியியல் (மாதிரி) அளவையைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும்.

4. தீர்வு கட்டப் பகுதியினைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

5. புள்ளியியல் அளவையினைக் கணித்து, எல்லாக் கணக்கீடுகளையும் காட்டவேண்டும்.

6. முடிவினை எழுதவேண்டும். புள்ளியியல் அளவைத் தீர்வுகட்டப் பகுதியில் விழுந்தால், எடுகோளை நிராகரிக்க வேண்டும். இல்லாவிடில், ஏற்றுக் கொள்ள வேண்டும்.

இந்தத் திட்ட வரையில் இரு விவரங்கள் கவனிக்கப்பட வேண்டும். மாறெதிர் எடுகோள் உண்மையானுல், திறன் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட பின்னமாக (உதாரணமாக 0·90 என்றவாறு) இருக்கவேண்டும் என்று சோதிப்பவர் விரும்புவார்; ஆதலால் மேலே கண்ட 2ஆவது கட்டத்தில் இவ் விவரம் குறிக்கப்பட வேண்டும், இதனுல், மாதிரி அளவு $n$ஐத் தீர்மானிக்க, ஒரு கூடுதலான கணிப்பு அவசியமாகிறது. எனவே, 4ஆவது கட்டத்தினை கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம். "மாதிரி அளவு $n$ஐக் கண்டுபிடித்துப் பிறகு தீர்வு கட்டப் பகுதியைத் தீர்மானிக்கவும்."

4 ஆவது கட்டத்தினைப் பூர்த்தி செய்தபின், ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

இந்த திட்டவரை முறையினைப் பயன்படுத்தி உருளைக் கிழங்குப் பிரச்சினைக்கான திட்ட வரையினை இப்போது எழுது வோம்.

திட்டவரை :

1. $H_0 : p = 0{\cdot}90$; $H_1 : p < 0{\cdot}90$

2. $\alpha$ மதிப்பை முடிந்த வரை பெரிதாக, ஏதோ ஒரு மதிப்பில் (ஆனுல் 0·05ஐ விடச் சிறிதாக) தேர்ந்தெடுக்கிறோம்.

3. இங்குப் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளியல் அளவை $x$ ஆகும். இது மாதிரி அளவு 25 உடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் நல்ல உருளைக்கிழங்குகளின் எண்ணிக்கையே $x$ ஆகும். எடுகோள் உண்மையானால், $n = 25$; $p = 0 \cdot 90$ உடன்கூடிய ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலை $x$ சார்ந்திருக்கும். அதற்குக் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் ஒத்திருக்க வேண்டும்.

(a) ஒவ்வோர் உருளைக்கிழங்கும் நல்லது அல்லது கெட்டது என்று வகைபடுத்தப்பட வேண்டும்.

(b) வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு சோதனைக்குச் சோதனை மாறிலியாக உள்ளது.

(c) உருளைக் கிழங்குகள் சார்பற்ற முறையில் நல்லவை அல்லது கெட்ட வகையாக உள்ளன.

(d) சோதனைகளின் எண்ணிக்கை மாறிலியாக உள்ளது. இந்த நிபந்தனைகள் (பொருத்தமானவை) நியாயமானவையென்று நாம் தீர்மானிக்கிறோம்.

4. $\alpha = 0 \cdot 03340$-க்கான தீர்வு கட்டப் பகுதியாக $x = 0, 1, 2, \ldots, 19$ என்ற பகுதி உள்ளது.

5. எந்தவித கணிப்பும் இங்கு அவசியமில்லை. புள்ளியியல் அளவை கண்டறிந்த $x$ மதிப்புதான் ஒரு குறிப்பிட்ட எண் தரப் படாததால், மாதிரியில் 20 நல்ல உருளைக் கிழங்குகள் இருப்பதாக அனுமானிப்போம்.

6. இந்தப் புள்ளியியல் அளவை, தீர்வு கட்டப்பகுதியில் விழாததால், $H_0$ஐ ஏற்றுக்கொண்டு, $p = 0 \cdot 90$ என்று முடிவு கட்டுகிறோம்.

சிகரெட் பிரச்சினைக்கான திட்ட வரை :

1. $H_0 : \mu = 30$; $H_1 : \mu < 30$

2. $\alpha$-ன் மதிப்பு $0 \cdot 001$ அல்லது $0 \cdot 0001$ என்று கொள்வது தான் சரி என்ற போதிலும் $\alpha = 0 \cdot 001$ என்று நாம் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்கிறோம்.

3. மாதிரி அளவை $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{\bar{x} - 30}{\sigma_{\bar{x}}}$ எடுகோள் உண்மையானால், கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கேற்ப, ராண்டம் மாறி $Z$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலைப்பரவலில் அமைகிறது.

நிபந்தனைகள் :

(i) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ மாதிரி ராண்டம் முறையில் எடுக்கப் பட்டது;

(ii) நிகோடின் கொள்ளளவுக்கான முழுமைத்தொகுதி ஓர் இயல் நிலைப்பரவலில் அமைகிறது.

(iii) நிகோடின் கொள்ளளவின் திட்ட விலக்கம் = 8 மில்லி கிராம்.

4. தீர்வு கட்டப்பகுதி $Z < -2.326$ ஆகும்.

5. $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0.8$

கண்டறிந்த $\bar{x} = 26$

கண்டறிந்த $Z = \frac{26 - 30}{0.8} = -5$

6. இந்த $Z$ மதிப்பு தீர்வு கட்டப்பகுதிக்குள் விழுவதால், $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே, $A$ வகை உகந்தது என்று கொள்ளப்படுகிறது.

1. இப்போது $1 \cdot \mu = 28$ என்றால், புகைஞர், திறன் 0·90 ஆக இருக்க வேண்டுமென்று முன் கூட்டியே விரும்புகிறார் எனக் கொள்வோம். ஆதலால், திட்டவரையில் கீழ்க்கண்ட மாற்றங் களைச் செய்வோம்.

2. $\mu = 28$ என்றால், $\alpha = 0.01$ என்றும், திறம் 0·90 என்றும் தேர்ந்தெடுக்கின்றோம்.

3. மாதிரி அளவு $n = 207$ என்று கணக்கிடுகிறோம்.

4. $Z < -2.326$ என்பது தீர்வுகட்டப் பகுதியாகிறது.

5. $n = 207$-க்கும் புதிய $\bar{x}$-க்கும் ஆன $Z$ மதிப்பைத் திரும்பக் கணக்கிடுகிறோம்.

6. தகுந்த முடிவினைப் பிறகு எழுதுகிறோம்.

தீர்வு :

1. $H_0 : \mu = 46; \quad H_1 : \mu \neq 46$

2. $\alpha = 0.05$ என்று தேர்ந்தெடுக்கின்றோம்; அரசாங்கச் சோதனையாளர் இந்த $\alpha$ மதிப்பைத்தான் உபயோகிக்கிறார்.

3. $Z = \frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 46}{\sigma_{\bar{x}}}$ எடுகோள் உண்மையானல், கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு ஏற்ப $Z$-ன் மாதிரிப்பரவல் ஒரு தரப் படுத்தப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக உள்ளது.

நிபந்தனைகள் :

(i) தக்காளிச் சாறு டப்பாக்கள் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

(ii) எடைகளின் முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளது.

(iii) $Z$ஐக் கணிப்பதற்கு $\sigma$ தெரிந்ததாக அனுமானித்தல் வேண்டும்.

4. தீர்வு கட்டப்பகுதி $Z < -1{\cdot}96$ என்றவாறும் $Z > 1{\cdot}96$ என்றவாறும் அமைந்து காணப்படுகிறது. அட்டவணை '2'-லிருந்து இம்மதிப்புகள் பெறப்படும்.

5. $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{\cdot}5}{\sqrt{25}} = 0{\cdot}1$

கண்டறிந்த $\bar{x} = 46{\cdot}18$

கண்டறிந்த $Z = \frac{46{\cdot}18 - 46}{0{\cdot}1} = 1{\cdot}8$

6. கண்டறிந்த $Z$ மதிப்பு, தீர்வு கட்டப் பகுதிக்குள் விழவில்லை. இதன் விளைவாக, $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது; மேலும் 46 அவுன்ஸ் சராசரி என்ற திட்ட அளவு ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

## பயிற்சிகள்

1. உருளைக்கிழங்கு உதாரணத்தில் நாம் நமது தீர்வு கட்டப் பகுதியாக $x = 0, 1, 2, \ldots, 18$ என்று தீர்மானித்துவிட்டதாகக் கொள்வோம். $\alpha$-ன் மதிப்பு 0 00948 எனக் குறைந்துள்ளதா என்று சரிபார். இந்தப் புதிய தீர்வு கட்டப்பகுதியினைக்கொண்டு $p$=0.80, 0.75, 0.70, 0.60, 0.50 மதிப்புகளுக்கான சோதனையின் திறம் என்ன என்று கண்டுபிடி. அப்படிக் கண்டறிந்த மதிப்புகளை $\alpha = 0{\cdot}008340$ எனும் சமயத்தில் ஒப்பிடு. $\alpha$ குறையும் போது $\beta$-ன் விளைவு என்னவாக உள்ளது ?

2. உருளைக்கிழங்குக்கணக்கில் $n=100$ என்று கொள்வோம். $x=0,1,2,...,84$ என்ற தீர்வு கட்டப் பகுதிக்கு $\alpha = 0.03989$ என்பது சரிதானா என்று ஒத்துப்பார். $p=0.90$ என்ற எடுகோள் $x=0,1,2, .84$ எனும்போது நிராகரிக்கப்பட்டால், $p = 0.80$, 0.75, 0.70, 0.60, 0.50 என்ற சமயங்களில் எல்லாம் சோதனையின் திறன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. $n=25$ என்ற போது கிடைத்த மதிப்புகளுடன் இவற்றை ஒப்பிடு $n$ஐக் கூட்டுவதால் திறன் வளைகோட்டிற்கு என்ன ஆகிறது?

3 சிகரெட் பிரச்சினையில் $\alpha=0.05$ எனக் கொள்வோம். இப்போது $\frac{\bar{x} - 30}{0.8} < -1.645$ என்ற தீர்வு கட்டப்பகுதி இந்த $\alpha$ மதிப்பைக் கொண்டுள்ளதா என்று சோதித்துக் கண்டறியவும், இந்தப் புதிய தீர்வுக் கட்டப்பகுதியைக் கொண்டு, $\mu = 27, 28, 29, 30$ மதிப்புகளில் திறம் மதிப்புகளைக் கணித்து, $\alpha = 0.01$ என்ற போது கண்டதிறன் மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடுக. $\alpha$ கூட்டப்பட்டால் $\beta$-ன் விளைவு எவ்வாறாக உள்ளது எனக் கூறு.

4. $n=100$ என்பதற்குப் பதில் $n=25$ என்று சிகரெட் பிரச்சினையில் எடுத்துக் கொள்வோம். $\alpha = 0.01$-ன் மூலம் கிடைத்த தீர்வு கட்டப்பகுதியைப்பயன்படுத்தி, $\mu = 27, 28, 29, 30$-க்கான திறன் மதிப்புகளைக் கணித்து, $n=100$ என்ற போது கண்ட திறன் மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடுக. $n$ மதிப்பு குறைவதால் திறன் வளைகோடு என்ன ஆகிறது?

5. தக்காளிச் சாறு பிரச்சினையில் $\alpha=0.10$ எனக் கொள்வோம். $\frac{\bar{x} - 46}{0.1} < -1.645$ என்பதும், $\frac{\bar{x} - 46}{0.1} > 1.645$ என்பதும் இந்த $\alpha$வுடன் கூடிய ஒருதீர்வு கட்டப்பகுதி என்று சரிபார்க்கவும். இந்தப் புதிய தீர்வு கட்டப் பகுதிக்கு, $\mu = 45.7, 45.8, 45.9, 46.1, 46.2, 46.3$ என்ற மதிப்புகளில் திறன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து $\alpha=0.05$ என்ற போது கிடைத்த திறன் மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடவும். $\alpha$ கூடினால் $\beta$ எவ்விதம் மாறுகிறது?

6. $n=25$-க்குப் பதிலாகத் தக்காளிச்சாறு பிரச்சினையில் $n=100$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம். $\alpha=0.05$-க்கான தீர்வு கட்டப்பகுதியைப் பயன்படுத்தி $\mu = 45.7, 45.8, 45.9, 46, 46.1, 46.2, 46.3$ மதிப்புகளுக்கான திறன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து $n=25$ எனும் போது கிடைத்த மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடுக. $n$ கூடினால் திறன் வளைகோடு எப்படி இருக்கும்? இரண்டாம் வகைப்பிழை ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு எவ்வாறு மாறுபடும்?

# 6. சராசரி, மாறுபாடுகளுக்கான புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகள்

புள்ளியல் உய்த்துணர்வின்பாற்பட்ட சில நிலைத்தரம் வாய்ந்த பிரச்சினைகளை சீரிய முறையில் பயிலுவதற்கேதுவான நிலையில் நாம் இப்பொழுது உள்ளோம். இவ்வத்தியாயத்திலும், தொடரும் அத்தியாயங்களிலும் விரிவாக விளக்கப்பட்டுள்ள வரை முறைகள் ஆழ்ந்த கணித இயல் சார்ந்த கோட்பாடுகளை நிலைக் களனுய்க் கொண்டு விளங்குகின்றன. குறிப்பாக, மிகப் பெரும் பான்மையான சோதனைகள், "இச் சோதனைகளின் திறன் வரை கோடுகள், அதே எடுகோளுக்கான மற்றச் சோதனைகளின் திறன் வரைகோடுகளைக் காட்டிலும் சாலச்சிறந்தன" என்னும் பண்பின் அடிப்படையில் அமைகின்றன, நாம் முன்பு குறிப்பிட்டுள்ளதற் கேற்ப, நமது வரை முறைகளைக் கணித இயலின் வாயிலாக நிலை நிறுத்துவதென்பது, புள்ளியியல் மேலும் விரிவானதொரு பயில் முறைக்கே பொருத்தமானதாகும். எனவெ, இதனைக் கருத்தில் கொண்டு நோக்குமிடத்து, நிலைத் தரம் மிக்க இப் புள்ளியியல் நுணுக்கங்களை எவ்வாறு பயின்று, பின்பு எங்ஙனம் செயல்படுத்த லாம் என்பதே நமது முக்கியக் குறிக்கோளாகிறது.

மாறுபாடு $\sigma^2$-ன் மதிப்பு தெரிந்த நிலையில், சராசரியைப் பற்றி எடுகோள்களின் சோதனை (Testing Hypotheses Concerning A Mean when $\sigma^2$ is known) :

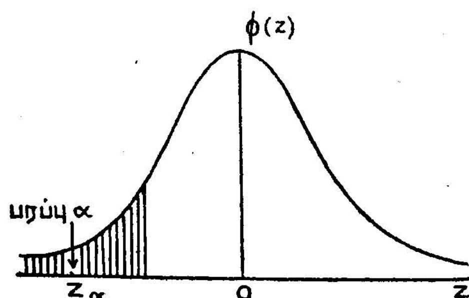
எடுகொள்களுக்கும், மாரெதிரான எடுகோள்களுக்குமான சாதாரணமாக நிகழும் மூன்று சூழ்நிலைகள் முந்தைய அத்தியா யத்தின் உதாரணத்தின் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளன. புகை பிடித்தல் சம்பந்தப்பட்ட உதாரணமானது, எடுகோள் $H_0 : \mu = \mu_0$ஐ, மாரெதிரான எடுகோள் $H_1 : \mu < \mu_0$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்வதன் ஒரு தனிச்சிறப்புவகை (Special Case) எனலாம். இவ்விடத்து, $\mu_0 = 30$ ஆகஅமைகிறது. பலநேரங் களில், எடுகோள் $H_0 : \mu = \mu_0$ஐ, மாரெதிரான எடுகோள் $H_1 : \mu > \mu_0$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்வது கருத்துக்கினிய தாகும். இத்தகையதொரு சூழ்நிலை, தக்காளிச்சாற்றுப் பிரச்சினை யின்மூலம் முன்பே விவரிக்கப்பட்டது. ஆனால், அவ்விடத்து,

மாறெதிரான எடுகோளானது, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரக் குறிப்புகளாலேயே உவந்தளிக்கப்படுகிறது. தக்காளிச் சாற்றுச் சோதனையின் சரியான ஆய்வானது $\mu_0 = 46$ என்றிருக்கையில், $H_0 : \mu = \mu_0$ என்னும் எடுகோளை, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ என்னும் (மாறெதிரான) எடுகோளுக்கு எதிராகக் கொள்வதிலேயே அமையும். பெரும்பான்மையான வகைகளில், தனிச் சராசரியைப் பற்றிய எடுகோளைப் பற்றிய சோதனைகளில், எடுகோள் $H_1$, மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$ மேற்குறிப்பிட்ட மூன்றுவித வகைகளில் [அதாவது, $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 = \mu < \mu_0$; $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$; $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$] ஒன்றுக அமைகிறது.

மாறுபாட்டின் மதிப்பு தெரிந்திருக்குமாயின், மாதிரி அளவை, $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ ஆனது சராசரி பற்றிய எடுகோள் சோதனையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu_0$ எனில், $Z$-ன் மாதிரிப் பரவல் (Sampling Distribution) இயல்நிலைப் பரவலாக, (கீழ்க்கண்ட இரண்டு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி செய்யப்படுகையில்) அமையும். அவையாவன :

(1) $x_1\ x_2 \ldots x_n$ என்னும் மதிப்புகள் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

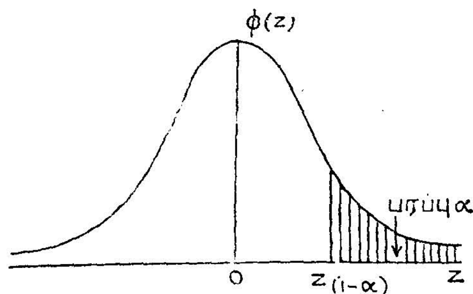
(2) இவை. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்படுகின்றன.




படம் 10(i).

மாறுபாடு $\sigma^2$ மதிப்பு தெரிந்திருக்கையில், $H_0 : \mu = \mu_0$-யை $H_1\ \mu < \mu_0$-க்கு எதிரான சோதனையில், நாம் கைக்கொள்ளும்

"தீர்வு கட்டமான பகுதியும்", மிகைத் தன்மை மட்டமும் படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன




படம் *11* (ii).

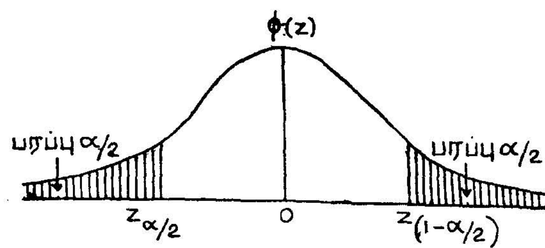
மாறுபாடு $\sigma^2$-ன் மதிப்பு தெரிந்திருக்கையில், $H_0 : \mu = \mu^0$ஐ, $H_1\ \mu > \mu_0$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்கையில் கைக்கொள்ளப்படும் "தீர்வு கட்டமான பகுதியும்," "மிகைத் தன்மை மட்டமும்" படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

எனினும், மேற் கூறிப்பிட்ட இரண்டு நிபந்தனைகளில் இரண்டாவது நிபந்தனையைப் பொறுத்தமட்டில், ஒரு விதிவிலக்கு ஏதுவாகிறது. நடு எல்லைத் தோற்றத்தின்படி (Central Limit Theorema) $n$-ன் மதிப்பு ஓரளவு பெரிதாக அமையும்போது, இயல் நிலைத் தன்மையை எத்தகைய பரவலும் அடைய முயல்கிறது. $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ என்னும் மாதிரி அளவையைக் கணக்கிட வேண்டுமாயின், திட்ட விலக்கம் $\sigma$-ன் மதிப்பும் தெரிந்துள்ளது என்ற மூன்றுவது ஊகத்தையும் சேர்க்கவேண்டியுள்ளது.

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 = \mu < \mu_0$ என்ற எடுகோள்களின் சோதனையில், $\bar{x}$-ன் மிகச் சிறிய மதிப்பும், $Z$-ன் சிறிய மதிப்புமே, $H_1$-க்கு உகந்ததாய் அமைகின்றன. எனவே, $Z$-ன் மதிப்பு சிறியதாக இருக்குமாவின் $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. மிகைத்மாறெதிரான எடுகோள் தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனில், நீர்வு கட்டமான பகுதி $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < Z_\alpha$ எனப் படம் 1-ல் குறிப்பிட்டுள்ளபடி அமையும். இதேபோன்று, $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ என்றிருக்கையில், $\bar{x}$-ன் பெரிய மதிப்புகள், எனவே $Z$-ன் பெரிய மதிப்புகள் $H_1$-க்கு உகந்ததாய் அமைகின்றபடியால், $\dfrac{\bar{x} - \mu^0}{(\sigma / \sqrt{n})} < Z_{1-\alpha}$ என்றமையும்போது $H_0$ நிராகரிக்கப்படும் விதத்தில், "ஒரு மிகைத் தன்மை மட்டம்" $\alpha$ (Significance level) பெறப்படுகிறது.

$H_0 : \mu = \mu, H_1\ \mu \neq \mu_0$ என்ற சோதனையின்போது, $\bar{x}$-ன் பெரிய, சிறிய மதிப்புகள் இரண்டும் $H_1$-க்குச் சாதகமானதாக அமைவதால் தீர்வு கட்டமான பகுதியில் $Z$-ன் பெரிய சிறிய மதிப்புகள் எல்லாம் அமையவேண்டுவது இன்றியமையாததாகும். $\alpha$ என்பது இத்தகையதொரு சோதனைக்கு மிகைத்தன்மை மட்டமாக அமைந்தால், எடுகோள் $H_0$ ஆனது, $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ அல்லது

$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{1 - \frac{\alpha}{2}}$ என்ற தருணங்களில் நிராகரிக்கப்படும்.




படம் 12.

மாறுபாடு $\sigma^2$-மதிப்பு தெரிந்திருக்கையில், $H_0 : \mu = \mu_0$ யை $H_1 : \mu \neq \mu_1$க்கு எதிராகச் சோதனை செய்கையில் கைக்கொள்ளப்படும் ''தீர்வு கட்டமான பகுதியும்''; ''மிகைத்தன்மை மட்டமும்'' குறிக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும் சமச்சீர் தன்மையினால் $Z_{\frac{\alpha}{2}} = - Z_{1 - \frac{\alpha}{2}}$ என்பதும் புலப்படும்.

**உதாரணம் :**

ஒரு மாநகராட்சி ஒவ்வோர் ஆண்டும் ஆயிரக்கணக்கான மின்சார விளக்குகளை (bulbs) பயன்படுத்துகிறது. சென்ற ஆண்டில் உபயோகப்படுத்தப்பட்ட விளக்குகளின் சராசரி ஒளிர் நேரம் (average life) 1000 மணிகள். திட்ட விலக்கம் 100 மணிகள். இந்நிலையில் முந்தைய வருடம் உபயோகப்படுத்தப்பட்ட மின்சார விளக்குகளைவிடக் குறைந்த விலையைக் கொண்ட மற்றொரு வகை விளக்குகள் மாநகராட்சியின் கவனத்திற்குக் கொண்டு வரப்படுகிறது. எனவே, புதிய வகை விளக்குகள் பழைய வகையைக் காட்டிலும் குறைவான ஒளிர் நேரம் கொண்டவை என்பது நிரூபிக்கப்பட்டாலன்றி, புதிய வகை

யையே வாங்குவது என்று முடிவு செய்யப்படுகிறது மிகைத் தன்மை மட்டமும் $\alpha = 0 \cdot 05$ என்று குறிக்கப்பட்டு, 100 புதிய வகை பல்புகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரி பெறப்படுகிறது. இம் மாதிரியின் சராசரி ஒளிர் நேரம் 985 மணிகள். புதியவகை ஒளி விளக்குகளும், பழைய வகையைப் போன்று, அதே திட்ட விலக்கம் உடையன என்று கொண்டு, மாநகராட்சியின் முடிவை ஆராய்க.

தீர்வு :

1. புதிய வகை விளக்குத் தொகுதிக்கு, $H_0 : \mu = 1000$ ஐ $H_1 : \mu < 1000$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்கிறோம். $H_0$ ஆனது நிராகரிக்கப்பட்டால், புதியவகை விளக்குகள், பழைய வகை விளக்குகளைவிடக் குறைவான சராசரி ஒளிர்நேரம் உடையன என்று தீர்மானிக்கிறோம்.

2. மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha = 0 \cdot 05$ என்று குறிக்கப் பட்டுள்ளது.

3. $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 1000}{\sigma_{\bar{x}}}$ என்ற அளவை (statistic) உபயோகப்படுத்தப்பட வேண்டும். சராசரி 1000 எனில், $Z$ ஆனது தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலைக் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் பூர்த்தி செய்யப்படும்போது பெறும். அவை யாவன :

1. மாதிரி ஒளி விளக்குகள் ராண்டமாக தேர்வு செய்யப் பட்டன.

2. ஒளி விளக்குகளின் முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளது. ஆனால், மாதிரி அளவு $n = 100$ என்றிருக்கையில், நிபந்தனை (2) தேவையற்றதாகும்.

3. மேலும் அளவையைக் கணக்கிட, திட்டவிலக்கம் 100 என்று கொள்ள வேண்டும்.

4. தீர்வு கட்டமான பகுதி $(\bar{x} - 1000)/\sigma_{\bar{x}} < -1 \cdot 645$ (படம் 1 : $\alpha = 0 \cdot 05$)

5. கணக்கிடுகள் : $\sigma = 100, \ \sigma_{\bar{x}} = \frac{100}{\sqrt{100}} = 10$

$\bar{x}$-ன் மதிப்பு $= 985$ எனவே, $Z = \frac{985 - 1000}{10}$

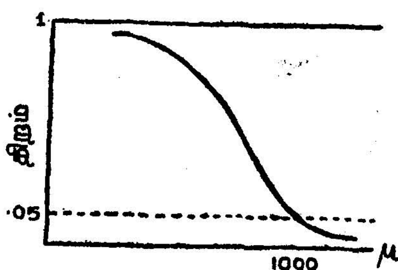
$= -1 \cdot 5.$

6. அளவையானது, தீர்வு கட்டமான பகுதியில் அமையாததால் எடுகோள் $\mu = 1000$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே மாநகராட்சியின் முடிவு சரியானதே.

எடுகோள் $H_0 : \mu = 1000$, புதிய வகை விளக்குகளின் சராசரி ஒளிர்நேரம் 1000 மணிகள் என்பதே ஆகும். எனவே, அதனை ஏற்றுக் கொள்கிறோம். (ஆனால், இப்பிரச்சனை அடிப்படைக் கோட்பாட்டை விளக்கும் வகையில் எளிதாக்கப்பட்டுள்ளது. திட்ட விலக்கத்தைப்பற்றிய ஊகம் உண்மையற்றதாகவும் அமைய வாய்ப்புண்டு. ஒரு மணி நேரத்திற்கான செலவு, மேலும் பிற அனுகூலங்கள் நமது முடிவை மாற்றலாம்).

எனவே, மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில். $H_0 : \mu > 1000$ ஐ, $H_1 : \mu < 1000$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்வது பொருத்தமானதாகும். ஏனெனில், இத்தகைய சோதனையில், (1)புதியவகை விளக்குகளின் சராசரி ஒளிர்நேரம், பழைய வகையின் ஒளிர் நேரத்தைக் காட்டிலும் அதிகப்படியாகவோ அதே அளவிலோ இருக்கும். (2) புதிய வகை விளக்குகளின் சராசரி ஒளிர் நேரம் பழைய வகையைக் காட்டிலும் குறைவானதாகும். இத்தகையதோர் சோதனைக்கு, அளவை, தீர்வுகட்டமான பகுதி, கணக்கீடுகள் போன்றவற்றுள் எவ்வித மாற்றமுமில்லை. ஆனால், தீர்வில் இரண்டாவது அடியைப்பொறுத்தமட்டில் சிறிது விளக்கம் தேவைப்படுகிறது. சுட்டுறுப்பு $\mu$-வைப் பல தரப்பட்ட மதிப்புகளில் ஒன்றாக அமைப்பதன் மூலம், முதல் வகைத் தவற்றின் மதிப்பைக் கணக்கிடுவதில் சில சிக்கல்கள் ஏற்படுகின்றன. எடுகோளானது $\mu = 100$, $\mu = 1000$ என்ற இரண்டு நிலைகளிலும் உண்மையாகிறது. எனவே, எடுகோளை நிராகரிப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு, $\mu > 1000$ என்னும் பலமதிப்புகளில் எந்த ஒரு மதிப்பு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றதோ, அதனைச் சார்ந்து அமையும் மேலும், சென்ற அத்தியாயத்திலேயே சோதனையின் திறம், $\mu$-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறாக அமையும் என்பதைக் கண்டோம். தீர்வையில் நான்காவது அடியில் காணப்படும் தீர்வு கட்டமான பகுதி $\mu = 1000$ என்றிருக்கையில், 0.05 திறத்தையும், $\mu > 1000$ எனில் 0.05-க்குக் குறைந்த திறத்தையும் அளிக்கிறது. எனவே, இதன் தொடர் விளைவாக 'முதல் வகைப் பிழை' என்னும் சொல் மிகவும் தெளிவற்ற பொருளைப் பெறுகிறது எனவே, எடுகோள் $H_0$-ன் படி, $\mu$விற்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளை ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல மதிப்புகளை அளித்தல், $H_0$-உண்மையானதாக இருக்கும் போது, திறத்தின் மீப்பெருமமதிப்பே முதல் வகைப் பிழையெனக் கொள்ள வேண்டும்.

எனவே, $H_0: \mu > \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ என்பதை, $H_0; \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$-க்குப் பதிலாகவும், $H_0: \mu < \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$-யை, $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$-க்குப் பதிலாகவும் சோதனை செய்கிறோம். எனினும், சோதனையின் தீர்வு கட்டமான பகுதி, அளவை, வரைமுறைகள் போன்றவற்றுள் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படுவதில்லை. மிகைத்தன்மை மட்டமே மாறுபடுகிறது. இம் மிகைத் தன்மை மட்டம் எவ்வாறு மாறுபடுகிறது என்பதை முன்னமே விளக்கினோம். அதாவது, $H_0$-உண்மையாயிருக்குங்கால் எழும் திறத்தின் மீப்பெரும மதிப்பே இம் மிகைத் தன்மை மட்டமாகும். இந்த மீப்பெருமமதிப்பு, அதாவது மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$, $\mu = \mu_0$ என்றிருக்கும் போது உருவம் பெறுகிறது.




படம் 13.

மின் விளக்கு உதாரணத்தின் தீர்வு திட்டப்பகுதியிலிருந்து விளைகின்ற திறன் வளைகோடு

## பயிற்சிகள்

1. ஒரு குழுமம் வண்ணக் கலவைகளை ஒவ்வொன்றும் 12 அவுன்சு எடையுள்ள முழுப் பொட்டலங்களாக விற்கிறது. 25 பொட்டலங்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் சராசரி எடை 11·83 அவுன்சுகளாகும். பழைய குறிப்புகளிலிருந்து, பொட்டலங்களின் (முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 0{\cdot}5$ எனப் பெறப்படுகிறது. $\alpha = 0{\cdot}05$ எனக் கொண்டு, அக் குழுமம் பெற விரும்பும் நிலையைப் பற்றிய முடிவுகளைத் தீர்மானிக்கவும்.

2. ஒளிர் விளக்குகளுக்கான செல்களைத் தயாரிக்கும் ஒரு தயாரிப்பாளர் தனது செல்கள் சராசரியாக 30 மணிக்குமேல் நீடிக்கும் என்று அறிவிக்கிறார். ஒரு குழுமம் அவரிடமிருந்து மிக அதிக அளவில் இத்தகைய செல்களைப் பெற விரும்புகிறது. ஆனால், அவரது கூற்றின் உண்மை சோதிக்கப்படவேண்டியுள்ளது. 36 செல்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரி ராண்டமாகத்

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு மாதிரியின் சராசரி நீடிப்பு நேரம் 40 மணி எனக் கணக்கிடப்படுகிறது. செல்களின் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 5½மணி எனக் கொண்டால், அக் குழுமம் அச் செல்களை வாங்குமா ?

3. ஆங்கிலம் உட்படப் பல துறைகளில் ஒரு பள்ளியில் சேரும் புதிய மாணவர்கள் அனைவரும் சோதிக்கப்படுகின்றனர். பல்வேறு ஆண்டுகளில் நடத்தப்பட்ட சோதனைகளைக் கருத்தில் கொண்டு நோக்கினுல், ஆங்கிலத் தேர்வில் சராசரி மதிப்பெண் 67 ஆகவும், திட்ட விலக்கக் 7·5 ஆகவும் அமைகிறது. 25 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பின் சராசரி ஆங்கில மதிப்பெண் 70 என்றமைந்தால், திட்ட விலக்கம் 7·5 என்ற நிலையில், சராசரி உயர்ந்துள்ளது என்று கூறமுடியுமா ?

4. ஒரு மீனவன் தான் விரும்பும் வகை மீனைப் பிடிக்க எண்ணினுல், 10 பவுண்டு எடைக்கு மேல் தாங்கக்கூடிய கயிற்றுத் திரள் வேண்டும் என்று தீர்மானிக்கிருன். பின்னர், "முதல் தரம்" என்று குறியிடப்பட்டுள்ள தொகுதியிலிருந்து 16 கயிற்றுத் திரள்களைச் சோதித்து மாதிரி சராசரி 10·4 பவுண்டு என்று கணக்கிடுகிருன். திட்ட விலக்கம் $\sigma = 0 \cdot 5$ பவுண்டு எனில், "முதல் தரம்" என்று குறியிடப்பட்டுள்ள கயிற்றுத் திரள்கள் அவன் தேவைக்கு ஏற்றனவா ?

**நம்பிக்கை இடைவெளிகள் (Confidencc Intervals) :** இது வரை நாம் கருத்தில் கொண்ட பலதரப்பட்ட பிரச்சினைகளிலும் உதாரணங்களிலும், சுட்டுருப்பின் மதிப்பு கணக்கிலேயே குறிப் பிடப்பட்டிருந்தது. பின்பு அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பற்றிய ஓர் எடுகோளைச் சோதனை செய்தலே வழிமுறையாக அமைந்தது. ஆனுல், பிரச்சினையிலேயே, சுட்டுருப்பின் மதிப்புக் குறிக்கப் படாமல் இருக்குமாயின், எடுகோள்களை அமைத்தலே சிக்கலை அளிக்கிறது. இத்தகைய தருணங்களில், ஓர் இடைவெளி மதிப்பீடு (Interval Estimate) பயனுள்ள செய்தியை அளிக்கத் தக்கதாகும். ஓர் எடுகோளானது சோதனை செய்யப்படும்போது, ஓர் இடைவெளி மதிப்பீடு, அந்த எடுகோள் நிராகரிக்கப்படும் தருணங்களில் மிகுந்த தன்மை பயக்கும்.

முன்பு கூறப்பட்ட உதாரணம், அதாவது மாநகராட்சி ஒளி உமிழ் விளக்குகளைப் பயன் படுத்துகையில் ஏற்படும் சோதனையில், சராசரி ஒளிர்வு நேரம் 950 மணிகள் என்று கொள்க. எடுகோள் $\mu = 1000$ என்பது நிராகரிக்கப்படுகிறது. இதனை நாம் ஏற்கெனவே விளக்கியுள்ளோம். சராசரி ஒளிர்வு

நேரத்திற்கான மிகப் பொருத்தமான, சாலச் சிறந்த ஊகம் 950 மணிகள் என்னும் புள்ளி மதிப்பீடாகும் (Point estimate). ஆனால், ஒரு மாதிரியிலிருந்து மற்றொரு மாதிரிக்கு ஒப்பு நோக்குகையில் மதிப்பீடுகளின் மதிப்பில் கணிசமான வேற்றுமை புலப்படுகின்றபடியால், நமது அறிவுக்குட்படாத சராசரி $\mu$-ன் மதிப்பு 931·4, 969·6 என்ற இரு மதிப்புகட்கு இடையே அமையுமானால், மதிப்பீடு பற்றிய நமது நம்பிக்கை மேலும் வலுவடைகிறது. இப்பொழுது, எவ்வாறு இந்த இடைவெளி கிடைக்கிறது என்பதையும், எத்தகையதொரு நம்பிக்கையை இந்த இடைவெளி அளிக்கும் திறம் வாய்ந்தது என்பதையும் ஆராய்வோம்.

உண்மையான $\mu$-ன் மதிப்பு எத்தகையதாய் இருப்பினும், ராண்டம் மாறி $Z = \bar{x} - \mu / \sigma_{\bar{x}}$ எந்நிலையிலும், $n$-ன் மதிப்பு ஓரளவு பெரிதாக இருக்குமாயின், இயல் நிலைப்பரவலாக அமைகிறது. $n$-ன் மதிப்பு சிறியதாக இருப்பினும், முழுமைத் தொகுதி இயல் நிலைப் பரவலைப் பெற்றிருப்பின், Z-ம் தர இயல் நிலை மாறியாக அமையும். எனவே, தர இயல் நிலைத் தன்மையின் வாயிலாக,

$$\text{Prob}\left[-1.96 < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} < 1.96\right] = 0.95$$

அல்லது மிகப் பொதுவாக

$$\text{Prob}\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma\bar{x}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

மேற்காட்டப்படுள்ள இரண்டு சமன்பாடுகளையும் கவனிக்கவும். முதலில், $-1.96 < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$. எனவே, $-1{\cdot}96\sigma_{\bar{x}} - \bar{x} < -\mu$ இச்சமமின்மையின் இருபுறத்திலும் ஒரே மதிப்புள்ள எண்ணைக் கூட்டவோ கழிக்கவோ இயலும். எனவே, $-1{\cdot}96\,\sigma_{\bar{x}} - \bar{x} < -\mu$ அல்லது $\bar{x} + 1{\cdot}96\,\sigma_{\bar{x}} > \mu$. இந்தச் சமமின்மைகள் பற்றிய விதிகளை நாம் கீழ்க்கண்ட உதாரணங்கள் மூலம் பெறலாம். உதாரணமாக, $2<4$ என்பது, இரண்டு பக்கங்களிலும் 2-ஆல் வகுக்கப்படும்போது, $1<2$ என ஆகிறது. ஆனால், $-1$-ஆல் பெருக்கப்பட்டால் $-1>-2$ என ஆகிறது. அதாவது, சமமின்மையின் குறி மாறுபடுகிறது. எனவே, ஒரு மாறெண்ணால் (Negative Number) ஒரு சமமின்மை பெருக்கப்படும் போது அல்லது வகுக்கப்படும் போது, சமமின்மைக் குறி மாற்றப்படுகிறது. இத்தகைய விதிகளின்படி,

$\bar{x} + 1.96\,\sigma_{\bar{x}} > \mu$ என்பது உள்ளங்கை நெல்லிக்கனி போல் தெளிவாகிறது.

எனவே, $-1{\cdot}96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} < 1{\cdot}96$

[அல்லது $\bar{x} - 1.96\,\sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + 1{\cdot}96\,\sigma_{\bar{x}}$]

என்றாகிறது. கணக்கியல் விதிகள் இதனால் முரண்பாடு அடைவதில்லை. அவ் விதிகளின்படியே, இச் சமமின்மைகள் அமைகின்றன. எனவே, இவற்றில் இரண்டில் ஒன்று உண்மையாகவே அமையும்.

$$\text{Prob}\left[\bar{x} - 1{\cdot}96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1{\cdot}96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0{\cdot}95$$

$$\text{Prob}\left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha.$$

எனவே, நாம் முன்பு விளக்கிய மாநகராட்சி ஒளி விளக்கு உதாரணத்தில், $\sigma = 100$, $\sqrt{n} = 10$, $\bar{x} = 950$, எனவே,

$$\text{Prob}\,[950 - 19.6 < \mu < 950 + 19{\cdot}6] = 0{\cdot}95$$

அல்லது

$$\text{Prob}\,[931{\cdot}4 < \mu < 969{\cdot}6] = 0{\cdot}95$$

எனவே, (931·4, 969·6) என்பது "நம்பிக்கை இடைவெளி" எனப் பெறப்படுகிறது. $\mu$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி, நம்பிக்கைக்கெழு (Confidence coefficient) 0·95 உடன் மேற்கண்டவாறு பெறப்படுகிறது. எனினும், மேற்கூறிய நம்பிக்கை இடைவெளிகளை விவரிக்கையில், தகுந்த கவனம் செலுத்தப் படவேண்டும், (931·4, 969·6) என்ற இடைவெளியில் $\mu$ அமைவதற்கான நிகழ்தகவு (Probability) 0.95 என்ற எண்ணம் உதிக்கலாம். ஆனால், இவ்வெண்ணம் தவறானது என்பது சிறிது ஆழ்ந்து சிந்தித்தால் புலப்படும். ஏனெனில், $\mu$ ஆனது ஒரு நிச்சயமான மதிப்பைப் பெற்றுள்ளது; எனவே, அம் மதிப்பு ஒன்று (931·4, 969·6) என்ற இடைவெளியில் அமையவேண்டும்; அல்லது அவ் விடைவெளிக்கு வெளியில் அமையவேண்டும்; இதற்கான நிகழ்தகவு (Probability) 1 அல்லது 0 ஆகும். எனவே நம்பிக்கை இடைவெளி பற்றிய சமன்பாடு நியாயமற்றதாகத் தோன்றும். எனவே, இந்த

இடைவெளி ஒரு ராண்டம் மாறியாகும். அதாவது, இதே முறையில் நூற்றுக் கணக்கில் இடைவெளிகள் கணக்கிடப்படுமாயின், (ஒவ்வோர் இடைவெளியும் ஒரு மாதிரியின் அடிப்படையாக) இத்தொடர் ஓட்டத்தில்; நூற்றிற்கு 95 இடைவெளிகள் $\mu$-ன் மதிப்பை உள்ளடக்கியனவாக இருக்கும். இம்முறையானது, ஒரு புள்ளியைச்சுற்றி, நூற்றிற்கு 95 முறைகள் அப்புள்ளியை உள்ளடக்கும் திறன் வாய்ந்த, இடைவெளிகளை அமைப்பதைப் போன்று விளங்கும்.

$\mu$-விற்கு ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதற்கும், $\mu$-வைப் பற்றிய ஏதேனும் எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கும் ஓரே அளவை $Z$ பயன்படுத்தப்படுகின்ற காரணத்தால் இடைவெளியும், பல்வேறு சோதனை முறைகளில் ஒன்றும், ஒரே மாதிரியானவை என்று எண்ண இடம் இருக்கிறது. $\alpha = 0{\cdot}05$ எனக் கொண்டால், $\bar{x}$-ன் மதிப்பு 950 என்றிருக்குமானால் $H_0 : \mu = 1000$ $H_1 : \mu \neq 1000$ என்ற சோதனையில் $H_0$ நிராகரிக்கப்பட வேண்டியுள்ளது. ஏனெனில், $Z$-ன் மதிப்பு $-5$ ஆகும். ஆனால், நாம் அமைத்த நம்பிக்கை இடைவெளி, இதே மிகைத்தன்மை மட்டத்தில்; 1000 என்ற மதிப்பை உள்ளடக்கியதாக அமையவில்லை. ஆனால், $\bar{x} = 985$ என்றிருக்குமாயின், எடுகோள் $H_0$ ஏற்கப்படுகிறது (மிகைத் தன்மை மட்டம் 0·05). $\bar{x} = 985$ எனக் கொண்டு அமைக்கப்படும் "நம்பிக்கை இடைவெளி" 985 ± 9·6 அதாவது (965·4, 1004·6) ஆகும். இந்த இடைவெளி 1000-யும் அடக்கியுள்ளது. எனவே, $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$ என்ற சோதனையில் மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$ என்றிருக்கையில்,

$$\left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$ என்ற இடைவெளியானது, $\mu_0$ஐத் தன்னுள் அடக்கியிருக்கும் போதுதான் எடுகோள் நிராகரிக்கவோ ஏற்றுக்கொள்ளவோபடுகிறது என்று முடிவாகிறது. எனவே, $Z$ அளவையைக் கணக்கிடுவதற்குப்பதிலாக இத்தகையதோர் இடைவெளியைக் கணக்கிடுதல் $H_0$ஐச் சோதனை செய்கையில் மிக்க பயன் விளைப்பதாக அமைகிறது.

இத்தகையதோர் இடைவெளியின் நீளம், $\bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$- \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{u}}\right] = 2Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ . நாம்

இரண்டு வெளிப்படையான உண்மைகளைக் கண்கூடாகக் காணலாம். முதலாவதாக, $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ அதிகமாயின் இடைவெளியின்

அகலமும் அதிகரிக்கும். ஓர் இடைவெளியுடன் நாம் இணைக்கும் நிகழ்தகவு (Probability)அதிகரிக்க, அந்த இடைவெளியின் அகலமும் குறிப்பிட்ட நிலையான $n$ மதிப்பிற்கு, அதிகமாகிறது. இடைவெளியின் அகலம் அதிகரிப்பின், அந்த இடைவெளியில் $\mu$ அமையும் என்பதற்கான நம்பிக்கையும் அதிகரிக்கும் என்பது பொது அறிவாகும். ஆனால், $\mu$ ஆனது 940-க்கும் 960-க்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது என்று கூறுவது போல் அம் மதிப்பு 0-க்கும் 5000-க்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது என்று கூறுதல் பயனற்றதாகும், நகைப்பிற்குரியதும் ஆகும். இரண்டாவதாக, $n$-ன் மதிப்பை அதிகரிப்பதன் மூலம் இடைவெளியின் நீளத்தைக் குறைக்க இயலும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\alpha$-க்கு L-என்ற குறிப்பிட்ட மதிப்பினை, இடைவெளியின் நீளமாக்கலாம். எனவே, $n$-ன் மதிப்பைப் பெற நாம் $2 Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = L$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கிறோம்.

$$n = \left[\frac{2\sigma Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L}\right]^2$$

. $n$-ன் முழு எண் மதிப்பையே நாம் உபயோகிக்கிறோம். ஏனெனின், $n$ மாதிரியின் அளவாகும். எனவே, $n$ முழு எண் ஆக இருத்தல் அவசியம். மேலும் நாம் முன்பு விவரித்த நம்பிக்கை இடைவெளியில் சில கருத்துக்கினிய கணித இயல் சார்ந்த நுணுக்கங்கள் கையாளப்பட்டுள்ளன. முதலாவதாக, $\mu$-க்கான, $\sigma$ தெரிந்த நிலையில், குறிப்பிட்ட $\alpha$, $n$ மதிப்புகளுக்கு மிகச் சிறிய இடைவெளியாகும். பெரிய இடைவெளிகள், அசமச்சீர் இடைவெளிகளின் மூலம் அமைத்துக் கொள்ள முடியும். இரண்டாவதாக, $\mu$-ன் தவறுன மதிப்புகள் இந்த இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு (Probability) வேறு எந்த இடைவெளியைக் காட்டிலும் குறைவானதாக அமைகிறது.

**உதாரணம் :** முன் அத்தியாயத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள புகை பிடிப்போர் பற்றிய பிரச்சினையில், சராசரி நிகோடின் கலப்பிற்கு, நம்பிக்கைக் கெழு 0 99 எனக் கொண்டு, ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

**தீர்வு :**

$$\bar{x}=26,\ \sigma=8,\ n=100\quad 1-\alpha=0.99 \Longrightarrow \alpha=0{\cdot}01$$

எனவே, $\frac{\alpha}{2}=0.005,\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = 2.576.$

எனவே, நம்பிக்கை இடைவெளி,

$$\left[26 - 2.576 \left(\frac{8}{\sqrt{100}}\right), 26 + 2.576\left(\frac{8}{\sqrt{100}}\right)\right]$$

அதாவது (23.94, 28.06).

உதாரணம் : மேற்கண்ட உதாரணத்தில் இடைவெளியின் நீளத்தை 2 மில்லி கிராம் குறைக்க வேண்டுமாயின், $n$-ன் மதிப்பு எவ்வளவு பெரிதாக அமைய வேண்டும் ?

$L = 2,\ \sigma = 8,\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = 2.576$ எனக் கொள்க.

$$n = \left[\frac{2\,(8)\ \ (2{\cdot}576)}{2}\right]^2 = 424.8.$$

எனவே, $n = 425$ மாதிரி அளவு 425 ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

ஒரு புறத்த நம்பிக்கை இடைவெளிகளை ஒரு பக்கமான பரப்பைக் கருத்தில் கொள்வதன் மூலம் அமைக்கலாம். எனவே,

$$\text{Prob}\left[\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} < 1{\cdot}645\right] = 0{\cdot}95,$$

$$\text{Prob}\left[\bar{x} - 1{\cdot}645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu\right] = 0{\cdot}95$$

## பயிற்சிகள்

(1) வண்ணக் கலவையைப் பொட்டலங்களில் விற்பனை செய்யும் குழுமம் பற்றிய பிரச்சினையில், ஒரு பொட்டலத்தின் சராசரி எடைக்கான, நம்பிக்கைக் கெழு 0·95 கொண்ட, ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும். இந்த இடைவெளியில் 12 உள்ளடங்கி உள்ளதா ? இந்த இடைவெளிக்கும், எடுகோள் சோதனைக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பினை விளக்குக. மேலும் இந்த இடைவெளியின் நீளம் 0·1 அவுன்சு குறைக்கப்பட வேண்டுமாயின், $n$-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

2. பள்ளியில் புதிதாகச் சேரும் மாணவர்கட்கு அளிக்கப் படும் ஆங்கிலம் மற்றும் பிற துறையில் சோதனை பற்றிய சென்ற அத்தியாயத்துப் பிரச்சினையில், மாணவர்களின் சராசரி மதிப் பெண்ணுக்கான. நம்பிக்கைக் கெழு 0·99 கொண்ட ஒரு

நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்க இந்த இடைவெளியில் 67 அடங்கியுள்ளதா? எடுகோள் சோதனைக்கும் இந்த இடைவெளிக்கும் இடையே அமைந்த தொடர்பினை விளக்குக. இடைவெளியின் நீளம் 2 அலகுகள் குறைக்கப்பட வேண்டுமாயின், எத்தனை மாணவர்கள் தேவை?

$\sigma^2$-ன் மதிப்பு தெரியாத நிலையில், சராசரி பற்றிய உய்த்துணர்வு : உண்மையான உலக வாழ்க்கையை ஒட்டிய பெரும்பாலான பிரச்சினைகளில், மாறுபாடு (variance) நமது அறிவிற்குட்பட்டதாக அமைவதில்லை. எனவே, மாறுபாட்டின் மதிப்பு தெரியாத நிலையில், $Z$-அளவையின் மதிப்பைக் கண்டறிவது என்பது சாத்தியமற்ற ஒன்றாகும். எனவே, நமது எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கும், தகுந்த தேவையான நம்பிக்கை இடைவெளிகளை அமைப்பதற்கும் இயலாமற் போகிறது இத்தகைய சூழ்நிலையில் $s^2$-ன் மதிப்பை $\sigma^2$-மதிப்பிற்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தும் வரைமுறைகளைக் கருத்தில் கொள்கிறோம். இத்தகைய முறைகள் எங்கனம் அமைக்கப்படுகின்றன எங்கனம் விரிவடைகின்றன என்பதே நமது முக்கிய ஆவலாகும். நாம் பயன்படுத்தும் அளவை, $t_{n-1} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ என்பதாக அமைந்து, சராசரியைப் பற்றிய உய்த்துணர்வுகளைப் பெறுகிறோம். முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu_0$ எனில் $t_{n-1}$-ன் மாதிரிப்பரவல்; கீழ்க் கண்ட இரு நிபந்தனைக்குட்பட்டு, $t$-பரவலாக அமைகிறது. அவையாவன :

(1) $x_1; x_2 \ldots x_n$ என்னும் மதிப்புகள் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. (2) மேலும் அவை ஓர் இயல் நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்படுகின்றன.

$Z$-அளவைக்குப் பதிலாக, $t_{n-1}$ என்ற அளவை பயன் பெறுகிறது என்ற மாற்றமேயல்லாது, பல தரப்பட்ட எடுகோள்களைச் சோதிக்கையில், வரைமுறைகளில் எவ்வித மாற்றமும் இல்லை. தீர்வு கட்டமான பகுதியும் தகுந்த முறையில் $t$-பரவல் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து (அட்டவணை-8) பெறப்படுகின்றது. $t$-ன் வரையற்ற பாகை (degrees of freedom) மாதிரி அளவைக் காட்டிலும் ஓர் எண்ணிக்கை குறைவாக அமைகிறது. மேலும் தீர்வு கட்டமான பகுதியை அமைப்பதில், முன்பு $\sigma^2$-ன் மதிப்பு தெரிந்த நிலையில் எவ்வித வழிமுறை பின்பற்றப்பட்டதோ அதே முறை அமைகிறது. தகுந்த முறையில் வலது அல்லது இடது பக்கத்தில்

தீர்வு கட்டமான பகுதி அமைகிறது. எனவே, $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{n-1}, \alpha$

என்றமைந்தால், $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$ என்ற எடுகோள் சோதனையுறும்போது, $H_0$ நிராகரிக்கப்படும். இப்பொழுது, இடது பக்கம் தீர்வு கட்டமான பகுதியாக அமைகிறது. இதே போல் $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_{n-1, 1-\alpha}$ எனப்படும்போது, $H_0 : \mu = \mu_0$.

$H_1 : \mu > \mu_0$ என்ற சோதனையில், $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. இச் சோதனையில், தீர்வுக்கட்டமான பகுதி வலது பக்கத்தில் அமைகிறது. முடிவாக, $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \pm \mu_1$ என்ற சோதனையில் $t_{n-1} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$ $t_{n-1} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

$> t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ என்றமைந்தால், $H_0$ நிராகரிக்கப்படும். இந்நிலையில் தீர்வு கட்டமானப் பகுதி இரு புறங்களிலும் அமைகிறது. மத்திய நம்பிக்கை இடைவெளிகள் இதன் மூலமே பெற ஏதுவாகிறது.

உதாரணம் : $\bar{x} = 985, s = 90 \cdot 2$ என்றமையும் 25 ஒளிர் விளக்குகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியினைக் கொண்டு, மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனக் கொண்டு $H_0 : \mu = 1000, H_1 : \mu <$ 1000 என்னும் எடுகோளைச் சோதனை செய்க.

(1) ஒளிர் விளக்குகளின் தொகுதிக்கு $\mu = 1000$ என்னும் எடுகோளை, $\mu < 1000$ என்னும் மாறெதிரான எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதனை செய்கிறோம்.

(2) $\alpha = 0 \cdot 05$ என்பதும் அளிக்கப்பட்டுள்ளது.

(3) அவை $t_{n-1} = \frac{\bar{x}-1000}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ என்பது பயன்பெறுகிறது.

சராசரி 1000 ஆக அமையின், $t_{n-1}$, ஒரு $t$ பரவலாகப் பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு அமையும். அவை: (1) ஒளிர் விளக்குகளின் மாதிரி ராண்டம் முறையில் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டது. (2) ஒளிர் விலக்குகளின் முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது.

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி, $\frac{\bar{x}-1000}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -1{\cdot}711 = t_{24,0.05}$

(5) $\bar{x} = 985$, $n = 25$, $s = 90{\cdot}2$, எனவே,

$$t_{n-1} = \frac{985-1000}{(90{\cdot}2)/5} = 0{\cdot}83.$$

(6) எனவே. எடுகோள் $H_0 : \mu = 1000$ ஏற்றுக்கொள்ளப் படுகிறது.

அளவை $t_{n-1}$ ஒரு $t$ பரவலாக அமைவதற்கென விதிக்கப் பட்ட இரு நிபந்தனைகளில் ஒன்ருன, முழுமைத் தொகுதி ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைதல் வேண்டும் என்ற நிபந்தனை, மாதிரி அளவு (Sample size) ஓரளவு பெரிதாக அமைந்தால், அவ்வளவு முக்கியமானதல்ல. அதாவது, $t$-பரவலைக்கொண்டு கணக்கிடப்படும் நிகழ்தகவுகள் (Prob) முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலாக அமையாத நிலையிலும், சற்றேறக்குறைய சரியானதாகவே அமைகின்றன. இயல்நிலைத் தன்மையிலிருந்து சிறிது மாறுபட்டால்கூட, $n$-ன் மதிப்பும் சிறிதாக இருக்கும் நேரங் களிலும், சோதனைகளைப் பாதிப்பதில்லை.

நம்பிக்கைக் கெழு $(1-\alpha)$ எனக்கொண்டு, $\mu$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுவதற்கு, நாம் கீழ்க்கண்ட முறையைக் கையாள இருக்கிருேம்.

$$\text{Prob}\left[-t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

இச் சமமின்மை, அதாவது அடைப்பிற்குள் காணப்படும் சமமின்மையைப் பின்கண்டவாறு மாற்றலாம்.

$$\text{Prob}\left[\bar{x}-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

எனவே, தேவைப்படும் நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left(\bar{x}-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ என்ற எடுகோள் சோதனையிலும் இந்த நம்பிக்கை இடைவெளி பயன் பெறுகிறது. $n$, $\alpha$ இவற்றின் மதிப்பு மாருமல் இருக்கும் போது,

$$\left( \bar{x} - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

என்னும் நம்பிக்கை இடைவெளியில், $\mu_0$-ன் மதிப்பு அடங்கியுள்ள போது, $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே $t_{n-1}$ என்ற அளவையைக் கணக்கிடுவதை விட, நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதும் $H_0$-ன் சோதனையாக அமையும்.

உதாரணம்: $\bar{x}=985$, $s=90 \cdot 2$, $n=25$, $\alpha=0 \cdot 05$ எனக் கொண்டு, சராசரிக்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

தீர்வு: $\alpha=0 \cdot 05$ ஆதலின் $\frac{\alpha}{2} = 0 \cdot 025$, $n=25$ ஆதலின் நமக்குத் தேவையான மதிப்பு $t_{24, 0 \cdot 975} = 2 \cdot 06$ என $t$-பரவல் பரப்பு அட்டவணை 3-லிருந்து பெறுகிறோம். எனவே, நமக்குத் தேவையான நம்பிக்கை இடைவெளி,

$$\left[ 985 - \frac{2 \cdot 06 \cdot (90 \cdot 2)}{\sqrt{25}}, \ 985 + \frac{2 \cdot 06 \cdot (90 \cdot 2)}{\sqrt{25}} \right]$$

$= [947.8, \ 1022 \cdot 2]$ எனப்பெறுகிறோம். இப்படிப் பட்ட தொரு நம்பிக்கை இடைவெளியின் நீளம் $2 t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$. இது ஒரு ராண்டம் மாறியாக அமைகிறது $\mu$-விற்கென அமைக்கப்படும் வேறு பல இடைவெளிகளின் நீளங்களின் சராசரியைக் காட்டிலும், $2 t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$-ன் சராசரி மதிப்பு குறைவதாகும். $\sigma$-ன் மதிப்பு தெரிந்துள்ள நிலையில், எவ்வாறு இந்த நம்பிக்கை இடைவெளியில், $\mu$-ன் தவருன மதிப்புகள் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு (Prob), வேறு எந்த நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காட்டிலும் குறைவானதோ, அதேபோன்று, $s$-ன் மதிப்பைப் பயன்படுத்தும் நிலையிலும் நிகழ்தகவு (Prob), குறைவானதாகவே அமைகிறது. நிகழ்தகவு

$\left(2 t_{n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < L\right)$-ன் மதிப்பைப் பெற விரும்புகிறோம் என்று கொள்க. இவ்விடத்து L-ன் மதிப்பு குறிக்கப்பட்டு நமது அறிவிற்குட்பட்டதாகிறது. மேற் குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவும்,

Prob. $\left[\frac{s^2}{\sigma^2} < \frac{n L^2}{4 \sigma^2 t^2_{n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$ என்பது ஒன்றேயாகும். $x_1\ x_2 \ldots x_n$ என்னும் மாதிரி மதிப்புகள் (Sample observationr) (1) ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டிருந்தாலும் (2) ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்பட்டாலும், $\frac{ns^2}{\sigma^2}$-ன் மாதிரிப் பரவலில் ஒரு கைவர்க்கப் பரவலாக அமைகிறது, $\sigma^2$-ன் மதிப்பு தெரியாத நிலையில், L-ன் மதிப்பை $\sigma$-ன் மடங்காகத் தெரிவு செல்வதன் மூலம்

Prob. $\left[\frac{s^2}{\sigma^2} < \frac{n L^2}{4 \sigma^2 t^2_{n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$ மதிப்பைப் பெறலாம்.

**தீர்வு :**

$n = 25$, வரையற்ற பாகை $= 24\ t_{24,\ 0\cdot975} = 2\cdot06\ L = \sigma$ எனக் கொள்க.

$$\frac{n L^2}{4 \sigma^2 t^2_{n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{25\ \sigma^2}{4\sigma^2\ (2\cdot6)^2} = 1\cdot47.$$

நிகழ்தகவு $\left(\frac{s^2}{\sigma^2} < 1\cdot47\right)$-ன் மதிப்பைப் பெறவேண்டியுள்ளது. வரையற்ற பாகை 24-க்கான கைவர்க்கப் பரவலின் பரப்பு அட்டவணை 4-ன் மூலம் கண்ட மதிப்பு 33·196ஐ அதனது வரையற்ற பாகையால் வகுக்கப்பட்டால்

Prob. $\left(\frac{s^2}{\sigma^2} < 1\cdot38\right) = 0\cdot90$. (ie) $\left(\frac{33\ 196}{24} = 1\cdot38\right)$

ஆகும். இதேபோல $Pr.\ \left(\frac{s^2}{\sigma^2} < 1\cdot52\right) = 0\cdot95$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே, $Pr\left(\frac{s^2}{\sigma^2} < 1\cdot47\right) = 0\cdot93$ தோராயமாக

ட $= 0{\cdot}8\sigma$, எனில் ட$^2 = 0{\cdot}64\sigma^2$.

$$Pr.\left(\frac{s^2}{\sigma^2} < (0{\cdot}64)(1{\cdot}47)\right] = \text{Prob}\left[\frac{s^2}{\sigma^2} < 0{\cdot}94\right]$$

பயோ மெட்ரிகா அட்டவணைகளின் புத்தகத்தில் 124ஆம் பக்கம் காணப்படும். கைவர்க்கப் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து (தீர்வு கட்டமான பாகை 24) கணித்து

$$\text{Prob.}\left[\frac{s^2}{\sigma^2} < 0{\cdot}902\right] = 0{\cdot}40,$$

$$\text{Prob.}\left[\frac{s^2}{\sigma^2} < 0{\cdot}972\right] = 0{\cdot}50$$ என்றறிகிறோம்.

எனவே, $Pr.\left[\frac{s^2}{\sigma^2} < 0{\cdot}94\right] = 0{\cdot}45$, (தோராயமாக)

குறிப்பு : $t_{n-1}$ என்னும் முன்பு விவரிக்கப்பட்ட மாதிரி அளவை (statistic), முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலாக அமையாவிடினும், $n$-ன் மதிப்பு ஓரளவு பெரிதாக அமையுமாயின், தோராயமான $t$-பரவலைப் பெறுகிறது என்று விளக்கினோம். எனவே, முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைத் தன்மையைப் பெறாவிடினும், நிகழ்தகவு மதிப்புகளையோ, சோதனையின் வரை முறையையோ, நம்பிக்கை இடைவெளியையோ பாதிப்பதில்லை. ஆனால், $\frac{s^2}{\sigma^2}$ என்னும் மாறி, முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலாக அமையாவிடில், ஒரு கைவர்க்கப் பரவலாக அமையாது. எனவே, $\frac{s^2}{\sigma^2}$ என்னும் மாறியைச் சார்ந்த நிகழ்தகவு (Prob) விளக்கங்கள், நம்பிக்கை இடைவெளி ஆகியவை, இயல்நிலைத் தன்மையை முழுமைத் தொகுதி பெறாத நிலையில் பெரிதும் மாறுபட்டு அமைகின்றன.

## பயிற்சிகள்

1. $\bar{x} = 12.24$, $s = 0.6$, $n = 25$. இவ்விடத்தில் $n$-ஒரு ராண்டம் மாதிரி எனக் கொண்டு, $\alpha = 0.05$ எனில், $\mu = 12$ என்ற எடுகோளைச் சோதனை செய்க.

2. மேற்கண்ட புள்ளி விவரத்தைக் கொண்டு, நம்பிக்கைக் கெழு 0.95 எனக் கொண்டு $\mu$-க்கான ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும். இந்த இடைவெளியும், முதற்கணக்கிற்கான சோதனையும் எங்ஙனம் தொடர்பு கொண்டுள்ளன?

3. கணக்கு 2-ல், 0.95 யை நம்பிக்கைக் கெழுவாகக் கொண்டு, மாதிரி அளவு 25 என்றமைகையில், நம்பிக்கை இடைவெளி அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு ராண்டம் மாதிரியாக அமைந்த 25 மதிப்புகளைக் கொண்ட (ஓர் இயல் நிலைப் பரவலி லிருந்து பெறப்பட்டது), விவரக் குறிப்பினின்றும் அமைக்கப் படும் இடைவெளி (நம்பிக்கை கெழு 0.95) 0,75 $\sigma$-வை விட சிறிதாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவை (prob) மதிப்பிடுக. இந்நிகழ்தகவு 0.99 ஆக உயர்த்தப்பட வேண்டுமாயின், $n$-ன் மதிப்பு எங்ஙனம் அமைய வேண்டும்?

4. ஒரு புகழ் பெற்ற சீட்டாட்ட நிபுணர், அவர் நிலையான வழிமுறைகளைப் பின் பற்றிய போது, அவர் பெறும் சராசரிப் புள்ளி 60% என்று கண்டறிகிறுர். ஒரு புதிய, மாற்று முறை யினை 16 தடவை வெவ்வேறு தனிப் பந்தயங்களில பயன் படுத்தியபோது, சராசரி 62.1% ஆகவும், திட்டவிலக்மல் 3% ஆகவும் அமைகிறது. பந்தயத்தில் அவர் பெறும் புள்ளிகள் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகின்றன எனக் கொண்டு, மிகைத் தன்மை மட்டம் 0,01 என்றிருக்குமாயின் அவர் புதிய முறையைப் பயன்படுத்துவதால் வெற்றி வாய்ப்பு அதிகமானதா என்பதைக் கண்டறிக.

5, சீட்டாட்ட நிபுணர் பிரச்சினைக்குக் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு, புதிய வழிமுறைச் சராசரி $\mu$-விற்கு நம்பிக்கைக்கெழு 0·90 எனக்கொண்டு ஒரு நம்பிக்கை இடை வெளியை அமைக்கவும்.

6. மேற்கூறப்பட்டவாறு அமைக்கப்பட்ட இடைவெளியின் அகலம் $\sigma$, 0·5$\sigma$ இவற்றைவிடக் குறைவாக அமையவேண்டு மாயின், அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் (probabilities) கணக்கிடுக. 0·5$\sigma$-க்கான இந்த நிகழ்தகவு, 0·90 ஆக உயர்த்தப்படவேண்டு மாயின், $n$-ன் மதிப்பு எங்ஙனம் அமைய வேண்டும்?

7. ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியில், ஒரு குறிப்பிட்ட வகை கோதுமை, சராசரியாக ஒரு ஏக்கருக்கு 30 மூட்டை விளைச்சல் காண்கிறது. இந்நிலையில், ஒரு புதிய வகைக் கோதுமை, ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட 9 ஏக்கர் நிலத்துண்டுகளில் (ஒவ்வோர் ஏக்கரும் ஒரு தனி நிலத்துண்டு) பயிரிடப்பட்டு, சராசரி விளைச்சல் 33·4 மூட்டைகள் எனப்படுகிறது. மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் 5·1 எனில், $2 = 0·05$ எனக் கொண்டு, புதிய வகைக் கோதுமையைப் பற்றி எவ்விதத் தீர்மானம் மேற்கொள்ள வேண்டும்?

8. மேற்குறிப்பிட்ட புதிய வகைக் கோதுமைக்கான சோதனையில், சராசரிக்கான 0·95 கெழுவுடன் கூடிய நம்பிக்கை இடை வெளியை அமைக்க.

மாறுபாடு பற்றிய உய்த்துணர்வு ஒரு நிலைத்தரம் வாய்ந்த இயந்திரத்தால் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் விட்டத்தின் (தடிப்பு) மாறுபாடு $\sigma_0{}^2$ என்று கண்டறிவதாக ஊகம்செய்க. இந்நிலையில் ஒரு விற்பனையாளர் விட்டத்தின் மாறுபாட்டைக் குறைவாக்கும் மற்றொரு வித ஆணிகளைத் தயாரிக்கும் வேறோர் இயந்திரத்தை தம் கவனத்திற்குக் கொண்டுவருகிறார். இம்மாறுபாட்டின் மதிப்பு $\sigma^2$ எனக் கொள்க. நாம் இப் புதிய வகை இயந்திரத்தை, அது தயாரிக்கும் ஆணிகளின் விட்டத்தின் மாறுபாடு குறைவானதாக அமைந்தால் தான் ஏற்றுக் கொள்ள முடியும். எனவே,

$H_0{:}\sigma = \sigma_0{}^2$, $H_1{:}\sigma^2 < \sigma_1{}^2$ என்பவை முறையே எடுகோளாகவும் அமைகிறது. மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$-ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டால் தான், புதிய வகை இயந்திரம் ஏற்றுக் கொள்ளப்படும். ஆனால், புதிய வகை இயந்திரமானது, பழைய வகையை விட அதிகப் பகுதிகளைத் தயாரிக்கும் என்கின்ற நிலையில், மாறுபாட்டின் மதிப்பு $\sigma^2$ பெரியதாக இருந்தாலன்றி, நாம் புதியவகை இயந்திரத்தையே பெருகிறோம். இவ்விடத்து.

$$H_0 : \sigma = \sigma_0{}^2.$$
$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0{}^2.$$

$H_1$-உண்மையாக இருந்தாலெழிய, புதிய வகை இயந்திரத்தையே பயன் படுத்துகிறோம்.

சில வகைப் பிரச்சினைகளில் இவ்விதமான மாற்றுகளைச் சந்திக்க வேண்டியுள்ளது. உதாரணமாக, ஒரு மொழியைப் பயிலுவிக்கக் கையாளப்படும் முறையின் மாறுபாடு $\sigma_0{}^2$ என அமைகிறது என்று கொள்க. இந்நிலையில் ஒரு புதிய முறை கையாளப் படுகிறது; இப்புதிய முறையின் பலனாய் எழும் மாறுபாடு பழைய முறையின் வேறுபாட்டைப் போன்று அதே மதிப்பைக் கொண்டுள்ளதா என்று அறிய விரும்புகிறோம். இச் சூழ்நிலையில்,

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0$, $H_1 : \sigma_0{}^2$ என்பது எடுகோள்களாக அமையும்.

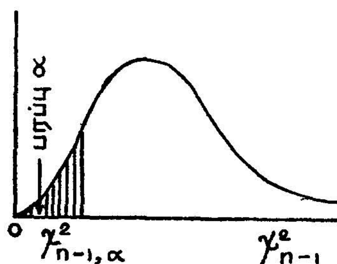
இதேபோன்று, $H_0 : \sigma^2 > \sigma^{02}$, $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0{}^2$,

$H_0 : \sigma^2 < \sigma_0{}^2$, $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0{}^2$

என்பன போன்ற எடுகோள்களும் சோதனைசெய்யப்படலாம். ஆனால், இத்தகைய சோதனைகளிலெல்லாம், மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$-வை நிர்ணயிப்பதில் பல இடையூறுகள் ஏற்படுகின்றன. இவ்விடத்து, $H_0$-ன் கீழ்ச் சோதனையின் திறத்திறன் மிகப் பெரிய மதிப்பு $\alpha$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

அளவை, $\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^{\,2}}$ என்பதே, எடுகோளின் சோதனைக்கான அளவையாகும். முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு $\sigma_0^{\,2}$ எனில், $\chi^2_{n-1}$-ன் மாதிரிப் பரவல், $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு வர்க்கப் பரவலாக அமைகிறது. ஆனால், பின்வரும் நிபந்தனைகளும் பின் தொடர்கின்றன: (1) $x_1\, x_2 \ldots x_n$ என்னும் மாதிரி மதிப்புகள் ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன; (2) முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாகும். முழுமைத் தன்மையின் இயல்நிலைத் தன்மை, மிகவும் இன்றியமையாததாகும்.

$H_0 : \sigma = \sigma_0^{\,2}$, $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^{\,2}$-க்கு எதிராகச் சோதனை விடும்போது, $s^2$-ன் மிகச் சிறிய மதிப்புகளே, $H_1$-க்குச் சாதகமாக அமைகின்றன. எனவே, மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனில், தீர்வு கட்டமான பகுதி, $\frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^{\,2}} < \chi^2_{n-1,\,\alpha}$ என்றமைகிறது. இது பின்வரும் படத்தின்மூலம் விவரிக்கப்படுகிறது.

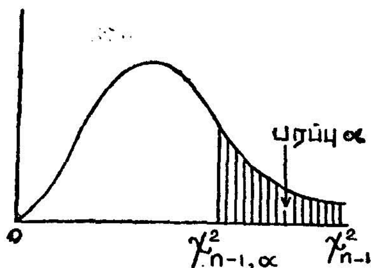



படம் 14.

$H_0 : \sigma = \sigma_0^{\,2}$ஐ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^{\,2}$-க்கு எதிராகச் சோதிக்கையில், பயன்படுத்தப்படும் மிகைத் தன்மை மட்டமும், தீர்வு கட்டமான பகுதியும்.

இதேபோன்று, $H : \sigma^2 = \sigma_0^{\,2}$, $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^{\,2}$ என்ற சோதனையில், $s^2$-பெரிய மதிப்புகளே, $H_1$-க்கும் சாதகமாக

அமைகின்றன. மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனக் கொண்டு, $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha}$ என்று அமைகையில், $H_0$ நிராகரிக்கப் படுகிறது. இதற்கான தீர்வு கட்டமான பகுதியை பின்வரும் படம் விளக்குகிறது.

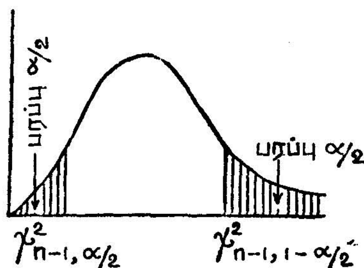



படம் 15.

"$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ஐ $H_1 : \sigma > \sigma_0^2$ -க்கு எதிராகச் சோதிக்கையில் தீர்வு கட்டமான பகுதியும், மிகைத் தன்மை மட்டமும்". இதே போன்று, $s^2$-ன் சிறிய மற்றும் பெரிய மதிப்புகள் $H_1$-க்குச் சாதகமாக அமைவதால்,

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \text{ அல்லது, } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$$

என்றிருக்கும்போது, $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. இதற்கான தீர்வு கட்டமான பகுதி பின்வரும் படத்தில் விளக்கப்படுகிறது.




படம் 16.

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$யை $H_1 : \sigma_0^2 \neq \sigma_1^2$-க்கு எதிராகச் சோதனைக்கான படம்.

உதாரணம் ; ஓர் இயந்திரம் அரை அங்குல ஆணிகளை, விட்டத்தின் மாறுபாடு 0·00042 எனத் தயாரிக்கின்றது. ஒரு புதிய வகை இயந்திரம் தயாரிக்கும் ஆணிகளிலிருந்து 25 ஆணிகள் கொண்ட ஒரு மாதிரி பெறப்பட்டபோது, அதன் மாறுபாடு 0·00028 எனக் கண்டறியப்படுகிறது. இந்த அரை அங்குல ஆணிகளைத் தயாரிக்கும் இரண்டாவது வகை இயந்திரத்தை, அதனை மாறுபாடு குறைவென $\alpha = 0\cdot05$ கிடைத்தன்மை மட்டத்தில் நிருபிக்கப்பட்டால். நாம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தயார். கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியிலிருந்து, நமது தீர்மானம் எதுவாக அமைய வேண்டும் என்று கண்டறிக.

தீர்வு :

புதிய வகை இயந்திரத்தினின்றும் பெறப்பட்ட ஆணிகளுக்கு, $H_0 : \sigma^2 = 0\cdot00042$ $H_1 : \sigma^2 < 0\cdot00042$ என்பது எடுகோள்களாகும். (1) $H_0$ நிராகரிக்கப்பட்டால், புதிய வகை இயந்திரமானது, குறைந்த வேறுபாடு கொண்ட விட்டமுடைய ஆணிகளைத் தயாரிக்கின்றது என்று முடிவு செய்து. புதிய வகை இயந்திரத்தை விலைக்கு வாங்குவது எனத் தீர்மானிக்கிறோம்.

(2) $\alpha = 0\cdot05$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(3) அளவை, $\chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0}$ மாறுபாடு 0·00042

எனில், (a) மாதிரி மதிப்புகள் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் போதும் (b) ஆணிகளின் முழுமைத் தொகுதியின் விட்ட மதிப்புகள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும் போதும் $\chi^2_{n-1}$ ஒரு கைவர்க்கப் பரவலாக அமைகிறது.

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி, $\chi^2_{24} < 13\cdot85$ $\alpha = 0\cdot05$, $n = 25$ உதவிப் படம்—1 பொருந்துகிறது.

(5) $\chi^2_{24}$-ன் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு $\dfrac{24(0\cdot00028)}{0\cdot00042}$

$= 16.$

(6) இம் மதிப்பு $16 > 13\cdot85$, $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, பழைய வகை இயந்திரமே தொடர்ந்து பயன்படுத்தப்படுகிறது.

உதாரணம் : ஒரு பாடத்தைப் பயில்விக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட முறையின் பயனாக மாணவர்கள் இறுதித் தேர்வில் பெறும் மதிப்

பெண்களின் திட்ட விலக்கம் 10 என அமைகின்றது. இந்நிலையில் 31 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பிற்கு, புதியதொரு முறையில் அதே பாடம் கற்பிக்கப்படுகிறது. இறுதித் தேர்வில் அம் மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம் 12 என அமைந்தால், புதிய வகை முறையின் திட்ட விலக்கம் 10 அன்று என்று தீர்மானிக்க இயலுமா ?

தீர்வு : (1) புதிய முறையைப் பயன்படுத்தினுல் மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்களின் முழுமைத் தொகுதியின் சோதனைக்கு, $H_0 : \sigma^2 = 100$, $H_1 : \sigma^2 \neq 100$ என அமைக்கிறோம்.

2. $\alpha = 0{\cdot}05$ எனக் கொள்க.

3. அளவை $\chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0}$ இவ்விடத்துத் தேவையான முன் நிபந்தனைகள் (i) 31 மாணவர்களைக் கொண்ட மாதிரி ராண்டமாக தெரிந்தெடுக்கப்பட்டது. (ii) மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகின்றன. இம்மாதிரியான மதிப்பெண்களுக்கு இயல்நிலைத் தன்மையைப் பற்றிய ஊகம் பொருத்தமானதே.

4. தீர்வு கட்டமான பகுதிக்கான $\chi^2 = 43{\cdot}7$; $n-1=30$, $\alpha = 0{\cdot}05$ என்ற மதிப்புகளுடன் படம்-8 இவ்விடத்து பயன் பெறுகிறது.

5. கணக்கிடும் அளவையின் மதிப்பு

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{30(12)^2}{100} = 43{\cdot}2.$$

6. நாம் எடுகோள் $H_0$-ஐயை ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

எனவே, புதியமுறை பழைய முறையைக் காட்டிலும் மாறுபாட்டு மதிப்பினை, மதிப்பெண்களைக் கொண்டு நோக்குமிடத்து, தோற்றுவிப்பதில்லை.

$\sigma^2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி $\sigma^2$, $\sigma$ இவற்றிற்கான நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுவதற்கு (நம்பிக்கைக்கெழு $1-\alpha$ என்று கொள்க). கீழ்க்கண்ட முறையைக் கையாள்கிறோம்.

$$\text{Prob}\left( \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha.$$

சமயின்மையைப் பொறுத்த அளவில் சிறிய கணக்கீடுகளை மேற்கொள்ள,

$$\text{Prob}\left(\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha.$$

சமமின்மைக்கு வர்க்க மூலத்தைக் கணக்கிட்டால்,

$$\text{Prob}\left(\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\,n-\frac{\alpha}{2}}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}}}\right) = 1-\alpha.$$

மேற் குறிப்பிப்பட்டுள்ள இரு நிகழ் தகவு வாக்கியங்களும், நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறக் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கப் படுகிறது.

இடைவெளி,

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}}} \cdot \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}}}\right)$$

$\sigma_0$-மதிப்பை, $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ என்ற சோதனையில் எடுகோள் $H_0$ உண்மையாயிருக்கும் போதே, தன்னுள்ளடக்கியுள்ளது. எனவே, $H_0$-ஐச் சோதிப்பதற்கு, அளவை $\chi^2_{n-1}$-ஐக் கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக, இடைவெளியைக் கணக்கிடுவதும் பயனளிக்கக்கூடியதே.

உதாரணம் : நம்பிக்கை இடைவெளியினை, $1-\alpha = 0.95$ எனக் கொண்டு $s=12$, $n=81$ என்ற விவரத்தைக் கொண்டு $\sigma^2$, $\sigma$ இவற்றிற்கு அமைக்கவும்.

தீர்வு : $s=12, n=81, \alpha = 0{\cdot}05, \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}025$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பயோமெட்ரிகா அட்டவணைப் புத்தகத்தில் கைவர்க்கப் பரவலின் பரப்பு அட்டவணை 8-லிருந்து (பக்கம் 130—131-ல் காணப்படும்) $\chi^2_{80,\,0{\cdot}025} = 57{\cdot}15$, $\chi^2_{80,\,0{\cdot}975} = 106{\cdot}6$ எனவே, $\sigma^2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி,

$$\left[\frac{80\,(144)}{106{\cdot}6}, \frac{80\,(144)}{57{\cdot}15}\right] - [108{\cdot}1,\ 201{\cdot}6]$$

இம் மதிப்பிற்கு வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடித்தால் $(\sqrt{108 \cdot 1}, \sqrt{201 \cdot 6}) = (10 \cdot 4,\ 14 \cdot 2)$ என்பது $\sigma$-க்கான, நம்பிக்கைக்கெழு 0·95 என்றமைந்த நம்பிக்கை இடைவெளி யாகும்.

உதாரணம்: ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்படும் ராண்டம் மாதிரி அளவு 81 எனக் கொண்ட மாதிரி $\sigma$-க்கான, நம்பிக்கைக்கெழு 0·35 எனக் கொண்ட நம்பிக்கை இடை வெளியை அமைக்கையில், இடைவெளியின் நீளம் 0·35 $\sigma$-க்குக் குறைவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் (Prob.) கணக்கிடுக.

தீர்வு: $n = 81,\ \alpha = 0 \cdot 05$

இடைவெளியின் நீளம்: I:

$$\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\ \frac{\alpha}{2}}}} - \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2 n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Prob $(I < < 0 \cdot 35\,\sigma)$

$$\text{Prob}\left[\frac{s^2}{\sigma^2} < \frac{(0\ 35\,\sigma)^2/\sigma^2}{\left[\sqrt{\frac{1}{0 \cdot 714}} - \sqrt{\frac{1}{18.3}}\right]}\right] \text{ஆகும்.}$$

$$= \text{Prob}\left(\frac{s^2}{\sigma^2} < 1 \cdot ೭8\right)$$

$\left[ \frac{\chi^2_{800\ 0025}}{80} = 0 \cdot 714, \frac{\chi^2_{80,\ 0\ 975}}{80} = 1.38 \right.$ என்பது அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படுகிறது.]

இந் நிகழ்தகவு. அட்டவணையிலிருந்து 0.92 எனப்பெறப்படு கிறது.

## பயிற்சிகள்

1. வண்ணக் கலவைகளைப் பெட்டிகளில் அடைத்து விற்கும் ஒரு குழுமம் (company) பெட்டிகளின் முழுமைத் தொகுதியின் எடையின் திட்ட விலக்கம் ½ அவுன்சு அல்லது அதற்குக் குறைவாக அமைகிறது என்று கண்டறிகிறது. 25 பெட்டிகளைக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரி, எடையின் திட்ட விலக்கத்தை 0·60 அவுன்சு எனக் காட்டுகிறது. பெட்டிகளின்

எடை ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது எனக் கொண்டு, கம்பெனி விரும்பும் திட்ட விலக்கத்தை அடைய முடியவில்லை என்று தீர்மானிப்பது சரியானதா? ($\alpha = 0{\cdot}05$ எனக் கொள்க)

2. மேற் குறிப்பிட்ட பிரச்சினைக்கு, $\sigma$-க்கான நம்பிக்கைக் கெழு $1 - \alpha = 0{\cdot}95$ என அமைந்த நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

3. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்படும் 25 உருப்புக்கள் அடங்கிய ஒரு மாதிரியிலிருந்து அமைக்கப்படும், 0·95 கெழு கொண்ட நம்பிக்கை இடைவெளியின் நீளம் $0{\cdot}7\sigma$-க்குள்ளாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு (prob) என்ன?

4. ஒரு பல்கலைக் கழக மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம் 0 5 அலகுகள் என்று, நீண்ட காலமாக மாணவர்களின் தேர்ச்சி அறிக்கைகளைக் கொண்டு பெறப்படுகின்றது. இந்நிலையில் சென்ற ஆண்டு முடிவுத் தேர்வுகளைக் கொண்டு. 20 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிட்டதில் 0·85 என அமைகிறது. இதனால் சென்ற ஆண்டு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தினின்றும் மாறுபட்டு விட்டது என்று கருதலாமா?

5. சீட்டாட்டத்தில் அதிகப் புள்ளிகளைப் பெறுபவர் வென்றவராகக் கருதப்படும். ஓர் ஆட்டத்தில் அதிகத் திறமையில்லாத ஒருவர் 52% வெற்றி பெறுகிறுர் என்று கருதப்படுகிறது. அவர் கையாள்வது ஒரு பழையவகை முறையாகும். இந்நிலையில் ஒரு புதிய வகை முறையைப் பற்றி அவர் அறிய நேரிடுகிறது. இம் முறையின் மூலம் பெறப்படும் புள்ளிகளின் திட்ட விலக்கம், பழையமுறைப் புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கத்தைக் காட்டிலும் அதிகமாக அமைந்தால் தான் அவர் புதிய முறையை ஏற்க இயலும். ஏனெனில், அப்போதுதான் அவர் அதிகப் புள்ளிகளை எப்போதாகிலும் பெறுவதற்கான வாய்ப்பு அதிகரிக்கிறது. பழைய முறையில் பெற்ற புள்ளிகளின் திட்ட விலக்கம் 5%; புதிய முறையில் பெற்ற புள்ளிகளின் திட்ட விலக்கம் 8%. $\alpha = 0{\cdot}01$ எனில், அவர் புதிய முறையை மேற்கொள்ள வேண்டுமா? மேலும், திட்டவிலக்கத்துக்கான, $\alpha = 0{\cdot}1$ எனக் கொண்ட நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

**இரண்டு மாறுபாடுகளைப் பற்றிய உய்த்துணர்வுகள் (Inferences about two variances) :**

இரண்டு மாறுபாடுகளைப் பற்றிய சோதனையின் எடுகோளில், இரண்டு மாறுபாடும் தெரியாமலிருக்கும் சூழ்நிலைகளில், இத்தகைய உய்த்துணர்வுகள் பயன் பெறுகின்றன. உய்த்துணர்வு முறைகள், பயன் படுத்தும் அளவை ஆகியவை விளக்கப்படுகின்றன. ஒரு தெரிந்த மாறுபாடு கொண்ட பழைய வகை இயந்திரத்தை ஒரு புதிய வகை இயந்திரத்துடன் ஒப்பிடும் சோதனையை முன் பிரிவில் கண்டோம். ஆனால், இரண்டு புதிய வகை இயந்திரங்களை அவற்றின் மாறுபாட்டின் அடிப்படையில் தேர்ந்தெடுக்கும்போது, இத்தகைய பிரச்சினைகள் எழுகின்றன.

இரண்டு வகை இயந்திரங்கள் $\frac{1}{2}$ அங்குல விட்டம் கொண்ட ஆணிகளைத் தயாரிக்கின்றன என்று கொள்க. இயந்திரம்—1, இரண்டாவது இயந்திரத்தை விட அதிக விலையை உடையது என்றும் கொள்க. இயந்திரம்-1 தயாரிக்கும் ஆணிகளின் விட்டத்தின் மாறுபாடு, இரண்டாவது வகை இயந்திரத்தின் ஆணிகளின் மாறுபாட்டைக் காட்டிலும் குறைவு என்பது திட்டவட்டமாக நிரூபிக்கப் பட்டாலன்றி, நாம் முதல் வகை இயந்திரத்தை வாங்க முடியாது. ஏனெனில், இரண்டு வகை இயந்திரங்களும் விட்ட மாறுபாட்டைப் பொறுத்த அளவில் எவ்வித வேறுபாடும் இல்லாமல் விளங்கிடின், குறைந்த விலையைக் கொண்ட இயந்திரத்தையே பெற விரும்புவது இயற்கை. எனவே, இயந்திரம்-1 ஆணிகளின் விட்டத்தைப் பொறுத்த அளவில் குறைந்த மாறுபாடு மதிப்பைக் கொண்டுள்ளதா என்பது சோதனையாகும். $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ என்பன இயந்திரம்-1, இயந்திரம்-2 இவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்படும் மாறுபாடுகளின் மதிப்பு என்க. இவற்றின் மதிப்பு நமக்குத் தெரியாது. இப்போது எடுகோள் $H_0$-ம் மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$-ம் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 ; \quad H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 .$$

எடுகோள் $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டால், நாம் குறைந்த விலையைக் கொண்ட இயந்திரம்—2ஐயே பெறுவோம்.

ஆனால், இரண்டு இயந்திரங்களும் ஒரே விலையைக் கொண்டவை என்றிருக்கும் சூழ்நிலையைக் கருத்தில் கொள்க. மேலும் இயந்திரம் —1, இயந்திரம் —2ஐக் காட்டிலும் அதிகமான பாகங்களை உற்பத்தி செய்யும் ஆற்றல் கொண்டது என்றும் ஊகம் செய்து

கொள்க. இப்போது இயந்திரம் —1ன் மாறுபாடு, இயந்திரம் இரண்டின் மாறுபாட்டைக் காட்டிலும் அதிகமானதன்று என்று நிரூபிக்கப்பட்டால், இயந்திரம்-1 பெறப்படும். இத்தகைய சூழ்நிலையில் எடுகோள் $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ என அமைகிறது. எடுகோள் $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டால், முதல் வகை இயந்திரமே பெறப்படும். மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ என்பது, $H_1 : \sigma_2^2 < \sigma_1^2$ என்றும் எழுதப்படலாம். மேற்குறிப்பிட்ட இரண்டு வகை இயந்திரங்களும் பண்பில் மாறினலும், அதாவது இரண்டாவது இயந்திரம் அதிக பாகங்களை உற்பத்தி செய்யும் திறன் மிக்கது என்று கொண்டாலும், அதே எடுகோளை, அதே மாறெதிரான எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதனை செய்யலாம்.

சில பிரச்சினைகளில் இரு புறத்து மாற்றுகள் [Two-sided Alternatives] ஏதுவாகின்றன. இரண்டு இயந்திரங்களின் அல்லது இரண்டு அலகு சராசரிகள் சமமானவை என்ற சோதனையில் (equality of two means), தெரியாத மாறுபாடுகள் சமம் என்று கொண்டு நாம் சோதனையை உருவாக்குகிறோம் இது பின்வரும் அத்தியாயத்தில் விளக்கப்பட உள்ளது. இந்த உலகமானது

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ; $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ என்ற எடுகோள்களைக் கொண்டு சோதனை செய்யப்படலாம். இதற்கான தீர்வு கட்டமான பகுதி எங்ஙனம் அமையும் என்பவை விளக்கப்பட உள்ளன.

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ என்ற எடுகோள் ஜோடி,

$H_0 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ என்றும் மாற்றப்படலாம்.

இதேபோன்று,

$H_0 \cdot \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ என்ற எடுகோள் ஜோடி,

$H_0 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$. $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ என்றும் மாறலாம்.

இதனுல் சோதனையில் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படுவதில்லை. $\alpha$ என்பது பிற சோதனைகளைப் போன்றே, $H_0$-ன் கீழ் மிக அதிகமான திறத்தின் மதிப்பு என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x_{11}, x_{12} \dots x_{1n}$ என்பன $\sigma_1^2$ மாறுபாட்டைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரி மதிப்புகள் எனவும், $x_{21}, x_{22} \dots x_{2n}$ என்பன $\sigma_2^2$ மாறுபாட்டைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரி மதிப்புகள் எனவும் கொள்க.

மாதிரி மாறுபாடுகள்,

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_{1i}-\bar{x}_1)^2}{(n_1 - 1)}, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}$$

என்றமைகின்றன. $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரியாகும்.

பிறகு,

$$F_{n_1-1,\, n_2-1} = \frac{(S_1^2/\sigma_1^2)}{(S_2^2/\sigma_2^2)} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) = \frac{S_1^2}{S_2^2}\left(\frac{1}{R_0^2}\right)$$

என்ற அளவை, மாறுபாடுகளின் விகிதம் பற்றிய எடுகோள்களை சோதனை செய்ய உதவுகிறது. வேறு பல விகிதங்களும் பயன்படுத்தப்படலாம் எனினும், நாம் முன்பு விளக்கிய எடுகோள் $H_0$-பலவும் ($H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ஆதலின்) இந்த விகிதத்தை ஒன்றுக்குகின்றன. எனவே, இச் சூழ்நிலையில்,

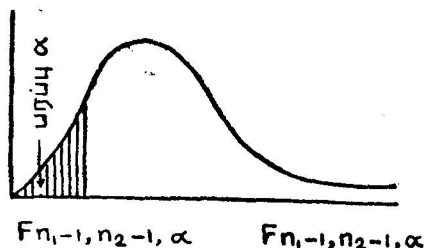
$F_{n_1-1,\, n_2-1} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ என்றுகிறது. மேலும் $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

எனில் F-ன் மாதிரி பரவல், அதாவது, $S_1^2/S_2^2$-ன் மாதிரி பரவல் $(n_1-1),(n_2-1)$ பாகைகளைக்கொண்ட F-பரவலாக; கீழ்க்கண்ட முன் நிபந்தனைக்குட்பட்டு அமைகிறது. அவையாவன :

(1) இரண்டு மாதிரிகளும் ராண்டம் முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்டன. (2) இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் இயல் நிலைத்தன்மை உடையன. இதில் இரண்டாவது நிபந்தனையாகிய இயல் நிலைத்தன்மை மிகுந்த முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். ஏனெனில், இயல் நிலைத் தன்மை மறையின், அது பலசீரிய தவறுகளுக்கு இடமளிக்கும்.

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ என்ற சோதனையில், $S_1^2$-ன் மதிப்பு, $S_2^2$-ன் மதிப்பையொட்டிச் சிறியதாக அமைந்தால்தான், $H_1$-க்குச் சாதகமாக அமையும். எனவே, $F_{n_1-1,\, n_2-1}$ என்ற அளவை சிறியதாக இருப்பின், $H_0$-நிராகரிக்கப்படுகிறது. இடைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனில், தீர்வு கட்டமான பகுதி,

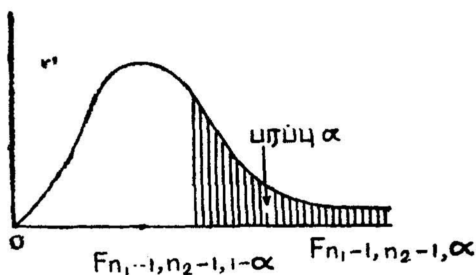
$$S_1^2/S_2^2 < F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \alpha}$$ என்றமையும். இது கீழ்க்கண்டவாறு படத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.




படம் 1 : $H_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2<\sigma_2^2$ என்ற சோதனையின் மிகைத் தன்மை மட்டமும் தீர்வு கட்டமான பகுதியும்.

இதேபோன்று, $H_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2>\sigma_2^2$ என்ற சோதயில் $S_1^2$-ன் மதிப்பு; $S_2^2$-ன் மதிப்பை ஒப்பிட்டு நோக்குகையில் பெரிதாக அமைவதே $H_1$-க்கு சாதகமாகும்.

எனவே, $S_1^2/S_2^2 > F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \alpha}$ என்றமைந்தால், மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$-வில், $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகின்றது. இது கீழ்க்கண்டவாறு படத்தில் விளக்கப்படுகிறது.

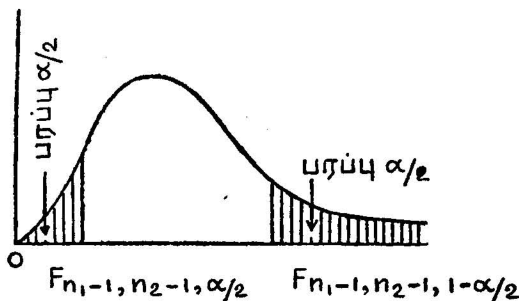



படம் : 2 $H_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ என்ற சோதனையில் கிடைத்தன்மை மட்டமும், தீர்வு கட்டமான பகுதியும்.

முடிவாக, $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ என்ற சோதனையில் $S_1^2$-ன் சிறிய, பெரிய மதிப்புகள் இரண்டுமே, $S_2^2$-ன் ஒப்பிட்ட மதிப்புடன் நோக்குகையில், $H_1$-க்குச் சாதகமாக அமைவதால், $S_1^2/S_2$-ன் மதிப்பு மிகப்பெரியதாகவோ மிகச் சிறியதாகவோ அமையும் நேரத்து, $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே,

$$S_1^2/S_2^2 < F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}}, \quad S_1^2/S_2^2 > F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}}$$

என்றமையும் போது, $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. இதற்கான படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.




படம் : 8 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_1^2$ என்ற சோதனையில், இடைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$-ம் தீர்வு கட்டமானபகுதியும்.

**உதாரணம் :** இரண்டு வகை இயந்திரங்களைப் பற்றிய பிரச்சினையில், இரண்டு இயந்திரங்களிலிருந்தும், 25 ஆணிகள் தனித்தனியாக ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன. ஆணிகளின் விட்டத்திற்கான மாறுபாடு, முதல் வகை இயந்திரத்தைப் பொறுத்த மட்டில் $s_1^2 = 0.00028$ எனவும், இரண்டாம் வகை இயந்திரத்தைப் பொறுத்தமட்டில் $s_2^2 = 0.00045$ எனவும் அமைகின்றது. $\alpha = 0.05$ என்னும் மிகைத்தன்மை மட்டத்தில், முதல் வகை இயந்திரம் இரண்டாவது வகையை விட அதிக விலை உடையது எனில், என்ன முடிவு எடுக்கப்படவேண்டும் ?

**தீர்வு :** (1) எடுகோள் $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$. $H_0$-நிராகரிக்கப்பட்டால், முதல் வகை இயந்திரம் வாங்கப்பட வேண்டும்.

$H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டால், இரண்டாவது வகை இயந்திரமே பெறப்படும்.

(2) $\alpha = 0.05$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(3) $F_{n_1-1,\, n_2-1} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ என்பது உண்மையாயின், $F_{n_1-1,\, n_2-1}$ கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு ஒரு $F$-பரவலாக அமைகிறது. (அ) இரு மாதிரிகளும் ராண்டமாகப் பெறப்படுகின்றன. (ஆ) இரண்டு மாதிரிகளும் இயல்நிலைத் தன்மை கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்படுகின்றன.

(4) $F_{24, 24} = \frac{0.00028}{0.00045} = 0.62 < 1$ என்று அமைவதால், $\frac{1}{F} = \frac{1}{0.62} = 1.61$ என்ற மதிப்பை, அட்டவணை மதிப்பான $F_{24, 24, 0.95} = 1.98$ உடன் ஒப்பிடுகிறோம்.

(5) கண்டறிந்த $F$-மதிப்பு < அட்டவணை மதிப்பு (1·98) என்பதால், சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்றோம்.

(6) எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவதால், இரண்டாவது வகை இயந்திரமே வாங்கப்படவேண்டும்.

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (அல்லது $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$)-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைத்தல்: நம்பிக்கைக்கெழு $(1-\alpha)$ எனக் கொண்டால்

$$\text{Prob}\left[F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \frac{\alpha}{2}} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) < F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

சமமின்மையைப் பொறுத்தமட்டில் சில கணக்கிடுகளை மேற்கொள்ள

$$\text{Prob.}\left[\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \frac{\alpha}{2}}}\right] = 1 - \alpha$$

இது $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளிக்கு அடிப்படையாகும்.

இடைவெளி, $\left[\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{n_1-\;,\, n_2-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}},\; \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \frac{\alpha}{2}}}\right]$

வர்க்க மூலத்தை கண்டுபிடிக்க,

$$\text{Prob.}\left[\frac{s_1}{s_2}\frac{1}{\sqrt{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}}} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{s_1}{s_2}\frac{1}{\sqrt{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \frac{\alpha}{2}}}}\right] = 1-\alpha$$

இது $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளிக்கு ஆதாரமான தாகும்.

இடைவெளியானது $\left[\frac{s_1}{s_2}\frac{1}{\sqrt{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}}},\ \frac{s_1}{s_2}\frac{1}{\sqrt{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \frac{\alpha}{2}}}}\right]$ ஆகும்.

உதாரணம் : $s_1^2=0.00028$, $s_2^2=0.00045$. $n_1=n_2=25$ $\alpha=0.05$ என்னும் பிரச்சினையில் $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ இவற்றிற்கான நம்பிக்கைக் கெழு 0·95 கொண்ட நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

தீர்வு :

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$-க்கான இடைவெளி

$$\left[\frac{s_1^2}{s_2^2}\ \frac{1}{F_{24,24,0.975}},\ \frac{s_1^2}{s_2^2}\ \frac{1}{F_{24,24,0.025}}\right]$$

$$=\left[\left(\frac{28}{45}\right)\left(\frac{1}{2.27}\right),\left(\frac{28}{45}\right)\left(\frac{1}{0.441}\right)\right]$$

$$=[0.274;\ 1.41]$$

இவ்விடத்து, பயோமெட்ரிகா அட்டவணைப் புத்தகத்தில் அட்டவணை 48-லிருந்து (பக்கம் 160)

$F_{24,\,24,\,0.975}=2.27$, $F_{24,\,24,\,0.025}=0.441$* என்பன பெறப்படுகின்றன.

$$*F_{24,\ 24,\ 00.25} = \frac{1}{F_{24,\ 24,\ 0\ 975}}$$

$$= \frac{1}{2.27} = 0.441$$

இவ்விரண்டு நம்பிக்கை இடைவெளிகளுக்கும் நம்பிக்கைக் கெழு 1—$\alpha$ ஆகும்.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு குழுமம் அது தயாரிக்கும் பொருள்களைப் பைகளில் அடைத்து விற்பனை செய்கிறது. பொருள்களைப் பைகளில் அடைக்க, இரண்டு விதமான முறைகளைக் கையாள்கிறது. இவ்விரண்டு முறைகளும் சராசரியாக ஒரேவித எடையைக் கொண்ட பைகளை அனுப்புகிறது. எனினும், இரண்டாவது முறையானது சிறிது விரைவாக அமைவதால், அக் குழுமம் அம் முறையையே முழுவதும் பயன் படுத்த விழைகிறது. ஆனால், அம் முறையால் அடைக்கப்படும் பைகளின் எடையின் திட்ட விலக்கம், முதல் முறையின் திட்டவிலக்கத்தைக் காட்டிலும் அதிகமானது அன்று என்று திட்டவட்டமாக அறிய விரும்புகிறது. கிடைத்தன்மை மட்டம் $\alpha = 0 \cdot 05$ என்று கொள்க. 41 பைகள் அடங்கிய மாதிரிகள் ஒவ்வொரு முறையிலிருந்தும் அடைக்கப்பட்ட பைகளின் தொகுதியிலிருந்து பெறப்படுகின்றன. மாதிரி திட்ட விலக்கம் $s_1 = 0 \cdot 5$, $s_2 = 0 \cdot 62$ எனில், அக் குழுமத்தின் தீர்மானம் எதுவாக அமைய வேண்டும்?

2. மேற் குறிப்பிட்ட பிரச்சினைக்கு, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ - க்கான, நம்பிக்கை இடைவெளியை, நம்பிக்கைக் கெழு $0 \cdot 95$ எனக் கொண்டு அமைக்க.

3. இரண்டு வகையான டயர்கள் (tyres) சராசரியாக, 25,000 மைல்கள் ஓடக்கூடியன என்று அறியப்படுகிறது. எனினும், அந்த டயர்களின் ஓட்டதூரத்தில் ஏதேனும் மாறுபாடு இருக்க இயலும் என்று ஊகிக்கப் படுகின்றது. ஒவ்வொரு வகையிலிருந்தும் 16 டயர்கள் ராண்டமாக, தனித்தனியாகத் தெரிந்தெடுக்கப் படுகின்றன. ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் அவ்விரண்டு மாதிரிகளும் ஓட விடப்பட்ட நேரத்து, மாதிரி திட்ட விலக்கம் $s_1 = 4,200$ மைல், $s_2 = 2800$ மைல் என்று பெறப்பட்டது. $\alpha = 0 \cdot 05$ எனக் கொண்டு, முடிவினை எழுதுக.

4. மேற் குறிப்பிட்ட பிரச்சினைக்கு, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ -க்கான, நம்பிக்கைக் கெழு 0·35 கொண்ட ஒரு நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

5. $n_1 = 61$, $n_2 = 121$, $s_1 = 10$, $s_2 = 15$ எனக் கொண்டு. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ என்ற எடுகோளைச் சோதனையிடுக. மேலும், நம்பிக்கைக் கெழு 0·90 எனக் கொண்டு, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ -க்கு நம்பிக்கை இடைவெளியை அளிக்கவும்.

**இரு மாதிரிகளைக் கொண்டு சராசரிகளைப் பற்றிய உய்த்துணர்வுகள் (Inferences about two Means with Two Random Samples).**

இரண்டு சராசரிகளைப் பற்றிய எடுகோள்களைச் சோதிக்க வேண்டிய தருணங்கள் அவ்வப்போது எழுகின்றன. இத்தருணங்களில் நாம் மேற்கொள்ளும் சோதனையைப் பற்றிய விவரங்களை ஈண்டு இயம்பப்படுகின்றன. உதாரணமாக, ஒரு மாநகராட்சியால் இருவித ஒளிர் விளக்குகள் கருத்தில் கொள்ளப் படுகின்றன என்று ஊகம் செய்க. இதில் வகை 1, வகை 2ஐக் காட்டிலும் சிறிது மலிவானது (விலை குறைவானது) என்றும் கொள்க. இத்தகைய சூழ்நிலையில் முதல்வகை ஒளிர் விளக்குகளின் ஒளிர் நேரம், இரண்டாது வகை விளக்குகளைவிடக் குறைவானது என்பது கண்டறியப்பட்டாலன்றி, அம் மாநகராட்சி, முதல் வகை விளக்குகளையே விரும்பும். ஏனெனின், அதன் விலை குறைவானது; மேலும் இரண்டாவது வகையைவிடக் குறைவான ஒளிர் நேரத்தையும் கொண்டது அன்று. $\mu_1$, $\mu_2$ இவற்றை முறையே முதல் வகை, இரண்டாம் வகை விளக்குகளின் சராசரி ஒளிர் நேரம் எனக் கொண்டால், நமது சோதனை,

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என்பதால் அமையும். இவ்விடத்து $H_0$ எடுகோளாகவும், $H_1$ அதற்கு மாறெதிரான எடுகோளாகவும் அமைகிறது. இவ்விடத்து, $H_1$ ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டாலன்றி, முதல்வகை விளக்குகளே இலாபகரமானவை.

ஆனால், இரண்டுவித விளக்குகளும் ஒரே விலையைக் கொண்டவை என்றும், இரண்டாம் வகை விளக்குகள், முதல் வகையைக்காட்டிலும் கவர்ச்சிகரமாகவும் அமைகின்றன என்றும் கொண்டால், இரண்டாம் வகை விளக்குகள், முதல் வகையைக்

காட்டிலும் குறைந்த ஒளிர்வு நேரத்தைக் கொண்டது என்று நிரூபிக்கப்பட்டாலன்றி, இரண்டாம் வகை விளக்குகளே பெறப் படும். இத்தகைய சூழ்நிலையில், எடுகோள், மாறெதிரான எடுகோள் போன்றவை கீழ்கண்டவாறு அமைகிறது,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2,$$

இவ்விடத்து $H_0$-நிராகரிக்கப்பட்டுவிட்டால், முதல் வகை விளக்குகளைப் பெறுகிறோம். எனினும், சிலவகைப் பிரச்சினைகள், இரு மாதிரியான மாறெதிர் தன்மையைக் கொண்டு விளங்கு கின்றன. உதாரணமாக, இருவகை நெல் விதைகளைச் சோதிக் கையில், அவற்றின் விளைச்சலை அடிப்படையாகக் கொண்டு), சராசரி விளைச்சல் $\mu_1, \mu_2$ என்று அமையும்போது,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

என்று அமைவது சாலப் பொருத்தமாகும். இதேபோன்று, $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என்ற எடுகோள் ஜோடி, $H_0 : \mu_1 > \mu_2 \; H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என்றும், $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \; H_1 : \mu_1 > \mu_2$ என்பன, $H_0 : \mu_1 < \mu_2,\; H_1 : \mu_1 > \mu_2$ எனவும் மாறினாலும் சோதனையில் எவ்வித மாற்றமும் கிடையாது. கிடைத்தன்மை மட்டும் $\alpha$, இச் சோதனையின் திறன்தின் மிகப் பெரிய மதிப்பு ($H_0$-உண்மையாயின்) என்று வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$x_{11}, x_{21}, \ldots x_{n_1 1}$, என்பன சராசரி $\mu_1$ மாறுபாடு $\sigma_1^2$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியினின்றும், $x_{12}, x_{22}, \ldots x_{n_2 2}$ என்பன சராசரி $\mu_2$, மாறுபாடு $\sigma_2^2$ எனவும் அமைந்த முழுமைத் தொகுதியினின்றும் அமைந்த தனித்த மாதிரிகள் என்று கொள்க. அளவையானது,

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ என்றாகிறது.}$$

இவ்விடத்து $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ மாதிரிச்சராசரியாகும். இந்த அளவையே $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \;\; H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என்ற எடுகோள் சோதனையின் அளவையாகும். $(\mu_1 - \mu_2)$ என்பதை '0' என அளவையில் மாற்றியமைக்க,

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ என்றாகிறது.}$$

இந்த அளவை $Z$ ஆனது $\mu_1 = \mu_2$ எனில் (1) இரு மாதிரி களும் தனித்தனியாக ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டாலும், (2) இவற்றின் முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைத் தன்மையைப் பெற்றிருந்தாலும் தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவல் (Standard Normal Distribution) என அமைகிறது. எனினும், நடு எல்லைத் தேற்றத்தின் வாயிலாக, $n_1, n_2$ இவற்றின் மதிப்பு ஓரளவு பெரிதாக அமையும்போது, நிலைஇயல் தன்மை பற்றிய நிபந்தனை அவ்வளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது அன்று. எனினும், மாறுபாடு $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ இவற்றின் மதிப்பு பெரும்பாலும் நமது அறிவுக்குட்படாத காரணத்தினால், இந்த $Z$-அளவையின் பயன் குறைவானதாகவே அமைகிறது. எனினும், மேற் குறிப்பிட்ட இரண்டு நிபந்தனைகளுடன் மூன்றாவதாக, இரண்டு முழு மைத் தொகுதிகளும் சம மாறுபாடு மதிப்புக் கொண்டவை என்ற நிபந்தனையையும் ஏற்றுக்கொண்டால்,

$$\text{அளவை } t_{n_1+n_2-2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{sp. \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

எடுகோள்களைச் சோதிக்க உதவுகிறது. $\mu_1 = \mu_2$ எனில், $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ஆதலின், அளவையின் மதிப்பு கணக்கிடப்பட ஏது வாகிறது. இவ்விடத்தில்,

$$Sp^2 = \frac{(n_1-1)\, s_1^2 + (n_2-1)\, s_2^2}{(n_1+n_2-2)}$$ எனக் கணக்கிடப்படு கிறது.

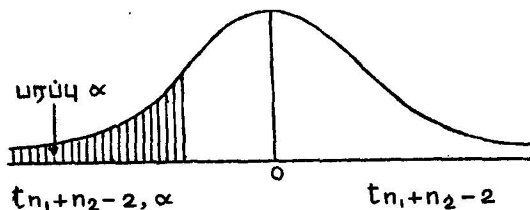
$s_1^2, s_2^2$ என்பன மாதிரி மாறுபாடாகும்.

எனவே, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என்ற சோதனையில், $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-ன் மதிப்புகள் சிறிய மதிப்புகளே; எனவே, $t_{n_1+n_2-2}$-ன் சிறிய மதிப்புகளே, $H_0$-நிராகரிக்கப்படுவதற்கு ஏதுவாக அமைதலின், மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனக் கொண் டால், தீர்வுகட்டமான பகுதி,

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{Sp. \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{n_1+n_2-2,\ \alpha}$$

என்றமைகிறது.

இதற்கான படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



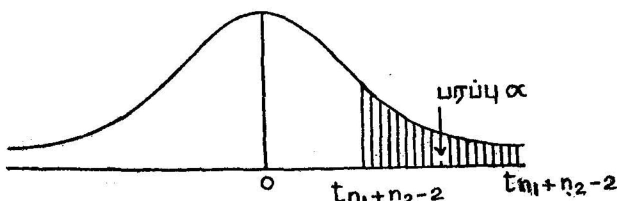

படம் 20.

$H_0 . \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என்ற சோதனைக்கான மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$-ம் தீர்வு கட்டமான பகுதியும்.

இதேபோன்று, $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$ என்ற சோதனையில் $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$-ன் பெரிய மதிப்புக்களே $H_0$-ஐ நிராகரிப்பதற்கு ஏதுவாக விளங்குகின்றபடியால் மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனக் கொண்டால், தீர்வு கட்டமான பகுதி,

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{Sp. \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2,\, \alpha}$$

என்றமைகிறது. கீழ்க்கண்ட படம் இதனை நன்கு விளக்கும்.




படம் 21.

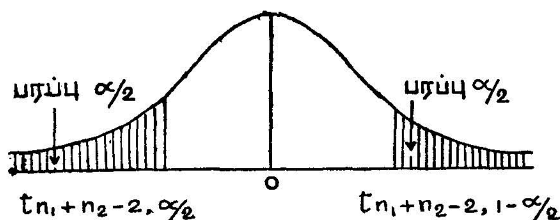
$H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2$ என்ற சோதனையில, மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$-ம் தீர்வுகட்டமான பகுதியும்.

முடிவாக, $H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ என்ற சோதனையில், $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$-ன் மிகப் பெரிய அல்லது மிகச் சிறிய மதிப்புகள் $H_0$-நிராகரிக்கப்படுவதற்கு ஏதுவாய் அமைகின்றபடியால், தீர்வுகட்டமான பகுதி,

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{Sp. \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{n_1+n_2-1,\ \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{Sp. \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{n_1+n_2-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}}$$

என்றமைந்து, கீழ்க்கண்ட படத்தால் விளக்கம் பெறுகிறது.




படம் 22.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2,\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_3$ என்ற சோதனையில், மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$-ம் தீர்வுகட்டமான பகுதியும்.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு தெரியாத நிலையிலும், அவை சமமின்மையாக அமையும்போதும், இரண்டு சராசரி பற்றிய எடுகோடுகளைச் சோதிக்க, தோராயமாக அமைந்த தீர்வுகளே உள. இத்தகைய சூழ்நிலையில், பயன்பெறும் அளவை,

$$t'_v = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_{23}}{n_2}}}.$$ $t'_v$ என்னும் அளவை

தோராயமாக ஒரு $t$ பரவலாக அமைகிறது. இதன் வரையற்ற பாகை,

$$v = \frac{\left(\frac{s_{12}}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_{12}}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} - 2$$

ஆனால்,

முழுமைத் தொகுதிகள், இயல்நிலைப் பரவலாக அமைய வேண்டுவது இன்றியமையாததாகும். $v$-ன் மதிப்பு முழு எண்ணாக அமையாவிடினும் பின்னப்பகுதியை நீக்கி, அதனை

முழு எண்ணாக மாற்றிக்கொள்ள இயலும். இத்தகைய சோதனைகளில், இயல்நிலைத் தன்மை சிறிது பிறழ்ந்தாலும் மாதிரி அளவு (Sample size) ஓரளவு பெரிதாக இருக்குமேயானால், சோதனையில் எவ்விதத் தடங்கலும் ஏற்படுவதில்லை. எனவே, மாதிரி அளவுகள் பெரிதும் மாறுபடுகின்றபோதும், முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு சமமற்றவை என்பது திட்டவட்டமாக அறியப்படுகின்றபோதுமே, $t'_v$ என்ற அளவை பயன்பெறுகிறது.

**உதாரணம் :** ஒரு மாநகராட்சி இரண்டுவித ஒளிர் விளக்குகளை, அவற்றின் ஒளிர்வு நேரத்தினை அடிப்படையாகக்கொண்டு, சோதித்து, அதிக ஆயுட்காலம் கொண்ட விளக்கை வாங்க விரும்புகிறது. முதலாம் வகை, இரண்டாம் வகையைக் காட்டிலும் மலிவானது. கிடைத்தன்மை மட்டம் $\alpha = 0{\cdot}05$-ல் இரண்டாம் வகை விளக்குகள், முதல்வகையைக் காட்டிலும் அதிக ஒளிர்வு நேரம் உடையன என்பது நிருபிக்கப்பட்டாலன்றி, அம் மாநகராட்சி முதல் வகை விளக்குகளையே பெறுகிறது. ஒவ்வொரு வகையினின்றும், 100 விளக்குகளைக் கொண்ட மாதிரி தனித் தனியாக எடுக்கப்பட்டு, $\bar{x}_1 = 985$, $\bar{z}_1 = 1008$, $s_1 = 80$, $s_2 = 60$ (மணிகளில்) என்று கண்டறியப்படுகின்றது. எத்தகைய முடிவு மாநகராட்சிக்கு இலாபகரமானதாகும்?

**தீர்வு :**

(1) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என்பது எடுகோளாகும்.

(2) $\alpha = 00{\cdot}5$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(3) அளவையானது, $$t_{n_1+n_2-2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{Sp. \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

ஆகும்

$\mu_1 - \mu_2 = 0$ எனில், $t_{n_1+n_2-2}$ ஒரு $t$-பரவலைப் பெறுகிறது. இதற்கான நிபந்தனைகள் (1) மாதிரிகள் ராண்டமாகப் பெறப்பட்டன. (2) ஒளிவிளக்குக்குகளின் ஒளிர் நேரம் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாகும். (3) இரு முழுமைத் தொகுதிக்கும் ஒரே மாறுபாடு கொண்டவை எனினும், $n$-ன் மதிப்பு இவ்வளவு பெரிதாக அமைகின்ற நேரத்தில், (2), (3) ஆகிய நிபந்தனைகள் அவ்வளவு இன்றியமையாதவை அல்ல.

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி, $t_{100+100-2} = t_{198} < -1{\cdot}658$ ($t_\infty = 1{\cdot}65$) இது $t$-பரவல் பரப்பு அட்டவணை 8-லிருந்து பெறப்படுகிறது.

(5) கணக்கீடுகள் :

$$sp^2 = \frac{99\,(80)^2 + 99\,(60)^2}{198} = \frac{6400 + 3600}{2}$$

அளவையின் பகுதி,

$$sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 50 \times \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} = 10$$

எனவே, $t_{198} = \frac{985 - 1000}{10} = -1{\cdot}8.$

(5) கணக்கிடப்பட்ட அளவையின் மதிப்பு, தீர்வுகட்டமான பகுதியில் அமைவதால், $H_0$-நிராகரிக்கப்படுகின்றது. எனவே, இரண்டாம் வகை ஒளி விளக்குகளே, பெறப்பட வேண்டும்.

உதாரணம் : சென்ற பிரச்சினையில், இரண்டு வகை விளக்குகளும் ஒரே விலையை உடையன என்றும் அதனால் ஒன்றிற்குப் பதிலாக மற்றொன்றை விரும்புவதற்கு எவ்விதக் காரணமும் இல்லை என்றும் கொள்க. இப்பொழுது அவ் விரண்டுவகை விளக்குகளின் சராசரி ஒளிர் நேரத்தைக் கணக்கிடுகையில், எவ்வாறு எடுகோள், சோதனைமுறை மாற்றம் பெறும் எனக் விளக்குக.

தீர்வு : (1) இப்பொழுது எடுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ எனவும், மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ எனவும் ஆகிறது.

(2) தீர்வுகட்டமான பகுதி $t_{198} < -1.9\sigma$, $t_{198} > 1.9\sigma$ என்று மாறுகிறது. $t_{198}$-க்கான மதிப்பு ($\alpha = 0{\cdot}05$). ($t_{198} = t_\infty$) $t$-பரவல் பரப்பு அட்டவணை 3-லிருந்து பெறப்படுகிறது.

(3) இப்பொழுது, $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஏனெனில், மாதிரிச் சராசரியில் காணப்படும் வித்தியாசம், இரண்டாம் வகையின் தரம் உயர்ந்தது என்பதை விளக்கப் போதிய சான்றினைப் பகரவில்லை.

$\mu_1 - \mu_2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி :

$$\text{prob}\left[-t_{n_1+n_2-2,\,1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{n_1+n_2-2,\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha.$$

இவ்விடத்தில் நம்பிக்கைக்கெழு $(1-\alpha)$ ஆகும்.

சமமின்மையைப் பொறுத்தமட்டில் சில கணக்கிடுகளை மேற் கொள்ள,

$$\text{Prob}\left[\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}}\ Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<\mu_1-\mu_2\right.$$

$$\left.<\bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}}\ Sp\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

$$=1-\alpha.$$

எனவே, நம்பிக்கை இடைவெளி,

$$\left[\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}}\ Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$$

$$\left.\bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}}\ Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

என அமைகிறது. இந்த இடைவெளியில் $\mu_1-\mu_2$-ன் மதிப்பு அமைந்தால்தான் $H_0 : \mu_1=\mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ என்ற சோதனையில் $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படும்.

உதாரணம் : நம்பிக்கைக்கெழு 0·95 எனக் கொண்டு, $\mu_1-\mu_2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை $\bar{x}_1=985$, $\bar{x}_2=1003$ $Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=10$ என்ற முன்பே நாம் முன்னோர் உதாரணத்தில் கண்டறிந்த மதிப்புகளைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு :

$t_{198,\ 0\cdot975}=1\cdot96$ என்பது $t$-பரவல் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படுகிறது. எனவே, தேவையான இடைவெளி,

$$[(985-1003)-1\cdot96(10),(985-1003)+1\cdot96(10)]$$

$$=(-37\cdot6,\ 1\cdot6)$$

## பயிற்சிகள்

1. இரு விதமான கோதுமை ரகங்கள் அவற்றின் விளைச்சலுக்காகச் சோதிக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு வகைக்கும் 32 ஏக்கர்கள் ஒதுக்கப்பட்டு, ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் அவை பயிரிடப்படுகின்றன. வகை $A$ : சராசரி விளைச்சல் ஏக்கருக்கு 33 புஷல்கள், மாதிரி மாறுபாடு 5·9; வகை $B$ : சராசரி விளைச்சல் 35·7 புஷல்கள், மாதிரி மாறுபாடு 12·1; $\alpha=0\ 01$ எனக் கொண்டு, இரு வகைகளையும் ஆராய்க.

2. மேற்கண்ட பிரச்சினைக்கு, $\mu_1-\mu_2$-க்கான நம்பிக்கைக் கெழு 0·99 எனக்கொண்டு நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்க இந்த நம்பிக்கை இடைவெளி, சோதனையுடன் எங்ஙனம் தொடர்பு கொண்டுள்ளது ?

3. ஒரு குழுமம் இருவித டயர்களைப்பற்றி அறிய வருகிறது. அக் குழுமம், முதல் வகை டயர்களை, இரண்டாவது வகை முதல் வகையைவிடச் சிறந்தது என்பது திட்டவட்டமாக நிரூபிக்கப் பட்டாலன்றி, வாங்க நாட்டம் கொள்கிறது. ஒவ்வொரு வகையிலிருந்தும் 16 டயர்கள் ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டு, அவற்றின் ஓட்டநீளம் (அவை முழுவதும் செயலற்றுப் போகும் போது அவை ஓடியிருக்கும் நீளம் அல்லது தூரம்) கணக்கிடப் பட்டுள்ளது.

| | |
|---|---|
| முதல் வகை : | $\bar{x} = 26000$ மைல், $s_1 = 4200$ |
| இரண்டாம் வகை : | $\bar{x}_2 = 25000$ மைல், $s_2 = 2800$ |

அக் குழுமம் மேற்கொள்ள வேண்டிய முடிவு யாது ?

4. நம்பிக்கைக்கெழு 0·90 எனக்கொண்டு, $\mu_1-\mu_2$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை, மேற்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு அமைக்கவும்.

### இணையாக அமைந்த மதிப்புகளில் இரண்டு சராசரிகளைப்பற்றிய உய்த்துணர்வு (Inference About Two Means with paired observations)

இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரியை ஒப்பு நோக்குகையில் பல்வேறு சூழ்நிலைகளில், மாதிரி மதிப்புகள் இவ்விரண்டாக அமைவதைக் காண்கிறோம். இத்தகையதொரு பிரச்சினையில் இரண்டு மாதிரிகளின் அளவுகளும் ஒன்றாக அமைகிறது.

எனவே, இரண்டு ராண்டம் மாதிரிகளுக்குப் பதிலாக, ஒரே ராண்டம் மாதிரி இவ்விரண்டு மதிப்புகளாக அமைந்துள்ளது. ஒரு ஜதையாக அமைந்துள்ள இரண்டு மதிப்புகளும் ஒன்றொடொன்று தொடர்பு கொண்டுள்ளன. உதாரணமாக, 20 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவிற்குக் கடுமையான உடற் பயிற்சிச் சோதனைகள் அளிக்கப்படுகின்றன என்று கொள்க. அப் பயிற்சிக்கு முன்பும், பின்பும் அந்த 20 மாணவர்களின் எடையும் குறிக்கப் படுகிறது என்றும் கொள்க. உடற்பயிற்சிச் சோதனைகளால் மாணவர்களின் உடல் எடையில் ஏதேனும் மாற்றம் ஏற்பட்டுள்ளதா என்பதே நமது பிரச்சினையாகும். இச் சோதனையில் உடல் எடையானது முன்பும், பயிற்சிக்குப் பின்பும், குறிக்கப்படுவதால் அவை ஒன்றொடொன்று தொடர்பு உடையனவாக இருக்கின்றன. ஏனெனில், ஒரு மாணவன் தொடக்கத்தில் 125 ராத்தல் எடை இருப்பின், பயிற்சிக்குப் பின் 125 ராத்தலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகவோ குறைவாகவோ இருக்க வேண்டும். 160 ராத்தல் எடையுள்ள மற்றொரு மாணவன், பயிற்சிக்குப் பின்பும் 160-ச் சுற்றியுள்ள ஏதோவொரு மதிப்பை எடையாகக் கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, பயிற்சிக்குப் பின்னர் ஒரு மாணவனது உடலின் எடை, தொடக்க எடையைப்பொறுத்தே அமைகின்றது இத்தகைய சூழ்நிலையில் கையாளப்படும் சோதனை முறையை விவரமாகக் காண்போம்.

இவ்விருவித மாதிரி மதிப்புகளை அமைப்பதற்குக் காரணமான மற்றொரு முக்கிய காரணி, நமது ஆராய்ச்சிக்குத் தேவையில்லாத விளைவுகளை நீக்குதலாகும். 50 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பறையை இரண்டு சமப்பிரிவுகளாகப் பிரித்து, ஒரு பாடத்தைப் பயிலுவிக்கும் இரு வித முறைகளை, ஒரு பிரிவுக்கு ஒன்றாகக் கையாண்டு அம்முறைகளை ஒப்பிட வேண்டும். ஒப்புமைக்கு மாணவர்கள் இறுதித் தேர்வில் பெறும் மதிப்பெண்களே பயன்படுத்தப் படும். மேற் கூறப்பட்ட இரு பிரிவுகளில் ஒன்று, புத்தி கூர்மை அதிகம் கொண்ட மாணவர்களை உடையதாயிருப்பின், பயிற்று முறைகளின் மூலம் பெறப்படும் முடிவுகள் தகுந்த ஒப்புமையை அளிக்க முடியாது. எனவே, மாணவர்களின் அறிவுக் கூர்மையை ஏதேனும் ஒரு முறையில் கணித்து, பின்னர் இவ்விரண்டாக்கியபின், ராண்டம் முறை ஒரு பிரிவுக்கு ஒரு ஜோடி என அமைத்தலே ஒரு சிறந்த முறையாகும். நாம் இந்த இரண்டு பிரிவு மாணவர்களின் தேர்ச்சியை அடிப்படையாகக் கொண்டு அடையும் முடிவுகள் இவ்விரண்டாக அமையும் மதிப்பெண்களின் வித்தியாசத்தை சார்ந்தும் உள்ளன. இதனால் உண்டாகும் முடிவுகள், இரண்டு முறைகளுக்கும் இடையேயான வித்தியாசத்

தைத் தெள்ளத் தெளிவாகக் கோடிட்டுக் காட்டுவனவாக அமையும்.

தேவையற்ற விளைவுகள் நீக்கப்படுமாயின், சோதனை எந்த மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில் அமைந்ததோ, அவை அதிக வேறுபாடு இல்லாமல் உள்ளன. பயில்விக்கும் முறையின் மூலம் பெறப்படும் மதிப்பெண்கள், மாணவர்களின் திறமை, பயில்விக்கும் முறையின் கண் அமைந்த வேற்றுமை ஆகிய இரண்டையும் எடுத்துக்காட்டும் பாங்கு உடையதாயின், மாறுபாட்டின் மதிப்பும் அதிகமாகும். ஏனெனில், ஒவ்வொரு மதிப்பெண்ணும் வேறுபாட்டிற்கான இரு வகை ஆதாரங்களைக் கொண்டுள்ளன. அனுசரிக்கப்படும் மதிப்புகளின் மாறுபாட்டைக் குறைத்தால், நாம் பெறும் முடிவுகளின் தன்மை அதிகச் சரியானதாய் அமைகிறது. இரண்டாம் வகைப்பிழையின் மதிப்பு குறைக்கப்படுதலே இதற்குக் காரணமாகும்.

பயில்விக்கும் முறைபற்றி அமைந்த சோதனையில், வேறு வேறு திறமை கொண்ட மாணவர்களை இவ்விரண்டாக அமைத்தலில் ஓர் அனுகூலம் காணப்படுகிறது. ஏனெனில், இதன் மூலம் மிக அதிகமான தனி நபர்களைக்கொண்டு குழுவிற்கு இம் முடிவுகள் பொருந்துகின்றன. எனவே, பொதுவாக, ஒரே மாதிரியான அலகு கொண்டவைகளை ஒவ்வொரு கோடியிலும், ஆனால் ஒரு ஜோடிக்கும் மற்றொரு ஜோடிக்கும் பெரிய வித்தியாசம் இருக்கும் வகையிலும் ஜோடியை அமைப்பது பயன்தரத்தக்கது.

உதாரணமாக, 10 இளைஞர்களுக்கு ஒரு கடினமான உடற் பயிற்சி ஒரு ராணுவத்தில் கொடுக்கப்பட்டு, பயிற்சிக்கு முன்னரும் பின்னரும் அவர்களின் எடை விவரங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைந்துள்ளன எனக் கொள்வோம்.

| இளைஞர் : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| முன்னைய எடை : | 127 | 195 | 162 | 170 | 143 | 205 | 168 | 175 | 197 | 136 |
| பின்னைய எடை : | 135 | 200 | 160 | 182 | 147 | 200 | 172 | 186 | 194 | 141 |
| வித்தியாசம் : | −8 | −5 | 2 | −12 | −4 | 5 | −4 | −11 | 3 | −5 |

இங்கு ஒவ்வொரு இளைஞரின் முன் எடை, பின் எடை என்ற மதிப்புகளை ஒவ்வொரு ஜோடியாகக் கருதினல், ஒரு ஜோடிக்கும்

மற்றொரு ஜோடிக்கும் பெரும் வித்தியாசம் இருப்பதை மேலுள்ள பட்டியல் விளக்குகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையானது, $n$-ஜோடி அளவுகளை $(x_{11}, x_{12})$, $(x_{21}, x_{22})$ ... $(x_{n1}, x_{n2})$ அளிப்பதாகக் கொள்க. ஒவ்வொரு ஜோடிக்கும் ஒரு வித்தியாச மதிப்பைக் கணக்கிட முடிகிறது. இவ் வித்தியாசங்களை, $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$ எனக் குறிப்பிடுக.

பொதுவாக, $d_i = (x_{i1} - x_{i2}),\ i = 1, 2, \ldots n$

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{n}.\ s^2 d = \frac{\Sigma (d_i - \bar{d})^2}{(n-1)}$$

$d_1\ d_2 \ldots d_n$ ஆகியவை ராண்டம் மாதிரி வித்தியாசங்கள் எனவும், இவ் வித்தியாசங்கள் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகின்றன எனவும் கொண்டால்,

$$t_{n-1} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}},$$ இவ்விடத்தில் $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$, என்ற அளவை

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$H_0 : \mu_1 > \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$

$H_0 : \mu_1 < \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

போன்ற எல்லாவிதமான சோதனைகளுக்கும் ஏற்ற அளவையாகும். இந்த அளவையானது $\mu_d = 0$ என்று கொள்ளப்பட்டுக் கணக்கிடப்படுகிறது. முன் அத்தியாயத்தில் குறிப்பிடப்பட்டது போலவே, தீர்வுகட்டமான பகுதியும் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. இவற்றில் எவ்வித மாற்றமும் இல்லை.

இத்தகைய சோதனையில், $t$-பரவலுக்கான வரையற்ற பாகை $(n-1)$ என ஆகிறது. ஆனால், மொத்த மாதிரி மதிப்புகள் $2n$ ஆகும். எனினும், அதே மாதிரி மதிப்புகள் இவ்விரண்டாக ஜோடியாக்கப்பட்டால், தனி மாதிரி மதிப்புகளாகக் கருதப்பட்டால், $t$-பரவல் சோதனையில் $2(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளைப் பெறுகிறது. எனவே, ஜோடியாக்குதல் தேவையற்றதென்ற நிலையில் $t_{n-1}$ என்ற அளவையைப் பயன்படுத்தும்

சோதனை வரையற்ற பாகைகளை இழக்கிறது, ஆனால், மாதிரி மதிப்புகள் ஒன்றோடொன்று தொடர்புடையதாயிருக்கும்போது இவ்வாறு இவ்விரண்டாக்குதல், பாகையின் மதிப்பைக் குறைத்தாலும், மாறுபாட்டின் மதிப்பினையும் குறைத்தலால், எவ்வித பெரிய மாற்றத்தையும் உண்டாக்க முடிவாது.

உதாரணம் : 10 இளைஞர்கள் ஓர் உடற்பயிற்சி முகாமில் சில வாரங்கள் பயிற்சி பெற்றனர். அவர்களுடைய எடை, பயிற்சிக்கு முன்னும் பின்னும் கீழ்க்கண்டவாறு அமைந்தன. உடற்பயிற்சி முகாமினால், சராசரி எடை எவ்வித பாதிப்புக்குள்ளாயிற்று ?

| இளைஞர்கள் : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பயிற்சிக்குப் முன் எடை : | 127 | 195 | 162 | 170 | 143 | 205 | 168 | 175 | 197 | 136 |
| பயிற்சிக்குப் பின் எடை : | 135 | 200 | 160 | 182 | 147 | 200 | 172 | 186 | 194 | 141 |
| வித்தியாசம் | −8 | −5 | 2 | −12 | −4 | 5 | −4 | −11 | 3 | −5 |

தீர்வு :

1. $H_0 : \mu_d = 0$, $H_1 : \mu_d \neq 0$ என்பது எடுகோள்களாகும்

2. $\alpha = 0.05$ என்று கொள்க.

3. பயன்படுத்தப்பட வேண்டிய அளவை $t_{n-1} = \dfrac{\bar{d} - \mu_d}{s_d \sqrt{n}}$

இவ்விடத்து $\mu d = 0$ என்று கொள்க. $t_{n-1} = t_9$ — ஒரு $t$-பரவலாகக் கீழ்க்கண்ட நிலையில் அமைகிறது.

(1) வித்தியாசங்களின் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

(2) கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதிரி, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டமாகப் பெறப்படுகிறது.

4. தீர்வு கட்டமான பகுதி $t_9 < -2.26$, $t_9 > 2.26$ $t_9$, $\alpha = 0.05$ எனில், $t$-பரவல் பரப்பு அட்டவணை 3-லிருந்து பெறப்படுகிறது.

5. $$\bar{d} = \frac{-8-5+2-12-4+5-4-11+3-5}{10}$$

$$= -\frac{39}{10} = -3.9$$

$$\Sigma d^2{}_1 = (-8)^2+(-5)^2+(2)^2+(-12)^2+\dots+(3)^2+(-5)^2 = 449$$

$$s_d^2 = \frac{n\Sigma d_i^2 - (\Sigma d_i)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{10(449)-(-39)^2}{10\cdot 9} = \frac{4490-1521}{10\cdot 9}$$

$$= 32\cdot 99.$$

$$s_d = 5\cdot 74.$$

$$t_9 = \frac{-3\,9}{(5\cdot 74)/\sqrt{10}} = \frac{-3\cdot 9\times 3\cdot 16}{5\cdot 74} = -2\cdot 13.$$

6. $t_9$-ன் கணக்கிடப்படும் மதிப்பு தீர்வு கட்டமான பகுதியில் இல்லை. எனவே, $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது, உடற்பயிற்சி முகாம், சராசரி இளைஞனின் எடையைப் பொறுத்த மட்டில் எவ்வித மாற்றத்தையும் ஏற்படுத்தியதற்கான தடயத்தை அளிக்கவில்லை.

உதாரணம் : இரண்டு பயிற்று முறைகள், 50 மாணவர்களை இரு பிரிவாகப் பிரித்து, சோதிக்கப்படுகின்றன. மாணவர்கள் அவர்களது அறிவுக் கூர்மையின்படி இவ்விரண்டாக்கப்படுகிறார்கள். ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் பின்னர், ஒரு ஜோடி ஒதுக்கப்படுகிறது. இதில் ராண்டம் முறையே கையாளப்படுகிறது. பயிற்று முறை முடிந்தபின்னர், தேர்வு நடத்தப்படுகின்றது. அதில் கிடைக்கும் மதிப்பெண்களின் ஜோடி வித்தியாசம், முதல் முறையில் பெற்ற மதிப்பெண்களிலிருந்து இரண்டாம் முறை மதிப்பெண்களைக் கழிப்பதன் மூலம் அமைக்கப்படுகிறது. $\bar{d} = 5\cdot 6$, $s_d = 9\cdot 6$ என்று பெறப்படுகிறது. எனினும், இரண்டாம் முறை, முதல் முறையைக் காட்டிலும் எளிமையானதாகையால், முதல் வகை, இரண்டாம் வகையைக் காட்டிலும் அதிகச் சக்தி வாய்ந்தது என்பது நிரூபிக்கப்பட்டாலன்றி, இரண்டாம் முறையே கையாளப்படும். எத்தகைய தீர்மானம் எடுக்கப்பட வேண்டும்?

தீர்வு : (1) $H_0 : \mu_d = 0$, $H_1 : \mu_d > 0$. $H_0$-நிராகரிக்கப்பட்டால், முதல் வகையைப் பின்பற்றுவது சக்தி மிக்கதாகும் என்று தீர்மானிக்கிறோம்.

2. $\alpha = 0.01$ என்று கொள்க.

3. $t_{n-1} = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$

4. $t_{24} = \dfrac{5.6}{9.6/\sqrt{25}} = \dfrac{5.6 \times 5}{9.6} = \dfrac{28.0}{9.6} = 2.92.$

5. தீர்வு கட்டமான பகுதி: $t_{24} > 2.49$ (அட்டவணை 3-லிருந்து)

6. எனவே. $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே, முதல் முறை இரண்டாம் முறையைக் காட்டிலும் சிறந்ததாகும்.

நம்பிக்கை இடைவெளி: $\mu_d$-க்கான நம்பிக்கைக் கெழு $(1-\alpha)$ எனக் கொண்ட நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left[\bar{d} - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}},\ \bar{d} + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right]$$

என்றமைகிறது.

உதாரணம்: நம்பிக்கைக்கெழு 0.95 எனக் கொண்டு, $\bar{d} = -3.9$, $s_d = 5.74$, $n = 10$ எனக் கொண்ட பிரச்சினைக்கு $\mu_d$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

தீர்வு: $t_{9, 0.975} = 2.26$, ($t$-பரவல் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து) எனவே, நம்பிக்கை இடைவெளி,

$$\left[-3.9 - \frac{(2.26)(5.74)}{\sqrt{10}},\ -3.9 + \frac{2.26\,(5.74)}{\sqrt{10}}\right]$$

$= [-8.0,\ 0.2]$

## பயிற்சிகள்

1. இரண்டு உரவிற்பனையாளர்கள், ஒவ்வொருவரும் தங்கள் வகை உரமே உயர்ந்தது என்று கூறுகின்றனர். இந்தச் சிக்கலைத் தீர்க்க, மூன்று விஞ்ஞானிகள் அமர்த்தப்படுகின்றனர். அவ்விஞ்ஞானிகள், இரு வகை உரத்தையும் எட்டு வெவ்வேறு இடங்களில் ஒரே பயிருக்கு இட்டு, அதன் விளைச்சலைக் கண்டறிகின்றனர்.

விளைச்சல் எட்டு இடங்களிலிருந்து (புஷல்களில்)

| வகை | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 114 | 86 | 98 | 75 | 102 | 82 | 64 | 95 |
| II | 107 | 94 | 86 | 70 | 90 | 82 | 73 | 81 |

அவ்விஞ்ஞானிகள் எந்த முடிவை மேற்கொள்ள வேண்டும்? $\alpha = 0.05$ என்று கொள்ளப்படுகிறது.

2. நம்பிக்கைக்கெழு 0.95 எனக்கொண்டு, $\mu_d$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

3. கீழ்க்கண்ட விவரத்திற்கு, $t_{n-1}$ என்னும் அளவையைப் பயன்படுத்திச் சோதிக்க. $H_0 : \mu_d = 0$, $H_1 : \mu_d \neq 0$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| வகை 1: | 59 | 61 | 58 | 59 | 64 | 60 | 61 |
| வகை 2: | 63 | 67 | 55 | 65 | 67 | 58 | 68 |

4. நம்பிக்கைக்கெழு 0.99 எனக் கொண்டு, $\mu_d$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

# 7. தனித்த ராண்டம் மாறிகளின் சுட்டுறுப்புகளைப் பற்றிய புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகள் : (தோராயமான கைவர்க்கச் சோதனைகள் முதலியவை)

சென்ற அத்தியாயத்தில் காணப்பட்ட சோதனைகளிலெல்லாம், புள்ளியியல் உய்த்துணர்வின் முடிவுகள் மிக மிகச் சரியாக அமைவதற்கு, கூறு மாதிரிகள் ஓர் இயல் நிலைப் பரவல் தன்மையினின்று பெறப்படுகின்றன என்னும் மிக மிக இன்றியமையாத ஊகத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைந்தனவாகும். சில சமயங்களில், மாதிரி அளவு $n$-ன் மதிப்பு ஓரளவு பெரிதாக அமையுமாயின், இயல் நிலைத்தன்மை அவ்வளவு முக்கியமானதன்று; இதற்குக் காரணம் நடு எல்லைத் தேற்றம் என்பதையும் பாங்குற விளக்கினோம். இன்னும் சற்றுத் தெளிவாக்கினால், சென்ற அத்தியாயத்தில் நமது சோதனைக்குட்பட்ட மாறி களெல்லாம் தொடர்ச்சியான மாறிகளாக. (continuous random variables) அமைந்தன.

எனவே, இந்த அத்தியாயத்தில் தனித்த ராண்டம் மாறிகளுக்கான (Discrete Random Variables) நிகழ்தகவு மாதிரிகளை, வடிவமைப்புகளை நாம் கருத்தில் கொண்டு அரிய பல உண்மைகளை நிலைநிறுத்துவோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கூடையிலுள்ள (மொத்தம் 100) பழங்களில் 10 அழுகியவை என்று கொள்ளும் போது, இது ஒரு தனித்த மாதிரி நிகழ் தகவு வடிவமைப்பாக அமைகிறது. நல்ல பழங்களின் விகிதம் முழுமைத் தொகுதியில் தெரியாத நிலையில், இம்மாதிரியான 100 பழங்களைக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியில் தெரியாத நிலையில், இம்மாதிரியான 100 பழங்களைக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியின் நல்ல பழங்களின் விகிதம் $p = 0.90$ என்பதைச் சோதனை செய்யலாம். மேலும் $p$-க்கான நம்பிக்கை இடை வெளியையும் அமைக்கலாம். ஆகவே, நாம் சென்ற அத்தியாயத்தின் ஆரம்பத்தில் குறிப்பிட்டது போன்று, நிலைத்தரம் வாய்ந்த புள்ளியியல் நுணுக்கங்களை எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என்று அறிந்து பின்னர் அவற்

றைத் தக்க தருணங்களில் பயன்படுத்துவதே நமது குறிக்கோளாக அமையுமேயன்றி, இச் சோதனையின் அடிப்படையாக அமையும் கணித இயல் நுணுக்கங்கள் நமது பார்வைக்கு அப்பாற்பட்டவை.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சுட்டுறுப்பு $p$-ஐப் பற்றிய உய்த்துணர்வு :

$B(n, p)$ எனப்படும் ஈருறுப்புப் பரவலைப்பற்றிய எடுகோள் சோதனைகள்; பெரும்பாலும் நாம் முன்பு சராசரி, மாறுபாடு பற்றி அமைத்த சோதனைகளை ஒத்திருக்கின்றன. எடுகோள் $H_0 : p = p_0$, மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : p < p_0$ சோதிக்கப் படும் விதம். உருளைக்கிழங்கு பிரச்சினையில் முன்னொரு அத்தியாயத்தில் விளக்கப்பட்டது. நாம், ஆணிகளைத் தயாரிக்கும் ஓர் இயந்திரத்தை வாங்க எண்ணுகையில், அந்த இயந்திரத்தால் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் பெரும்பான்மை விகிதம் சீக்கிரத்தில் பயனற்றுப் போய், திரும்பவும் சரி செய்யப்பட வேண்டும் (முனை மழுங்குவது போன்று) என்றமைந்தால் அந்த இயந்திரத்தை அவ்வளவாக விரும்பமாட்டோம். ஒரு முடிவை அடைய,

$$H_0 : p = p_0, \quad H_1 : p > p_0$$

என்ற சோதனையை மேற்கொண்டு, எடுகோள் $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டால் அந்த இயந்திரத்தைப் பெறலாம். அல்லது ஒரு நாணயம் பூ, தலை ஆகிய இரண்டிற்கும் சமமாக நிகழ்தகவு ஏற்படுத்தத் தக்கதா என்ற சோதனையில்,

$$H_0 : p = p_0, \quad H_1 : p \neq p_0$$

என்றமைத்து, $p_0 = \frac{1}{2}$ எனக் கொள்ளலாம். முன்பு நாம் விளக்கியபடியே, சில பிரச்சினைகளில்,

$H_0 : p = p_0, H_1 : p > p_0$ என்பது

$H_0 : p < p_0, H_1 : p > p_0$ என்றும்,

$H_0 : p = p_0, H_1 : p < p_0$ என்பது

$H_0 : p > p_0, H_1 : p < p_0$ என்றும்

மாற்றப்படலாம். ஆனால், சோதனையில் எவ்வித மாற்றமும் இல்லை.

$P$-ஐப் பற்றிய, இத்தகைய எடுகோள்களைச் சோதிக்கப் பயன் படும் அளவை, $x$, $n$–ஆட்டங்களில் நாம் அடையும் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தமையும். கீழ்க்கண்ட நான்கு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி செய்யப்படுமாயின்,

(1) ஒவ்வொரு சோதனையின் முடிவும் 'வெற்றி' அல்லது 'தோல்வி' இரண்டில் ஒன்றாகும்.

(2) வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு '$p$' எல்லா சோதனைக்கும் சமமானதாக அமையும்.

(3) ஒவ்வொரு சோதனையும், பிற சோதனைகளிலிருந்து தனித்து. அதாவது பிற சோதனைகளைச் சார்ந்திடாமல் (independent) விளங்குகின்றன.

(4) சோதனையானது ஒரு குறிப்பிட்ட '$n$' தடவைகள் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலாக அமையும். $n$-ன் மதிப்பு நாம் பெற விரும்பும் சோதனையின் திறத்தைப் பொறுத்து அமையும்.

$H_0 : p=p_0$ $H_1 : p< p_0$ என்ற சோதனையில், அளவை $x$-ன் சிறிய மதிப்புகளே. $H_1$-க்குச் சாதகமாக அமைவதால், $H_0$ நிராகரிக்கப்பட ஏதுவாகிறது. $x$ ஒரு தனித்த மாறியாக விளங்குவதால், மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$வைக் குறிப்பிட்டு அமைக்க இயலாது. எனவே, இதன் எதிரொலியாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் தீர்வு கட்டமான பகுதி, $x < x_0$ என்றமையும். இவ்விடத்து $x_0$ என்பது $x$-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பாய், $P_r(x < x_0)< \alpha$ என்றமைகிறது.

$\alpha = 0.050$, $n = 25$ எனக் கொண்டு, எடுகோள் $H_0 : p = 0{\cdot}90$ஐ மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : p < 0{\cdot}90$-க்கு எதிராகச் சோதிக்கையில், தீர்வு கட்டமான பகுதி, $x < 19$, $\alpha = 0{\cdot}05$-க்குப் பதிலாக $\alpha = 0{\cdot}03340$ என்றாகிறது.

இதே போன்று, $H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$ என்றும் சோதனையில், $x$-ன் பெரிய மதிப்புகள் $H_0$ நிராகரிக்கப்பட ஏதுவாதலால், $x > x_0$ என்றமையும்போது $H_0$ நிராகரிக்கப்படும். இவ்விடத்து $P_r(x>x_0)$ என்பது மிகைத்தன்மை மட்டமாக அமையும். எனினும், மிகைத்தன்மை மட்டத்தை $\alpha = \alpha_0$ எனக் குறிப்பிட்டு வைத்திருந்தால், மிகச் சிறிய $x$ மதிப்பு $x_0$ஐ $P_r(x > x_0) < \alpha_0$ என்றிருக்கும்படி அமைக்கிறோம்.

$H_0 : p= p_0$, $H_1 : p\neq p_0$ என்று இரு புறத்தான சோதனைக்கு மிகப் பெரிய மற்றும் மிகச் சிறிய $x$ மதிப்புகள் எடுகோள் $H_0$-ன் நிராகரிப்புக்குக் காரணமாக விளங்குகின்றபடியால், தீர்வு கட்டமான பகுதி, $x < x_1$, $x > x_2$ என்று தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

இவ்விடத்து $x_1$, $x$-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பாய், $P_r(x \leqslant x_1) \leqslant \alpha_0/2$ என்றும், $x_2$, $x$-ன் மிகச் சிறிய மதிப்பாய் $P_r(x \geqslant x_2) < \alpha_0/2$ என்றும் அமைந்து மிகைத்தன்மை மட்டம், இவ்விரண்டின் கூடுதல் என அமைகிறது.

உதாரணம்: ஒரு நாணயம் 100 முறை சுண்டியெறியப் படுகிறது. 43 தடவைகள் 'தலை' கிடைத்தால், அந் நாணயம், பூவும் தலையும் சமமாய் விழுவதற்கான நிகழ்தகவைப் பெற்றுள்ளதா என்று கண்டறிக $\alpha = 0{\cdot}05$ எனக் கொள்க.

தீர்வு: (1) $H_0 : p = \frac{1}{2}$, $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ என்றமைகிறது.

(2) மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha_0 = 0{\cdot}05$ என்று குறிக்கப் பட்டுள்ளது. எனினும், நாம் அடையப்போகும் மிகைத்தன்மை மட்டம் $< 0{\cdot}05$ என்றே அமையும்.

(3) அளவை $x$, நாம் பெறும் 'தலை'களின் எண்ணிக்கையாய் அமையும். மேலும். (1) ஒவ்வொரு முறை நாணயம் சுண்டி யெறியப்படும்போது, தலை அல்லது பூ ஏற்படுவதால், (2) 'தலை' நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்று சோதனை முழுவதும் மாருமல் இருப்பதனுல், (3) ஒரு முறை சுண்டியெறியப்படுதல் மற்ற முறைகளில் சுண்டியெறியப்படுவதனைச் சார்ந்து விளங்காத படியால், (4) நாணயம் $n = 100$ முறைகள் சுண்டியெறியப் படுவதால் $x$-ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலாக அமையும்.

(4) தீர்வுகட்டமான பகுதி, $x < x = 39$, $x > x_2 = 61$ உண்மையான மிகைத்தன்மை மட்டம்,

$$\alpha = P_r.(x < 39) + P_r.(x > 61)$$
$$= 0{\cdot}0176 + 0{\cdot}176 = 0{\cdot}0352$$

எனவே, $P_r(x < 40) = 0{\cdot}02844 > 0{\cdot}025$

$$P_r(x > 60) = 0{\cdot}02844 > 0{\cdot}025$$

(5) எவ்விதக் கணக்கீடும் தேவையில்லை. அளவை $x = 43$.

(6) $x = 43$ ஆதலின், இது தீர்வுகட்டமான பகுதியில் அமையவில்லை. எனவே, $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

உதாரணம்: திருகாணிகளைத் தயாரிக்கும் ஓர் இயந்தி ரத்தை நாம் வாங்க எண்ணியுள்ளோம். அவ்வியந்திரம் தயா

ரிக்கும் திருகாணிகளில், திரும்பவும் சரிபார்க்கப்பட வேண்டியுள்ள ஆணிகளின் விகிதம் 0·10 அல்லது அதற்குக் குறைவாக இருப்பின், நாம் அந்த இயந்திரத்தை வாங்குவோம். அந்த இயந்திரத்தால் தயாரிக்கப்படும் திருகாணிகளின் தொகுதியிலிருந்து 25 திருகாணிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதில், 4 திருகாணிகள் உடனேயே சரிசெய்யப்படவேண்டிய நிலையில் இருந்தன $\alpha_0 = 0.05$ எனில், நாம் மேற்கொள்ளும் தீர்மானம் யாது ?

தீர்வு : 1. $H_0 : P \leq 0.10$, $H_1 : p > 0.10$ என்றமைக்கிறோம்.

2. மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha_0 = 0.05$ எனினும், நாம் அடையும் உண்மையான மட்டம் அதை விடக் குறைந்ததாகவே அமையும்.

3. அளவை $x$-ஆனது, உடனேயே சரிபார்க்கப் படவேண்டிய திருகாணிகளின் எண்ணிக்கையென அமைகிறது. மேலும், $x$-ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலுக்குரிய முன் நிபந்தனைகள் அனைத்தையும் பூர்த்தி செய்கின்றபடியால், ஈருறுப்புப் பரவல் $x$-ன் பரவல் எனக் கொள்ளலாம்.

4. தீர்வு கட்டமான பகுதி, $x < 6$,

$$\alpha = P_r(x > 6) = \sum_{x=6}^{25} \binom{25}{x} (0.10)^x \, (0.90)^{25-x}$$

$$= 0.03340.$$

$$P_r(x > 5) = 0.09799$$

5. ஒருவித கணக்கீடும் தேவையில்லை.

6. மாதிரியில் 4-சரிபார்க்கப்பட வேண்டிய திருகாணிகளே அமைந்துள்ளபடியால், $H_0$-ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, அந்த இயந்திரம் வாங்கப்படலாம்.

திறம் பற்றிய சோதனைகள் (Power Calculations) : திறம் பற்றிய சோதனைகள் ஈருறுப்புப் பரவலுக்கான திரள் நிகழ் தகவு கணக்கீடுகளினின்றும் எளிதாகப் பெறப்படுகின்றன.

உதாரணம் : சென்ற உதாரணத்தில் அமைந்த திருகாணி பற்றிய பிரச்சினைக்கு $p = 0.20$, $p = 0.30$ என்று கொண்டு சோதனையின் திறத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : 1. $P_r(x>6)$, ($p=0.2$ என்றிருக்கும் போது)

$$= \sum_{x=6}^{25} \binom{25}{x} (0.2)^x (0.8)^{25-x}$$

$= 1 - B(5, 25, 0.2)$

$= 1 - 0.61669 = 0.3833!$.

2. $P_r(x>6)$, $p=0.3$ எனில்,

$= 1-B(5, 25, 0\cdot3)$

$= 1-(0.19349)$

$= 0.80651$.

உதாரணம்: $p=0.40$ எனக்கொண்டு, 100 முறை நாணயம் சுண்டி எறியப்படும்போது, '43' தலைகள் கிடைக்கும் சோதனைக்குத் திறத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : இச் சோதனையின் தீர்வு கட்டமான பகுதி, $x<39$, $x>61$ என்று கண்டறியப்பட்டுள்ளது. முதல் உதாரணமாக இது விளங்குகிறது. எனவே,

$P_r(x<39) + P_r(x>61)$, $p=0.40$ என்று கொண்டு கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

$P_r(x<39) = B(39, 100, 0{,}4) = 0.46208$.

$P_r(x>61) = 1 - B(60, 100, 0.4) = 0.00002$.

$\therefore$ திறம் $= 0.46208 + 0.00002$.

$= 0.4621$.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு விதை விற்பனையாளர், அவரிடமுள்ள முள்ளங்கி விதைகளில் 90% முளைக்கும் என்று அறை கூவுகிறார். 50 விதைகள் நடப் பட்டதில், 8 முளைக்கவில்லை எனில், அவ் விற்பனையாளரின் கூற்றினை எடுகோள் அமைத்து ஆராய்க. ($\alpha_0 = 0\cdot05$ எனக் கொள்க.)

2. $p=0.75$ எனில், மேற்கண்ட பிரச்சினைக்கான சோதனையின் திறம் யாது? $p=0.60$ எனில், சோதனையின் திறம் யாது?

3. $p$-க்கான, நம்பிக்கைக் கெழு 0.95 எனக் கொண்ட, நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

4. ஓர் இனப் பறவைகளில் 25%, ஒரு குறிப்பிட்ட குணப் பண்பை உடையவை என்று அறியப்படுகிறது. ராண்டம் முறையில் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட 25 பறவைகள் கொண்ட மாதிரியில் 9 பறவைகள் அக் குறிப்பிட்ட குணப் பண்பைப் பெற்றிருந்தன. $\alpha_0 = 0.05$ எனில், நமது அனுமானத்தைச் சோதனை செய்க.

5. 10% பறவைகள் குறிப்பிட்ட குணப்பண்பைக் கொண்டால், சென்ற பிரச்சினைக்கான சோதனையின் திறம் யாது?

6. நம்பிக்கைக் கெழு 0.35 எனக் கொண்டு, $p$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும். (அனுமானம் 25% பறவைகள் குணப்பண்பு கொண்டவை).

7. ஓர் உற்பத்திப்பிரிவிலிருந்து, 6 குறைபாடான திருகாணிகள் பெறப்படும் வரை ராண்டமாக, 51 தடவைகள் திருகாணிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. அவ்வுற்பத்திப் பாங்கினுல் அளிக்கப்படும், குறைபாடுள்ள திருகாணிகளின் விகிதத்திற்கு ஒரு மதிப்பீடு தருக.

8. காசநோய்க்கான ஒரு வித மருத்துவமுறை, 80% வெற்கரமாக அமையக் கூடியது. இந்நிலையில் ஒரு புதிய முறை, 50 நோயாளிகளுக்குக் கையாளப்பட்டதில் 29 நபர்களுக்கு வெற்றிகரமாக அமைந்தது. ஆனுல், புதிய முறை அதிகப் பொருட் செலவை ஏற்படுத் தத்தக்கது. எனவே, புதிய முறை, பழைய முறையைக் காட்டிலும், சாலச் சிறந்தது என்பது $\alpha = 0.01$ மட்டத்தில் நிரூபிக்கப்பட்டாலன்றி, அதனை ஏற்றுக் கொள்வதில் ஆதாயமில்லை. எனவே, நாம் மேற் கொள்ள வேண்டிய முடிவு யாது?

பாய்சான் சுட்டுறுப்பு $\mu$-க்கான உய்த்துணர்வு: இப்பகுதியில் அமையும் எடுகோள் சோதனைகளனைத்தும், முன்பு நாம் விளக்கிய சோதனைகளைப் போன்றே அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒருவர், அவர் ஒவ்வொரு நாளும் பெறும் தொலைபேசித் தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை இரண்டிற்குக் குறைவாக அமைந்தால், தொலைபேசியை எடுத்துவிடுவது என்று தீர்மானிக்கிறுர் என்று கொள்க. இத்தகையதொரு சோதனையில்,

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ ($\mu_0 = 2$) என்றமைகிறது.

$H_0$ நிராகரிக்கப்பட்டால் தொலைபேசி எடுத்துவிடப்படுகிறது,

ஒரு தொழிற்சாலைப் பொறுப்பாளர், தனிது உதவிளாளர் ஒரு பக்கத்தில் ஒரு தட்டெழுத்துப் பிழைக்கு மேலாகச் செய்யாத நேரத்து, அவரையே தொடர்ந்து வேலையில் அமர்த்த முடிவு செய்கிறார், என்னும் சோதனையில் $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ என்றமைகிறது. $H_0$ நிராகரிக்கப்பட்டால் வேலையினின்றும் உதவியாளர் நீக்கப்படுகிறார், இங்கு $\mu_0 = 1$ என அமைகிறது.

இதே போன்று ஒரு குறிப்பிட்ட கன பரிமாண இரத்தத்தில் 5 சிவப்பு அணுக்கள் அமைகின்றன எனக் கொண்டால், ஒருவர் நல்ல இரத்தம் கொண்டவரா அல்லவா என்ற சோதனையில். மருத்துவ நிபுணர்,

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

என்ற சோதனையை மேற்கொண்டு, தனது முடிவினைப் பெறுகிறார். $\mu$-க்கான, இத்தகைய சோதனைகளில் அளவையானது,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$ என்பது கீழ்க்கண்ட நிபந்தனையின் பேரில் ஒரு பாய்சான் பரவலாகிறது. அந் நிபந்தனைகளாவன: (1) $x_1$, $x_2$, $x_3 \ldots x_n$ ஒரு ராண்டம் கூறு. (2) ஒவ்வொரு $X_i$-யும் $\mu$-வைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாக அமையின், $Y$ ஒரு பாய்சான் பரவலாக, $n\,\mu$-வைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்டு அமையும்.

மேலும், நாம் கோடிட்டுக் காட்டிய எடுகோள்களிலெல்லாம் $H_0 : \mu = \mu_0$ என்பது உண்மையாயின், $Y$ என்பது சுட்டுறுப்பு $n\mu_0$ எனக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாகும். $n$-ன் மதிப்பு சோதனையின் திறத்தைப் பொறுத்து அமைக்கப்பட ஏதுவாகிறது.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$$ அல்லது,

$$H_0 : \mu > \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$$ என்ற சோதனையில்,

$Y$-ன் சிறிய மதிப்புகளே $H_1$-க்குச் சாதகமாக அமைகின்றபடியால், $H_0$ நிராகரிக்கப்பட வேண்டுமாயின், அதற்குரிய தீர்வு கட்டமான பகுதியாக $Y < y_0$ என்று பெறுகிறோம். மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha_0$ என்று கொள்ளலாம். $Y_0$ என்பது $Pr(Y = y_0) = \alpha_0$ என்பதைப் பூர்த்தி செய்யும், $Y$-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பாகும். நாம் சோதனையில் அடையும் மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha_0 = Pr\,(Y < y_0)$ ஆகும்.

இதே போன்று $H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$ அல்லது

$$H_0 : \mu < \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

என்ற சோதனையில் $Y$-ன் பெரிய மதிப்புகள் $H_1$-க்குச் சாதகமாக அமைவதால், $Y \geqslant y_0$ என்று அமையும் தீர்வு கட்டமான பகுதியில் $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. இவ்விடத்து $Y_0$ என்பது $Pr(Y \geqslant y_0) = \alpha$ என்றமைந்து $Y$-ன் சிறிய மதிப்பாகும். மிகைத்தன்மை மட்டமும் $Pr(Y \geqslant y_0) < \alpha_0$ என அமைகிறது.

முடிவாக, $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \pm \mu_1$ என்ற சோதனையில், மிகச் சிறிய மற்றும் மிகப் பெரிய $Y$-ன் மதிப்புகள் $H_0$ நிராகரிக்கப் படுவதற்குக் காரணமாக விளங்குகின்றபடியால், தீர்வு கட்டமான பகுதி, $Y \leqslant y_1$, $Y \geqslant y_2$ என்றமைகிறது. இவ்விடத்து, $y_0$ என்பது $Pr(Y \leqslant y_1) \leqslant \alpha_0/2$, என்றமைந்த $Y$-ன் பெரிய மதிப்பாகவும், $y_2$ என்பது $Pr(y \geqslant y_2) \leqslant \alpha_0/2$ என்றமைந்த $Y$-ன் சிறிய மதிப்பாகவும் விளங்குகிறது. மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha_0$ என்று குறிக்கப் பட்டாலும், உண்மையான மட்டம், $\alpha = Pr(Y \leqslant y_1) + Pr(Y \geqslant y_2)$ என்றாகிறது.

உதாரணம் : ஒருவர், அவர் ஒரு நாளில் பெறும் தொலை பேசித் தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை சராசரி 2-க்குக் குறைவாயின் தொலைபேசியை நீக்குவது என்று முடிவெடுக்கிறார். ஐந்து ராண்டம் நாள்களில், அவர் பெறும் தொடர்புகள் 0, 2, 1, 1, 1 என்றமைந்தால், தொலைபேசி எடுக்கப்படுமா? ($\alpha = 0{\cdot}05$ எனக் கொள்க.)

தீர்வு : (1) $H_0 : \mu = 2$, $H_1 : \mu < 2$, $H_0$ நிராகரிக்கப் பட்டால் தொலைபேசி எடுக்கப்பட்டுவிடும்.

(2) நாம் பெற விரும்பும் மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha_0 = 0{\cdot}05$ எனினும், நாம் அடையும் மிகைத் தன்மை மட்டம் $< 0{\cdot}05$ என்றே அமையும்.

(3) அளவை $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$, $x_i$-$i$-தினத்தில் அவர் பெறும் தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை எனில், $Y$ ஒரு பாய்சான் பரவலாகச் சுட்டுறுப்பு $5\mu_0 = 10$ எனக் கொண்டு விளங்குகிறது. ஏனெனில், (1) $x_1$, $x_2$, ... $x_5$ ராண்டம் மதிப்புகளாகும். (2) ஒவ்வொரு $\alpha_i$-ம் 2ஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாக அமைகிறது. மேலும், தொலைபேசித் தொடர்பு சம்பந்தப்பட்ட புள்ளி விவரக் குறிப்பிற்குப் பாய்சான் பரவல் ஏற்றதாகும்.

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி $Y<y_0=4$, $\alpha = Pr(Y<4)$ $=0{\cdot}02925$, $Pr(Y<5)=0{\cdot}06709$. இம் மதிப்புகள் திரன் பாய்சான் நிகழ்தகவுக் கணக்கீட்டின் மூலம் பெறப்படுகின்றன.

(5) கணக்கீடு : $Y=0+2+1+1=5$.

6. $Y=5$ என்ற தீர்வு கட்டமான பகுதியில் அமையவில்லையாதலின் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, தொலைபேசி நீக்கப்படமாட்டாது.

உதாரணம் : ஒரு 12-மாதகாலப் பகுதியில், ஒரு மருத்துவமனையில், இரட்டைக் குழந்தைகள் பிறக்கும் எண்ணிக்கை 2, 0, 1, 1, 0, 0, 3, 2, 1, 1, 0, 1. இந்த விவரமானது, சராசரி இரட்டைக் குழந்தை பிறக்கும் எண்ணிக்கை மாதத்தில் 0.5 என்றஎடுகோள் மதிப்பினின்றும் மாறுபடுகிறதா ? ($\alpha = 0{\cdot}05$ என்று கொள்க.)

தீர்வு : (1) $H_0 : \mu=0.5$, $H_1 : \mu\neq 0.5$.

(2) மிகைத்தன்மை மட்டம் 0.05 என்று குறிக்கப்பட்டிருந்தாலும், நாம் சோதனையில் அடையும் மட்டம் அதைவிடக் குறைந்ததாகும்.

3. அளவை $Y=\sum_{i=1}^{12} x_i$, $x_i$ என்பது $i$-ஆவது மாதத்தில் இரட்டைக் குழந்தைப் பிறப்புகளின் எண்ணிக்கை. $Y$ என்பது சுட்டுறுப்பு $n\mu_0=6$ எனக் கொண்ட ஒரு பாய்சான் பரவலாக அமைகிறது. நிபந்தனைகள் பூர்த்தி செய்யப்படுகின்றன.

4. தீர்வு கட்டமான பகுதி $Y<y_1=1$, $Y>y_2=12$.

எனவே, உண்மையான மிகைத் தன்மை மட்டம்

$$\alpha = P_r.(Y<1)+P_r(Y>12)$$
$$= 0.01785 + 0.02009 = 0.03744.$$

மேலும், $P_r(Y<2)=0.06157>0.025$, $P_r(Y>11)$ $=0.04262>0.025$. (இம் மதிப்புகளைக் கணக்கீடு செய்க.)

5. கணக்கீடுகள் : $Y=2+0+1+1+0+0+3+2+1+1+0+1=12$.

6. $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே, ஒரு மாதத்தில் ஏற்படும் சராசரி இரட்டைக் குழந்தைப் பிறப்புகள் 0.5-ஐக் காட்டிலும் அதிகம்.

உதாரணம் : $\mu = 1$ எனில், முதல் எடுத்துக்காட்டிற்கான சோதனையின் திறம் யாது ?

தீர்வு : திறம் $P_r\ (Y < 4)$, $\mu = 1$ என்றிருக்கையில், $Y$ என்பது சுட்டுறுப்பு $n\,\mu = 5$ எனக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாக அமைகிறது. எனவே, பாய்சான் பரவலுக்கான நிகழ்தகவு (பயோமெட்ரிகா அட்டவணைப் புத்தகத்தின் தகுந்த அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படுகிறது.

$$P_r\,(Y < 4) = P\,(4;\ 5) = 0.44049.$$

உதரணம் : $\mu = 0.75$ எனக் கொண்டு, இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டுக்கான சோதனையின் திறத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : திறம் $P_r\ (Y < 1) + P_r(Y > 12)$, $Y$ ஒரு பாய்சான் பரவலாக, சுட்டுறுப்பு $n\,\mu = 12\,(0.75) = 9$ எனக் கொண்டு அமைகிறது.

$$P_r\,(Y<1) = 0.00123, \quad P_r\,(Y > 12) = 0.19699.$$

எனவே, திறம் $= 0.00123 + 0.19699 = 0.19822$

$\mu$-க்கான ஒரு புள்ளி மதிப்பீடு,

$$\hat{\mu} = \Sigma\,\alpha_1/n = \frac{y}{n} = \bar{x}.$$

$\bar{x}_1$ $\mu$-க்கான மதிப்பீடாக அமைந்து, வேறு எந்த மதிப்பீட்டையும்விடக் குறைந்த மாறுபாடு கொண்டதாகவும் விளங்குகிறது.

$\mu$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி பொருத்தமான $\chi^2$ அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படலாம். எண்கள் $\mu_l$, $\mu_u$ என்று குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

$P_r\,(\mu_l < \mu > \mu_u) = 1 - \alpha$ என அமைகிறது.

$$\mu_l = \frac{\chi^2\ 2\,Y_l\,\frac{\alpha}{2}}{2n} = \frac{y}{n}\,\frac{\chi^2\ 2\,y_l\,\frac{\alpha}{2}}{2Y}, \mu_u = \frac{\chi^2\ 2y+2,\ 1-\frac{\alpha}{2}}{2n}$$

உதாரணம் : நம்பிக்கைக் கெழு 0·95 எனக் கொண்டு, $\mu$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை, இரட்டைக் குழந்தைப் பிறப்புப் புள்ளி விவரத்திற்கு அமைக்கவும்.

தீர்வு : $Y=12,\ n=12,\ \alpha=0.05,\ \frac{\alpha}{2}=0{\cdot}025$

$\chi^2_{24,0\cdot025} = 12.40,\quad \chi^2_{26,0\cdot975} = 41.92.$ [பயோமெட்ரிகா அட்டவணைப் புத்தகம் மூலம்]

$$\mu_V = \frac{41.92}{2(12)} = 0.52,\ \mu$$

எனவே, [0.52, 1.75] என்பது நம்பிக்கை இடைவெளியாகும்.

இந்த இடைவெளியானது, நிராகரிக்கப்பட்ட $\mu$-ன் மதிப்பு $H_0 : \mu = 0.50$ என்பதை உள்ளடக்கவில்லை. எனவே, $[\mu_L, \mu_u]$ என்ற இடைவெளி $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ என்ற சோதனையில், $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படும் போதே, எடுகோள் மதிப்பு $\mu_0$ஐ உள்ளடக்கியிருக்கும். ஆனால், மிகைத் தன்மை மட்டமும் ($\alpha$) இடைவெளிக்கான நம்பிக்கைக் கெழுவும் ஒரே அளவில் அமைய வேண்டும். அதாவது, $\alpha$-ன் மதிப்பு சமமாக இருக்க வேண்டும்.

### பயிற்சிகள்

1. ஒரு கண்காணிப்பாளர், ஒரு பதவிக்குத் தட்டெழுத்துப் பயின்றவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, ஒருவர் ஒரு பக்கத்திற்குச் சராசரியாக ஒரு தட்டெழுத்துப் பிழைக்கு மேல் செய்யவில்லையானால், அவரைத் தேர்ந்தெடுப்பது என்று முடிவு செய்கிறார். 5 பக்கங்களில் பதவி விண்ணப்பம் செய்தவர் செய்யும் பிழைகள் 3,3,4,1,2 என அமைகின்றன. $\alpha = 0.05$ எனக் கொண்டு, கண்காணிப்பாளர் என்ன முடிவு செய்ய வேண்டும் என்று குறிப்பிடுக.

2. மேற்குறிப்பிட்ட விவரத்திற்கு $\mu=1.6$ எனக் கொண்டு சோதனையின் திறத்தைக் காண்க.

3. நம்பிக்கைக் கெழு 0.85 எனக் கொண்டு சராசரியாக ஒரு பக்கத்திற்கு அவர் செய்யும் பிழைகளுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

4. சராசரியாக 2 பிழைகள் செய்யும் ஓர் ஆட்டக்காரர், சுடுதல் போட்டியின் இறுதி ஆட்டத்தில் தகுதி பெறுகிறார். அவர் முன்பு பங்கு பெற்ற பல போட்டிகளின் தொகுதியிலிருந்து 4 ஆட்டங்களில் மொத்தமாக 5 பிழைகளைச் செய்திருப்பது அறியப்பட்டால், அதர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவாரா ?

5. மேற்கண்ட சுடுதல் போட்டி எடுத்துக்காட்டில், பிழைகள் சராசரியாக 2.5 இருப்பினும் தேர்ச்சி பெறுவார் எனக் கொண்டு, சோதனையின் திறம் யாது என்று கண்டறிக

6. நம்பிக்கைக் கெழு 0.90 எனக் கொண்டு, சராசரியாக ஒருவன் செய்யும் பிழைகளுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை, 4-ஆவது பிரச்சினைக்கு அமைக்கவும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சுட்டுறுப்பு $P$, பாய்சான் பரவலின் சுட்டுறுப்பு $\mu$ இவற்றிற்கான மாதிரி அளவு பெரிதாக அமைகையில் வரைமுறைகள்

$n > 1000$ என்றமையும்போது, அட்டவணைகள் எவ்விதப் பயனுமின்றி அமைகின்றன. அந்நிலையில் அளவை,

$$Z' = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{x - nP_0}{\sqrt{nP_0(1-P_0)}},$$

என்பது, நாம் முன்பு குறிப்பிட்டுக் காட்டிய எடுகோள்கள் அனைத்தையும் சோதிக்க உதவுகிறது. நடு எல்லைத் தேற்றத்தின் விளைவாக, $Z'$ என்ற ராண்டம் மாறி, தோராயமாக நிலைத்த இயல் நிலைப் பரவலைப் பெறுகிறது. இவ்விடத்து $x$ என்பது ஈருறுப்புப் பரவலைப் பெறுகிறது என்பதும், $n$-பெரியதாக அமைந்த மதிப்பும் என்பதும் நாம் அறிந்ததே.

$H_0 : P = P_0 \; H_1 : P < P_0$ என்ற சோதனையில், தீர்வு கட்டமான பகுதி நிலைத்த இயல்நிலைப் பரவலின் இடது பக்கத்திலும்,

அதாவது $\frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} < Z_\alpha$ என்ற வகையிலும்,

$H_0 : P = P_0 \; H_1 : P > P_0$ என்ற சோதனையில், தீர்வு கட்டமான பகுதி, $Z' > Z_{1-\alpha}$ என்கின்ற வகையிலும்,

$H_0 : P = P_0 \; H_1 : P \neq P_0$ என்ற சோதனையில், தீர்வு கட்டமான பகுதி $Z' < Z_{\frac{\alpha}{2}}$, $Z' > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ என்றும் அமைகின்றன. மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$ என்று பெறப்படும் தீர்வு கட்டமான பகுதி மாறி மாறி அமைவதற்கான காரணம் பன்முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

**உதாரணம்** : 2500 திருகாணிகள் கொண்ட ஒரு கூறில் 277 பயனற்றவை எனில், $H_0 : p < 0{\cdot}10$, $H_1 : p > 0{\cdot}10$ என்ற சோதனையை, $\alpha = 0{\cdot}05$ என்ற மட்டத்தில் மேற்கொள்ளுக.

**தீர்வு :**

1. $H_0 : P < 0{\cdot}10$, $H_1 : P > 0{\cdot}10$ என்பது எடுகோளாகும்.

2. மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha = 0{\cdot}05$ என்று குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

(3) $Z^1 = \dfrac{x - nP_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$ என்பதாகும். மேலும் $n = 250$, $x$ ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல் ஆதலின், $Z^{1'}$ ஓர் நிலைத்த இயல்நிலைப் பரலாக அமைகிறது.

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி : $\dfrac{x - (2500)(0{\cdot}10)}{\sqrt{2500 \times 0{\cdot}10 \times 0{\cdot}90}} > 1.645$

(5) கணக்கீடு : $x = 277$ ஆதலின்,

$$Z = \frac{277 - 2500\,(0{\cdot}10)}{\sqrt{2500 \times 0{\cdot}10 \times 0{\cdot}90}} = \frac{27}{15} = 1{\cdot}8.$$

(6) கணக்கிடப்பட்ட $Z'$-ன் மதிப்பு தீர்வு கட்டமான பகுதியில் அமைவதால் எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகிறது.

**திறன் கணக்கீடுகள்** : மாதிரி அளவு '$n$' மிகப் பெரிதாக அமையும்போது சோதனையின் திறர், சிறிய, எளிய கணக்கீடுகளைக் கொண்டு பெற ஏதுவாகிறது. தீர்வு கட்டமான பகுதி, $Z' < Z_{\alpha}$ என்றும் $Z' < Z_{1-\alpha}$ என்றும் அமையும் சோதனைக்கட்கு திறம்.

$$P_r \left( z < \frac{Z_{\alpha}\sqrt{P_0(1-P_0)} + \sqrt{n}\,|P^0 - P_1|}{\sqrt{P_1(1-P_1)}} \right)$$

என்றமைகிறது. $P_1$ என்பது மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$-ல் குறிக்கப்படும் $P$-ன் மதிப்பாகிறது.

அதாவது, $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p < p_0$ என்ற சோதனையில் தீர்வுகட்டப் பகுதி நிலைத்த இயல்நிலைப் பரவலின் இடது பக்கத்தில் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$$\text{அதாவது,}\quad \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} < Z_{\alpha}$$

$H_0 : p = p_0$, $H_1 : p > p_0$ என்ற சோதனையில் தீர்வு கட்டப் பகுதி நிலைத்த இயல்நிலைப் பரவலின் வலதுபக்கத்தில் கீழ்க் கண்டவாறு அமைகிறது.

$$\text{அதாவது,}\quad \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} > Z_{1-\alpha}$$

$H_1$-ன் கீழ் $p = p_1$ என்ற மதிப்பில், இந்த இரண்டு சமனிலி களால் குறிக்கப்பட்ட தீர்வுகட்டப் பகுதிகளின் சோதனைகளுக் கான திறம் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

அதாவது, திறம்

$$P_r\;\left(Z < \frac{Z_{\alpha}\sqrt{p_0\,(1-p_0)} + \sqrt{n}\,|\,p_0 - p_1\,|}{\sqrt{p_1\,(1-p_1)}}\right).$$

$H : P = P_0$, $H_1 : P \pm P_0$ என்ற சோதனையில், தீர்வு கட்ட மான பகுதி $Z' < Z_{\frac{\alpha}{2}}$, $Z' > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ என்றும் அமைக்கப் படுகையிலும் திறத்தின் மப்திபை, மேற் காட்டப்பட்ட நிகழ் தகவிலிருந்தே, $Z_{\alpha}$ வை $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ என்று மாற்றிப் பெறலாம்.

$(1 - \beta)$ என்பது தேவைப்படும் திறமாயின், $P_1$-ன் மதிப்பு $H_1$ ஆல் குறிக்கப்படும் $P$-ன் மதிப்பு எனில்,

$$n > \left[\frac{Z_{\alpha}\sqrt{P_0\,(1-P_0)} + Z_{\beta}\sqrt{P_1\,(1-P_1)}}{P_0 - P_1}\right]$$

என்பது நன்மதிப்பாகும்.

உதாரணம் : $p = 0.12$ எனக் கொண்டு, முதல் எடுத்துக் காட்டிற்கான சோதனையின் திறத்தைக் கண்டறிக.

தீர்வு ; எடுகோள், மாறெதிரான, எடுகோளும், $H_0 : p=p_0$ $H_1 : p>p_0$ என்பதன் சிறப்பு வகையாக அமைகின்றன. இதனால் தீர்வு கட்டமான பகுதி $Z' > Z_{1-\alpha}$ என்று அமைகிறது.

$\alpha = 0.05,\ n=2500,\ p_0=0.10,\ p_1=0.12$

திறம்

$$= P_r\left(Z<\frac{-1.645\sqrt{0.10\times 0.90}+\sqrt{2500}\,|\,0.10-0.12\,|}{\sqrt{(0.12)(0.88)}}\right)$$

$$= P_r\,(Z < 1{\cdot}56)$$

$$= 0{\cdot}94.$$

உதாரணம் : $p = 0{\cdot}12$ என்றமையும் போது, சோதனையின் திறம் $0{\cdot}90$ என அமைய வேண்டுமாயின், மேற்கண்ட பிரச்சினைக்குத் தேவையான $n$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $\alpha = 0{\cdot}05,\ \beta = 0{\cdot}10,\ P_0 = 0{\cdot}10,\ P_1 = 0{\cdot}12,$

$$n > \left(\frac{-1{\cdot}645\sqrt{(0{\cdot}10)(0{\cdot}90)}-1{\cdot}282\sqrt{(0{\cdot}12)(0{\cdot}88)}}{(0{\cdot}10-0{\cdot}12)}\right)^2$$

$$n > (45{\cdot}5)^2$$

$$> 2070$$

நம்பிக்கை இடைவெளிகள் : $n$-ன் மதிப்பு பெரியதாக அமையும்போது, $p$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

$$P_r\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

$P$-யைச் சமமின்மையின் நடுவில் அமைக்க, $p$-ல் இரண்டாம் படியில் அமைந்த சமமின்மை தீர்க்கப்பட வேண்டியுள்ளது. சிறிய உறுப்புகளை நிராகரிக்கும் போது,

$$P_r\left(\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{2}}\right.$$

$$\left.< p < \hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{2}}\right) = 1-\alpha$$ என்றமைகிறது.

உதாரணம்: நம்பிக்கைக் கெழு 0·95 எனக்கொண்டு $p$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை,

$$n = 2500, \quad \hat{p} = 277/_{2500}, \quad \alpha = 0{\cdot}05$$

என்ற விவரத்திற்கு அமைக்கவும்.

தீர்வு: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{\cdot}96\,; \quad \hat{p} = 0{\cdot}1108.$

நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= \left(0{\cdot}1108 - 1{\cdot}96\sqrt{\frac{(0{\cdot}1108)\,(0{\cdot}8892)}{2500}}\,,\right.$$

$$\left. 0{\cdot}1108 + 1{\cdot}96\sqrt{\frac{(0{\cdot}1108)\,(0{\cdot}8892)}{2500}}\right)$$

$$= (0{\cdot}1108 - 0{\cdot}012, \quad 0.018 + 0.012)$$

$$= (0.099, 0.123)$$

பாய்சான் பரவலுக்கான சுட்டுறுப்பு $\mu$-பற்றிய சோதனை:

$n$-ன் மதிப்பு பெரிதாக அமையும்போது, பாய்சான் சுட்டுறுப்பு $\mu$-விற்கான உய்த்துணர்வுகள் ஈருறுப்புப் பரவலைப் போன்றே இயல் நிலைத் தன்மையை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைகிறது.

$n\mu > 100$ என்றிருக்கையில்,

$$Z' = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sqrt{\mu_0 / n}} = \frac{Y - n\mu_0}{\sqrt{n\mu_0}}$$

என்ற அளவை எடுகோளைப் பற்றிய சோதனைகட்கு ஏற்றதாகிறது. $Y$ என்பது $\sum\limits_i x_i$ என்றமைகிறது. நடு எல்லைத் தேற்றத்தின் பயனாய், $Z'$ என்ற அளவை தோராயமாக நிலைத்த இயல் நிலைப் பரவலைப் பெறுகிறது. இதற்கு முன்னேடியாக, $x_1, x_2 \ldots x_n$ இவை ராண்டமாகப் பெறப்பட்டதாகவும், ஒவ்வொன்றும் சுட்டுறுப்பு $\mu_0$ எனக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாகவும் அமைதல் வேண்டும். தீர்வு கட்டமான பகுதிகள், $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ என்ற சோதனையில் $Z' < Z_\alpha$ எனவும், $H_0 ; \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$

என்ற சோதனையில் $Z' > Z_{1-\alpha}$ எனவும், $H_0 : \mu \neq \mu_0$ என்ற சோதனையில் $Z' < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z' > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ எனவும் அமைகின்றன.

சோதனையின் திறம்

$$= P_r\left(Z < \frac{Z_{\alpha} \sqrt{\mu_0} + \sqrt{n} \mid \mu_0 - \mu_1 \mid}{\sqrt{\mu_1}}\right) \text{ எனவும்,}$$

தேவையான திறம் $(1-\beta)$ என்பதை அடைவதற்குத் தேவையான $n$-ன் மதிப்பு,

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha} \sqrt{\mu_0} + Z_{\beta} \sqrt{\mu_1}}{(\mu_0 - \mu_1)}\right)^2 \text{ எனவும்}$$

$\mu$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி,

$$P_r\left[\hat{\mu} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\mu}}{n}} < \mu < \hat{\mu} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\mu}}{n}}\right] = 1 - \alpha,$$

என்றும் அமைகின்றன. ஈருறுப்புப் பரவலைப் பற்றிய, $n$-ன் மதிப்பு பெரிதாக அமைந்த நிலையில், எவ்வித உண்மையும் இதற்கும் பொருந்துகிறது.

உதாரணம் : $H_0 : \mu = 2, H_1 : \mu < 2$, $n=200$, $Y=364$ எனில், இச் சோதனைக்குத் தேவையான தீர்வு கட்டமான பகுதியையும், தகுந்த முடிவையும் விளக்குக. $\mu = 1 \cdot 8$ எனக் கொண்டால், சோதனையின் திறம் 0·95 என்று உயர்த்தப்பட, $n$-ன் மதிப்பு எவ்வாறு அமைய வேண்டும் ?

தீர்வு : தீர்வு கட்டமான பகுதி $Z' < Z_{\alpha}$ என்று அமைய வேண்டும். எனவே, $\frac{Y-400}{\sqrt{400}} < -1 \cdot 645$ என்பது தீர்வு கட்டமான பகுதியாகும். $Y=364$ ஆதலின், $Z' = (364-400)/_{20}$ $= -1 \cdot 8 < -1 \cdot 645$. எனவே, எடுகோள் $H_0 : \mu = 2$ நிராகரிக்கப்படுகிறது.

திறம் 0·95 என்றடைய, $\mu = 1 \cdot 8$ எனில்,

$$n > \left[\frac{-1 \cdot 645 \sqrt{2} - 1 \cdot 645 \sqrt{1 \cdot 8}}{2 - 1 \cdot 8}\right] \simeq 518.$$

## பயிற்சிகள்

(1) ஒரு விவசாயி தன்னிடமுள்ள திறம் 90% முளைக்கும் திறம் கொண்டது என்று அறிகிறார். 1600 விதைகளை நட்ட போது 184 முளைக்கவில்லை. பொருத்தமான எடுகோளை, $\alpha = 0{\cdot}05$ என்ற மட்டத்தில் சோதனையிடுக.

(2) மேற்கண்ட பிரச்சினைக்கு $P = 0{\cdot}88$ எனக் கொண்டு சோதனையின் திறத்தைக் கண்டறிக. திறம் 0.90 என உயர்த்தப்பட வேண்டுமாயின் $n$-ன் மதிப்பு எவ்வளவாக அமைய வேண்டும் ?

(3) நம்பிக்கைக்கெழு $0{\cdot}90$ எனக் கொண்டு, $p$-ன் மதிப்புக்கான நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க. ($p = 0.90$ என்று கொள்க.)

(4) ஓர் ஆய்வாளர். ஒரு பறவை இனத்தின் 25% பறவைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட குணப்பண்பு உடையவை என்று கண்டறிகிறார் 1200 பறவைகளைக் கொண்ட ராண்டம் மாதிரியில் 224 அக் குணப் பண்பைப் பெற்றிருந்தன. $\alpha = 0{\cdot}05$ எனக் கொண்டு, தகுந்த சோதனையின்மூலம் அவரது கூற்று உண்மையா அல்லவா என்று கண்டறிக.

(5) பறவை இனத்தில் 23% பறவை அக் குணப் பண்பைக் கொண்டிருந்தால், சோதனையின் திறம் யாது ?

(6) நம்பிக்கைக்கெழு $0{\cdot}95$ எனக் கொண்டு, $p$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்கவும்.

(7) ஒரு கண்காணிப்பாளர், தனது செயலராக நியமிக்க விரும்பும் ஒருவர், தட்டெழுத்தில், பக்கத்திற்குச் சராசரியாக 1 பிழைக்குமேல் செல்லக்கூடாது என்று எண்ணுகிறார். 1 பிழைக்குமேல் அமைந்தால், அச் செயலரை நீக்க எண்ணுகிறார். அச் செயலரின் 225 பக்கங்களில், 252 தட்டெழுத்துப் பிழைகள் காணப்பட்டால், அவர் நீக்கப்படுவாரா ? ($\alpha = 0{\cdot}05$ என்று கொள்க.)

(8) $\mu = 1{\cdot}21$ என்று கொண்டால், பிரச்சினை 7-க்கான சோனையின் திறன் யாது ? இத் திறம் $0{\cdot}95$ என்று உயர்த்தப் படவேண்டின், $n$-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

(9) $\mu$-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை, நம்பிக்கைக் கெழு 0·95 என்று கொண்டு அமைக்க.

## தனித் தன்மைக்கும், ஓரினத் தன்மைக்குமான கைவர்க்கச் சோதனைகள் ($\chi^2$ test of Independencc and Homogeneity)

சில சமூக பொருளாதாரப் புள்ளி விவரக் குறிப்புகளை இரண்டு குண நலப் பண்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, பிரித்து அமைக்க முடிகிறது. இப் பண்புகளின் தன்மை பற்றிய எடுகோள்களைச் சோதிக்க, தோராயமான கைவர்க்கச் சோதனைகள் பயன் படுகின்றன. இப்படிப்பட்ட இரண்டு வகைச் சோதனைகளை நாம் இங்குக் காண்போம்.

இரண்டு பண்பு குண நலன்களைச் சோதிக்கையில், அவை இரண்டும் தனித்தனவா அல்லது ஒன்றுடன் மற்றொன்று சார்ந்து விளங்குகின்றதா என்பதை அறிதல் நமது முக்கியமான சோதனையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, 200 நாடுகள், அந் நாடுகளில் இருக்கும். நாரைகளின் எண்ணிக்கை, அவற்றின் பிறப்பு விகிதம் ஆகிய இரு பண்புகளைக் கொண்டு வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. என்று கொள்வோம். இதற்கான அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

| | நாரைகளின் எண்ணிக்கை | | |
|---|---|---|---|
| பிறப்பு விகிதம் | குறைவு | அதிகம் | மொத்தம் |
| குறைவு | 42 | 10 | 52 |
| அதிகம் | 130 | 18 | 148 |
| மொத்தம் | 172 | 28 | 200 |

இதற்கான பொருத்தமான எடுகோளானது,

$H_0$ : பிறப்பு விகிதம், நாரைகளின் எண்ணிக்கையும் ஒன்றிற்கொன்று தொடர்பற்றவை. மாறெதிரான எடுகோள்,

$H_1$ : பிறப்பு விகிதம், நாரைகளின் எண்ணிக்கையும் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புள்ளவை.

இப்பொழுது,

$P_{11}$ = ஒரு நாடு குறைந்த பிறப்பு விகிதமும், குறைந்த நாரைகளின் எண்ணிக்கையும் உடையதாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு;

$P_{12}$= குறைந்த பிறப்பு விகிதமும், அதிக நாரைகளின் எண்ணிக்கையும் அமைவதற்கான நிகழ் தகவு;

$P_{21}$= அதிகப் பிறப்பு விகிதமும், குறைந்த நாரைகளின் எண்ணிக்கையும் உடையதாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு ;

$P_{22}$= அதிக பிறப்பு விகிதமும், அதிக நாரைகளின் எண்ணிக்கையும் உடையதாயிருப்பதற்கான நிகழ் தகவு;

$P_{1\cdot} = P_{11} + P_{12}$ = ஒரு நாடு குறைந்த பிறப்பு விகிதத்தை உடையதாயிருப்பதற்கான நிகழ் தகவு;

$P_{2\cdot} = P_{21} + P_{22}$= ஒரு நாடு அதிகப் பிறப்பு விகிதத்தை உடையதாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு;

$P_{\cdot 1} = P_{11} + P_{12}$ = ஒரு நாடு குறைந்த நாரைகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு;

$P_{\cdot 2} = P_{12} + P_{22}$ = ஒரு நாடு அதிக நாரைகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு; என்றமைத்தால்,

$H_0: P_{11} = P_{1\cdot}P_{\cdot 1}, P_{12} = P_{1\cdot}P_{\cdot 2}, P_{21} = P_{2\cdot}P_{\cdot 1}, P_{22} = P_{2\cdot}P_{\cdot 2}$

$H_1: H_0$-க்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் தவறுனவை என்றும் அமைகிறது.

அட்டவணையின் ஒவ்வொரு கட்டமும் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகள் $nP_{11}, nP_{12}, nP_{21}, nP_{22}$, என அமைகின்றன. $n$ என்பது மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையாகும். $n = 200$ என இவ்விடத்தில் அமைகிறது. நமது எடுகோளின்படி, எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகள் $nP_{1\cdot} P_{\cdot 1}$, $nP_{1\cdot}P_{\cdot 2}$, $nP_{2\cdot} P_{\cdot 1}$, $nP_{2\cdot}P_{\cdot 2}$ என அமைகின்றன. ஆனால், $P$-க்களின் மதிப்பு தெரியாத நிலையில், நமது அட்டவணையிலிருந்து, $P$-க்களை மதிப்பீடு செய்ய இயலும். குறைந்த பிறப்பு-விகிதத்தின் நிகழ் தகவு $P_1$-க்கான மதிப்பீடு, மாதிரியில் உள்ள குறைந்த பிறப்பு-விகிதம் கொண்ட நாடுகளின் விகிதமாகும்.

எனவே, $\hat{p}_{1\cdot} = 52/200$. இதே போன்று $\hat{p}_2 = 148/200$,

$\hat{p}_{\cdot 1} = 172/200$, $\hat{P}_{\cdot 2} = 28/200$

எனவே, எதிர்பாக்கும் மதிப்புகளின் மதிப்பீடுகள் :

$$n\hat{P}_{1\cdot}\, \hat{p}_{\cdot 1} = 200.52/100.\ \ 172/200 = \frac{(52)(171)}{200}$$
$$= 44.72.$$

$$n\hat{p}_{1}\cdot\hat{p}_{2}=200\cdot 52/_{200}\cdot 28/_{200}=\frac{(52)(28)}{200}=7\ 28.$$

$$n\hat{p}_{2}\cdot\hat{p}_{\cdot 1}=200\times 148/_{200}\ 172/_{200}=(148)(172)/_{200}=127\cdot 28$$

$$n\hat{p}_{2}\cdot\hat{p}_{\cdot 2}=200\ 148/_{200}\cdot 28/_{200}=(148)(28)/_{200}=20\ 72$$

$H_0$ஐச் சோதிக்கப் பயன்படும் அளவை,

$$\chi^2=\frac{(42-44\cdot 72)^2}{44\cdot 72}+\frac{(10-7\cdot 28)^2}{7\cdot 28}+\frac{(180-127\cdot 28)^2}{20\cdot 72}+\frac{(18-20\cdot 72)^2}{127\cdot 28}$$

$$=0\ 17+1\cdot 02+0\cdot 06+0\cdot 36$$

$$=1\cdot 61.$$

இந்த அளவையானது, $\chi^2{}_{1,\,1-\alpha}$ மதிப்பைக் காட்டிலும் (கைவர்க்கப் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து) பெரிதாக இருக்கு மாயின், $H_0$ஐ மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$-ல் நிராகரிக்கிறோம். இச் சோதனை கீழ்க்கண்ட வாறு பொதுப்படுத்தப்படும்.

குணப்பண்பு $A_1$ $r$ பிரிவுகளாகவும், குணப்பண்பு $B$ $C$ பிரிவுகளாகவும் அமைகிறது என்று கொள்வோம். ஒரு சோதனையானது $n$ முறைகள் நடைபெறுகிறது என்றும், முடிவுகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையின்படி அமைகின்றன என்றும் கொள்க.

| குணப்பண்பு $A$ | குணப்பண்பு $B$ 1 | 2 | 3 | | $j$ | | $c$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | ... | $X_{1j}$ | ... | $X_{1c}$ | $T_1$ |
| 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{23}$ | ... | $X_{2j}$ | ... | $X_{2c}$ | $T_2$ |
| 3 | $X_{31}$ | $X_{32}$ | $X_{33}$ | ... | $X_{3j}$ | ... | $X_{3c}$ | $T_3$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $i$ | $X_{i1}$ | $X_{i2}$ | $X_{i3}$ | ... | $X_{ij}$ | ... | $X_{ic}$ | $T_i$ |
| ... | ... | .. | . | ... | ... | ... | ... | ... |
| $r$ | $X_{r1}$ | $X_{r2}$ | $X_{r3}$ | ... | $X_{rj}$ | ... | $X_{rc}$ | $T_r$ |
| மொத்தம் | $T_{\cdot 1}$ | $T_{\cdot 2}$ | $T_{\cdot 3}$ | | $T_{\cdot j}$ | | $T_{\cdot c}$ | $T_{\cdot\cdot}=n$ |

$X_{ij}$ என்பது $A$-யின் $i^{th}$ பிரிவிலும், $B$யின் $j$ பிரிவிலும் சேருமையும் பொருள்களின் எண்ணிக்கை என்று கொள்க. $P_{ij}$ என்பது ஒரு பொருள் $A$-யின் $i^{th}$ பிரிவு, $B$-யின் $j^{th}$ பிரிவில் விழு

வதற்கான நிகழ்தகவு, $P_i$ என்பது $A$-யின் $i$-ஆவது பிரிவில் விழு வதற்கான நிகழ்தகவு, $P_{ij}$, $B$-யின் $j$-ஆவது பிரிவில் அமைவ தற்கான நிகழ்தகவு என்பது பெறப்படும்.

பின்னர், $H_0 : P_{ij} = P_i . P_{.j}$, $i = 1, 2 \ldots r$, $j = 1, 2 \ldots c$ என்றும்

$H_1 : H_0$-ன் கீழமைந்த சமன்பாடுகள் உண்மை யானவை அல்ல என்றும் பொதுப்படுத்தப்படுகிறது.

$$\chi'^2_{(r-1)(C-1)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(x_{ij} - n\,\hat{p}_{i.}\,\hat{p}_{.j})^2}{n\,P_{i.}\,p_{.j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left[x_{ij} - \dfrac{T_{i.}\,T_{.j}}{n}\right]^2}{T_{i.}\,T_{.j}/n}$$

இந்த அளவையானது தோராயமாக ஒரு கைவர்க்கப் பரவ லாக $\chi^2_{(r-1)(C-1)}$ என அமைய, $H_0$ உண்மையாயிருக்க வேண்டி யுள்ளது. எனவே, மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனக் கொண் டால் $\chi'^2_{(r-1)(c-1)} > \chi^2_{(r-1)(c-1);\ (1-\alpha)}$ என்றமைந்தால், $H_0$ நிராரிக்கப்படுகிறது.

உதாரணம் : பிறப்பு விகிதம், நாரைகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய அட்வணைக்கான, தனித்தன்மைக்கான கைவக்கச் சோதனையை விளக்குக.

தீர்வு : 1. எடுகோள், மாறெதிராக எடுகோள் முன்பே அளிக்கப்பட்டன.

2. $\alpha = 0\ 05$ எனக் கொள்க.

3. அளவை

$$\chi'^2_{(r-1)(C-1)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(x_{ij} - n\,\hat{p}_{i.}\,\hat{p}_{.j})^2}{n\hat{p}_{i.}\,\hat{p}_{.j}}, \quad r = 2,\ c = 2.$$

என்பது, $H_0$ உண்மை எனக் கொண்டால், ஒரு கைவர்க்கப் பரவ லாக அமைகிறது.

4. எனவே, தீர்வு கட்டமான பகுதி $\chi'^2_{(2-1)\times(2-1)} > \chi^2_{1, 0.95} = 3.84$.

5. ஆனால் $\chi_1'^2 = 1.61$ (கணக்கிடப்பட்டது),

6. கணக்கிடப்பட்ட $\chi'_1$-ன் மதிப்பு $1.61 < 3.84$ ஆதலின் $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, பிறப்பு விகிதத்திற்கும் நாரைகளின் எண்ணிக்கைக்கும் சம்பந்தமில்லை. அவை தனித்தன.

ஓரினத் தன்மைக்கான கைவர்க்கச் சோதனை ($\chi^2$ test for Homogeneity) : இச் சோதனையானது, தனித் தன்மைக்கான, கைவர்க்கச் சோதனையை ஒத்தது. எடுகோள் மாறுபட்டாலும், பயன்படுத்தப்படும் அளவை ஒன்றேயாகும். ஓரினத்தன்மையின் சிறப்பை விளக்கக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டு, பயன்படுகிறது. ஒரு பல்கலைக் கழகத்தில் பயிலும் மாணவர் குழுக்களிலிருந்து மூன்று மாதிரிகள் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. முதல் மாதிரி, 300 பட்ட இறுதிநிலை மாணவர்களையும், இரண்டாம் மாதிரி 200 பட்ட இரண்டாம் ஆண்டு மாணவர்களையும், மூன்றும் மாதிரி 100 பட்ட முதலாண்டு மாணர்களையும் உடையதாயிருக்கின்றது. பிறகு ஒவ்வொரு மாணவனிடமும் கீழ்க்கண்ட மூன்று பிரிவுகளிலிருந்து ஒன்றினை அவரது உணர்ச்சிக்குத் தக்கவாறு, தெரிந்தெடுக்கப்படும்படி, வேண்டப்படுகிறது. அப்பிரிவுகளாவன: (1) பேராசிரியர் மாணவர்களிடமிருந்து அதிக உழைப்பை எதிர்பார்க்கிறார் (2) தேவையான உழைப்பை எதிர்பார்ப்பதில்லை. (3) எவ்வளவு தேவையோ அவ்வளவு உழைப்பை எதிர்பார்க்கின்றனர். இதன் முடிவுகள் கீழ்க்கண்ட வாறு அளிக்கப்படுகின்றன.

| கல்விப் பிரிவு | எண்ணம்<br>அதிக உழைப்பு | குறைவான உழைப்பு | எவ்வளவு தேவையோ அவ்வளவு | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|
| இறுதிநிலை | 182 | 85 | 33 | 300 |
| இரண்டாம் ஆண்டு | 68 | 60 | 72 | 200 |
| முதலாண்டு | 32 | 53 | 15 | 100 |
| மொத்தம் | 282 | 198 | 120 | 600 |

இதற்கான எடுகோள் (பொருத்தமான) ஒவ்வோர் எண்ணப் பிரிவிலும் அமையும் மாணவர்களின் விகிதம், அவர்களது கல்விப் பிரிவு எத்தகையதாயினும், சமமானதாகவே உள்ளது, என்ப

தாகும். அதாவது, மூன்று கல்விப் பிரிவுகளும், எண்ணப் பிரிவுகளைப் பொறுத்த மட்டில், ஓரினத் தன்மை பெற்று விளங்குகிறது என்பதாகும். எனவே, ஓரினத் தன்மை பற்றிய எடுகோள் $H_0 : P_{11} = P_{21} = P_{31}$; $P_{12} = P_{22} = P_{32}$; $P_{13} = P_{23} = P_{33}$

$H_1$ : மேற்குறிப்பிட்ட சமன்பாடுகள் உண்மையல்ல என அமைகிறது.

இந்த எடுகோளைச் சோதிக்க, கைவர்க்கச் சோதனையைக் கொள்கிறோம். அதாவது, ஒவ்வொரு கட்டத்திற்கும், அனுசரித்த மதிப்பிற்கும், எதிர்பார்க்கும் மதிப்பிற்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தை, எதிர்பார்க்கும் மதிப்பினுல் வகுத்து, பின்னர் எல்லா கட்டத்துக்குமான இவ்வகை மதிப்புகளைக் கூட்டுகிறோம். எனவே, இச் சோதனையைப் பயன்படுத்த வேண்டுமாயின், எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகள் 'மதிப்பீடு' செய்யப்படவேண்டும். எடுகோள் உண்மையாயின், 'அதிக உழைப்பு; 'குறைவான உழைப்பு' ''எவ்வளவு தேவையோ அவ்வளவு உழைப்பு' என்னும் எண்ணப் பிரிவுகளின் விகிதம் 282/600 198/600, 120/600. எனவே, 300 இறுதிநிலை மாணவர்களில் 'கடின உழைப்பு'ப் பிரிவில் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை $= 300 \times 282/600 = 141$.

எதிர்பார்க்கும் 'குறைவான உழைப்பு' என்ற எண்ணம் உடையோர் $= 300 \times 198/600 = 99$.

சரியென்ற எண்ணம் கொண்ட எதிர்பார்க்கும் மாணவர் $= 300 \times 120/600 = 60$.

இதே போன்று, இரண்டாவது ஆண்டு மற்றும் முதலாண்டு மாணவர்கட்கும், எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்ய முடியும். எனவே, அளவையைக் காணக்கிற ஏதுவாகிறது. மேலும், இவ்வளவை, தோராயமாகக் கைவர்க்கப் பரவலாக $(r-1)(c-1)$ என்ற பாகைகளுடன் அமையவேண்டுமாயின், $H_0$ உண்மையாக இருக்கவேண்டும். அளவையின் மதிப்பு பெரிதாக அமையுமாயின், $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது.

உதாரணம் : பட்டியலில் கண்ட ஓரினப் பிரச்சினைக்குரிய தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு: (1) எடுகோளும் மாறெதிரான எடுகோளும் அளிக்கப்பட்டுள்ளன.

(2) $\alpha = 0{\cdot}05$ என்று கொள்க.

(3) அளவை, $\chi'^2_{(r-1)(c-1)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(x_{ij} - \frac{T_{i\cdot}\, T_{\cdot j}}{n}\right)^2}{(T_{i\cdot}\, T_{j}/n)}$

$r = c = 3.$

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி $\chi'^2_4 > \chi^2_{4,\,\cdot 095} = 9{\cdot}49$; இது கைவர்க்கப் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படுகிறது.

5. கணக்கீடு: எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் "மதிப்பீடு".

$$E(182) = \frac{(282)(300)}{600} = 141; \quad E(85) = \frac{198 \times 300}{600} = 99;$$

$$E(68) = \frac{(282)(200)}{600} = 94; \quad E(60) = \frac{198 \times 200}{600} = 66;$$

$$E(32) = \frac{(282)(100)}{600} = 47; \quad E(53) = \frac{198 \times 100}{600} = 33;$$

$$E(33) = \frac{120 \times 300}{600} = 60; \quad E(72) = \frac{120 \times 200}{600} = 40;$$

$$E(15) = \frac{120 \times 100}{600} = 20.$$

எனவே,

$$\chi_4'^2 = \frac{(182-141)^2}{141} + \frac{(85-99)^2}{99} + \frac{(33-60)^2}{60} + \frac{(68-94)^2}{94} + \frac{(60-66)^2}{66} + \frac{(72-40)^2}{40} + \frac{(32-47)^2}{47} + \frac{(53-33)^2}{33} + \frac{(15-20)^2}{20}$$

$$= 13{\cdot}90 + 1{\cdot}98 + 12{\cdot}15 + 7{\cdot}19 + 0{\cdot}55 + 25{\cdot}60 + 4{\cdot}79 + 12{\cdot}12 + 1{\cdot}25$$

$$= 79{\cdot}53.$$

6. $\chi^2_{4,\,0\cdot995} = 14{\cdot}86$; $\chi'^2_4 = 79{\cdot}53$. எனவே, அளவையின் மதிப்பு தீர்வு கட்டமான பகுதியில் அமைவது தெளிவாகிறது எனவே, எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகிறது. அதாவது, ஒவ்வோர் எண்ணப் பிரிவிலும் அமையும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, கல்விப் பிரிவுடன் மாறுகிறது. ஓரினத் தன்மை பெறப்படவில்லை.

பொதுவாக, $r$-நிரல்களும், $c$ நிரைகளையும் கொண்ட ஓர் அட்டவணைக்கு எடுகோள் $H_0 : P_{1j} = P_{2j} \ldots = P_{rj} \quad j = 1, 2 \ldots$

$H_1$ : $H_0$-ல் காணப்படும் சமன்பாடு உண்மையல்ல என்று அமையும்.

தனித்தன்மை, ஓரினத்தன்மை பற்றிய எடுகோள்களைச் சோதிக்க ஒரே அளவை பயன்படுத்தப்பட்ட போதிலும், இரண்டு முக்கிய வித்தியாசங்கள் காணப்படுகின்றன. முதலாவதாக $P$-யின் சார்பாக அமைந்த இரு எடுகோள்களும் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்று மாறுபட்டுள்ளது. இரண்டாவதாக, தனித் தன்மையைப் பொறுத்த மட்டில் மாதிரி ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளது. ஆனால் ஓரினத் தன்மையைப் பற்றிய குறிப்பில், $r$-முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும் பெறப்பட்ட ஒரு மாதிரி பயன்படுத்தப்படுகிறது. இவ்விரண்டு தன்மைகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்ட வேண்டுமாயின், தனித்தன்மை பற்றிய சோதனையில், நிரல்களின் மொத்தம், நிரைகளின் மொத்தம் இவ்விரண்டும் வாய்ப்பின் பயனாய் எழுகின்றன. ஆனால், மேலும் ஓரினத்தன்மையைப் பொறுத்த அளவில், நிரல் மொத்தங்கள் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட எண்களாக அமையும் இத்தகைய சோதனைக்கு, எவ்வாறு பிற தோராயமாக அமைந்த கைவர்க்கச் சோதனைகட்கான திறத்தைக் கணக்கிடுவது கடினமாகஉளதோ அதே போன்று, திறத்தைப் பற்றிய கணக்கீடுகள் எளிமையானவையல்ல. மேலும், திறம் கணக்கிணப்பட்டாலும், ஏமாற்றத்தை அளிக்கும் வண்ணம் குறைவாகவும் அமையலாம்.

## பயிற்சிகள்

1. நான்கு பட்ட நிலை வகுப்புகளிலிருந்து, மொத்தம் 800 மாணவர்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் 200 பேர் வீதம் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார்கள். ஒவ்வொரு மாணவனின் முதல் விருப்பமும் திரைப்படம் இசை, நாடகம் இவற்றைப் பொறுத்தமட்டில் குறிக்கப்படுகின்றது. இவற்றின் முடிவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகின்றன.

முதல் விருப்பம்

| வகுப்பு | திரைப்படம் | இசை | நாடகம் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|
| புகுமுக வகுப்பு | 51 | 110 | 39 | 200 |
| முதலாண்டு | 74 | 106 | 20 | 200 |
| இரண்டாமாண்டு | 25 | 124 | 51 | 200 |
| மூன்றுமாண்டு | 90 | 60 | 50 | 200 |
| மொத்தம் | 240 | 400 | 160 | 800 |

எல்லா வகுப்புகளும் முதல் விருப்பத்தைப் பொறுத்த அளவில் ஒன்றாக அமைகின்றனவா ?

2. ஒரு பல்கலைக் கழகத்தின் பொறியியல், விவசாயம், கலைகள் ஆகிய பிரிவுகளிலிருந்து ராண்டம் முறையில் 600 மாணவர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அவர்களது தேர்ச்சியின் அடிப்படையில் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணை அமைக்கப்படுகிறது.

| | பிரிவுகள் | | | |
|---|---|---|---|---|
| தேர்ச்சி | பொறியியல் | விவசாயம் | கலைகள் | மொத்தம் |
| *A* | 25 | 15 | 30 | 70 |
| *B* | 41 | 20 | 79 | 140 |
| *C* | 82 | 70 | 138 | 290 |
| *D* | 18 | 30 | 52 | 100 |
| மொத்தம் | 166 | 135 | 299 | 600 |

இதன் மூலம் என்ன முடிவினை மேற்கொள்ளலாம் ?

3. ஒரு பெரிய நகரத்திலிருந்து 1000 பேர் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அவர்களது புகை பிடிக்கும் தன்மையும், மது அருந்தும் பழக்கமும் எவ்வாறு அமைந்துள்ளது என்பது கேட்டறியப்பட்டத்தில் கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் வெளிப்பட்டன.

| | புகை பிடித்தல் | | | |
|---|---|---|---|---|
| மது | இல்லை | எப்பொழுதாவது | சுமாராக | மிக அதிகமாக |
| இல்லை | 85 | 23 | 56 | 36 |
| எப்பொழுதாவது | 153 | 44 | 128 | 75 |
| சுமாராக | 128 | 26 | 101 | 45 |
| மிக அதிகமாக | 34 | 7 | 15 | 44 |

மக்களின் புகை பிடிக்கும் பழக்கத்திற்கும், மது அருந்தும் பழக்கத்திற்குமான அட்டவணையிலிருந்து என்ன அறியமுடிகிறது ?

உடன்தொடர்புக்கெழு ஆய்வில் உய்த்துணர்வு (Inferences in correlation Analysis) :

$x, y$ என்பன, $\mu_x$ மற்றும் $\mu_y$ என்ற சராசரிகளையும், $\sigma_x^2$ மற்றும் $\sigma^{y2}$ என்ற மாறுபாடுகளையும் கொண்ட, தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகளாக அமையும் என்று கொள்க. இந்த மாறிகளின் இணைந்த அடர்த்திச் சார்பு,

$$f(x_1\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-p^2}}$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-p^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2p(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y} + \frac{(y-y_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

என்று அமையின் $x$ மற்றும் $y$ ஓர் இரு மாறி (பரிமாண இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது என்கிறோம். இவ்விடத்து,

(a) ராண்டம் மாறி $x_1$ தனியாகக் கருதப்படும்போது, சராசரி $\mu_{x1}$ மாறுபாடு $\sigma_x^2$ எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும்.

(b) ராண்டம் மாறி $y_1$ தனியாகக் கருதப்படும்போது, சராசரி $\mu_{y1}$ மாறுபாடு $\sigma_y^2$ எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும்.

(c) "உடன்தொடர்புக்கெழு" என்றழைக்கப்படும் '$p$' (பரவலின் சுட்டுறுப்பு) $x$ மற்றும் $y$ இவற்றிற்கிடையே யான தொடர்பினை அளக்கும் அளவுகோலாக விளங்கு கிறது. இந்த உடன் தொடர்புக்கெழு "$p$ ஆனது,

1. $-1 < \rho < 1$ என்றமையும்.

2. $x$ மற்றும் $y$ இவை, இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகையில், $\rho = 0$ எனில், அவையிரண்டும் ஒன்றையொன்று சாராதனவாக அமையும்.

3. $f = -1$, அல்லது $f = +1$ எனில், $(x, y)$ என்ற எல்லாப் புள்ளிகளும் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டில் (regression line) அமைகின்றன. எனவே, $x$ மற்றும் $y$ முழுமையாகத் தொடர்புடையன.

சுட்டுறுப்பு $p$ ஆனது, எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் மூலம்,

$$\rho = E\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)$$

என அமைக்கப்படலாம். மேலும், $(x_1\ y_1)\ (x_2\ y_2)\ \ldots\ (x_n\ y_n)$ என்பது ஓர் இரு பரிமாண இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து ராண்டமாகப் பெறப்பட்டது எனில். ρ ஆனது கீழ்க்கண்டவாறு மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறது.

$$r = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\right) \left(\frac{y_i-\bar{y}}{s_y}\right).$$

இதனை,

$$r = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)(\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

என்று கண்டறிய ஏதுவாகிறது. $S_x$ மற்றும் $S_y$ என்ற மதிப்புகள் மாதிரியின் திட்ட விலக்கங்களாக அமைகின்றன. $r$-ன் மதிப்புகளும் $-1 < r < +1$ என்றமைதல் அவசியம்.

மிகவும் பயனுள்ள எடுகோள் சோதனை, யாதெனில்,

$H_0 : \rho = 0$ என்பதை $H_1 : \rho \neq 0$

என்ற மாற்றுக்கு எதிராகச் சோதிப்பதில் அமையும். இதற்கான அளவை,

$$t_{n-2} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

என்று கொள்ளப்பட்டு, (1) எடுகோள் உண்மையாயிருக்கையில் (2) $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)\ \ldots\ (x_n\ y_n)$ என்பது $n$-அளவுள்ள, இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியாக அமையும் போதும்,

$(n-2)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட $t$-பரவலாக அமைகிறது.

$$\frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} > t_{n-2;\ 1-\frac{\alpha}{2}},\quad \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} < t_{n-2;\ \frac{\alpha}{2}}$$

என்ற நிர்வு கட்டமான பகுதியை அமைக்கையில், மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha$ எனக் கொண்ட, பொருளுடைத்தான சோதனை கிட்டுகிறது

மேலும், $t_{n-2} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ என்ற அளவையே,

$$H_0 : \rho = 0, \quad H_1 : \rho < 0$$

மற்றும்

$$H_0 : \rho = 0, \quad H_1 : \rho > 0$$

என்ற எடுகோள்களையும் சோதனை செய்யப் பயன்படுத்தப் படலாம். $t_{n-2}$-ன் மதிப்பு சிறியதாக இருக்கும்போது, முதல் சூனிய எடுகோளும், $t_{n-2}$-ன் மதிப்பு பெரியதாயின், இரண்டாம் சூனிய எடுகோளும் நிராகரிக்கப்பட ஏதுவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : ஆங்கிலம் மற்றும் உடற்பயிற்சியில் ஆகிய இரண்டிலும் ஒரு பயிற்சி வகுப்பை முடித்த மாணவர் குழாமிலிருந்து, பதினொரு மாணவர்கள் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டனர். அவர்களின் இறுதித் தேர்வு மதிப்பெண்கள் (67, 92) (81, 65), (65, 81), (42, 75), (53, 85), (40, 78), (71, 77), (64, 79), (60, 81), (68, 8-), (49, 85) என்றமைகின்றன. அடைப்பில் காணப்படும் ஜோடி மதிப்புகளில் முதல் மதிப்பெண் ஆங்கிலத்தையும், இரண்டாவது மதிப்பெண் உடற்பயிற்சியையும் குறிக்கிறது. ஒரு மாணவனுக்காக அமைந்தது.) ஜோடியாக அமையும் மதிப்பெண்கள் ஓர் இரு பரிமாண இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளன என்று கொண்டு, ஒரு மாணவனின் ஆங்கில மதிப்பெண், உடற்பயிற்சி மதிப்பெண்ணைச் சாராமல், தனித்து (independent) விளங்குகிறது என்று எடுகோளைச் சோதிக்க.

தீர்வு : (1) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்திலிருந்து. ஆங்கிலம் மற்றும் உடற்பயிற்சி மதிப்புகள் ஒன்றையொன்று சாராமல் தனித்துள்ளன என்ற எடுகோளைச் சோதிக்க, $H : \rho = 0$ என்பதை, $H_1 : \rho \neq 0$ என்ற மாறெதிரான எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதனை செய்கிறோம்.

(2) $\alpha = 0{\cdot}05$ என்று கொள்க.

(3) $t_{n-2} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ என்ற அளவையே பயன்படுத்தப் படுகிறது. இந்த அளவையானது, $H_0$ உண்மையாயிருக்கும் போதும், (a) ஜோடி மதிப்பெண்கள் ராண்டமாக (b) ஓர் இரு பரிமாண இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெறப்படும்போது, $(n-2)$ வரையற்றபாகை கொண்ட $t$' பரவலைப் பெறுகிறது.

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி. $t_9 < t_{9;\,0\cdot025} = -2\cdot26$, $t_9 < t_{9;\,0\cdot975} = 2.26$ என்று அட்டவணை 3-லிருந்து பெறப் படுகிறது.

(5) கண்டுகள் : $r$-ன் மதிப்பைக் கணக்கீடு செய்ய வேண்டும். ஆங்கில மதிப்பெண்ணை '$x_i$' எனவும், உடற்பயிற்சிக் கான மதிப்பெண்ணை '$y_i$' எனவும் குறிப்பிடின்,

$$\bar{x} = \frac{67+81+\ldots+49}{11} = 60.$$

$$\bar{y} = \frac{92+65 \quad + 85}{11} = 80$$

$$\sum_{i=1}^{11} = 67^2 + 81^2 \ldots + 48^2 = 41.210$$

$$\sum_{i=1}^{11} = 92^2 + 65^2 \ldots + 85^2 = 70,864$$

$$\Sigma X_i Y_j = (67)(92) + (81)(65) + \ldots (49)(85) = 52,598$$

$$r = \frac{52598 - 11(60)(80)}{\sqrt{[41210 - 11(60)^2]\;[70864 - 11(80)^2]}}$$

$$= \frac{-207}{\sqrt{(160)(464)}} = \frac{-207}{\sqrt{747,040}}$$

$$= -\frac{207}{864.5}$$

$$= -0.239.$$

$$\therefore\ r^2 = (-0.239)^2$$

$$= 0.057$$

$$\sqrt{1-r^2} = \sqrt{0.943}$$

$$= 0.971$$

$$\therefore\ t_{n-2} = \frac{(-0.239)\ (3)}{0.971}$$

$$= -0.74.$$

6. நாம் எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம். ஏனெனில், $t_{n-2}=-0.74$ என்பது தீர்வுகட்டமான பகுதியில் அமையவில்லை. எனவே, ஆங்கில மதிப்பெண்களுக்கும், உடற்பயிற்சி மதிப்பெண் களுக்கும் இடையே எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லை.

∴பிஷரின் $Z$-உருவமாற்றம் : முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக்கெழு '$\rho$' சிறியதாக இல்லாவிடில், $n$ பெரிய எண் ஆயின், இயல் நிலைப் பரவல் தன்மையை அடைய $Z$-உருவ மாற்றத்தை ஃபிஷர் பயன்படுத்தினர்.

$$Z = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \text{ என்பது உருவமாற்றமாகும்.}$$

$$\text{எனவே, } \xi = \tfrac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = E(Z)$$

$$V(Z) = Z\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{1}{(n-3)}$$

சூனிய எடுகோள் $H_0$ யாதெனில், "முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக்கெழு '$\rho$' ஆகும்" என்பதே மாதிரியின் அளவு பெரிதாக அமையின்,

$$t = \frac{Z-\xi}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}} \to N(0,\ 1);\quad (n \to \infty)$$

$|t| > 1{\cdot}96$ எனில், சூனிய எடுகோள் $H_0$ ஆனது மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha = 0{\cdot}5$ என்ற அளவில் நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே, முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்பு காணப்படு கிறது. அல்லது இம்மாதிரியானது, $\rho$ என்ற உடன் தொடர்புடன் கூடிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதல்ல என்று தீர்மானிக்கிறோம்.

இரு மாதிரிகள் ஒரே உடன் தொடர்புக்கெழுக் கொண்ட முழு மைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டனவா என்பதற்கான சோதனை : $n_1$ மற்றும் $n_2$ பருமனுடைய இரு பிரிந்த ராண்டம் மாதிரிகள் முறையே $r_1$, $r_2$ உடன் தொடர்புக்கெழுவுடன், ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தாலோ, அல்லது ஒரே முழுமைத் தொகுதி உடன் தொடர்பு கொண்ட இரு முழு மைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தாலோ,

$$Z_1 = \frac{1}{2} \cdot \log_e\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \log_e\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)$$

$V(Z_1 - Z_2) = (Z_1 - Z_2)$-ன் மாறுபாடு

$= V(Z_1) + V(Z_2) - \text{Cor}\,(Z_1\, Z_2)$

$= V(Z_1) + V(Z_2)$; ஏனெனில் $Z_1$, $Z_2$ சார்பற்றவை.

$$V(Z_2) = \frac{1}{(n-3)}$$

$$V(Z_2) = \frac{1}{(n_2-3)}$$

$$V(Z_1 - Z_2) = \frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(n_2-3)}$$

$\therefore$ $(Z_1 - Z_2)$-ன் தரப்பிழை $= \sqrt{\frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(n_2-3)}}$

$H_0$ இரு மாறிகளும் ஒரே உடன் தொடர்புக்கெழு கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளன.

$$t = \frac{(Z_1 - Z_2)}{\left[\frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(n_2-3)}\right]^{\frac{1}{2}}} \rightarrow N(0\ 1).$$

$|t| > 1{\cdot}96$ எனில் $Ho$, நிராகரிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : 28 சோடிகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில், உடன் தொடர்புக் கெழு 0.7 எனில், $Z$—உருவமாற்றத்தைப் பயன்படுத்தி,

(i) இது பூச்சியத்தில் இருந்து ($\rho = 0$)

(ii) 0·5-லிருந்து ($\rho = 0{\cdot}5$); பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபட்டுள்ளதா என்று ஆராய்க.

(i) $H_0 : \rho = 0.$

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \text{loa}_e \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = \frac{1}{2} \log_e{}^1 = 0$$

$r = 0{\cdot}7$

$n = 28.$

$$Z = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+0.7}{1-0{\cdot}7}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1.7}{0.3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2{\cdot}302585 \log_{10} \left(\frac{1.7}{0.3}\right)$$

$$= 1.1513 \log_{10} (5.67)$$

$$= 0.87$$

$$\therefore (t) = \left| \frac{Z - \xi}{\sqrt{\frac{1}{(n-3)}}} \right|$$

$$= \frac{0.87}{\sqrt{\frac{1}{25}}}$$

$$= 5\,(0.87)$$

$= 4{\cdot}35 > 2{\cdot}58$ (1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில்)

எனவே, $H_0$ நிராகரிக்கப்பட்டு, [பூச்சியம் முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக்கெழு என்பது தவறு என்று தீர்மானிக்கிறோம்.

(ii) $\rho = 0.5$

$Z = 0{\cdot}87$

$$P = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+0.5}{1-0.5}\right) = 0.55$$

எனவே. $|t| = \dfrac{(0{\cdot}87 - 0{\cdot}55)}{\left(\frac{1}{5}\right)}$

$= 1{\cdot}6 < 1{\cdot}96.$

(மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha = 0{\cdot}05$ எனில்)

$\therefore$ $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது. $\rho = 0{\cdot}5$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் "உடன் தொடர்புக்கெழு" என்பதில் ஐயமில்லை.

உதாரணம்: 28 சோடிகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் மாறிகள் 0·5 உடன் தொடர்புக்கெழுவுடனும், 28 சோடிகள் கொண்ட மற்றொரு மாதிரியின் மாறிகள் 0·8 உடன் தொடர்புக் கெழுவுடனும், காணப்பட்டால், இந்த இரு உடன் தொடர்புக் கெழுக்களும் பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபட்டுள்ளனவா எனச் சோதித்து அறிக.

தீர்வு: $H_0$: இரு மாதிரிகளும் ஒரே இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்று கொள்க.

$$Z_1 = \frac{1}{2} \log_e\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \log_e\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)$$

$$t = \frac{(Z_1 - Z_2)}{\sqrt{\frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(_2n-3)}}} \rightarrow N(01)$$

இங்கு, $n_1 = 28,\quad n_2 = 28$

$r_1 = 0{\cdot}5,\quad r_2 = 0{\cdot}8$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \times 2{\cdot}3027.\ \log\left(\frac{1+0{\cdot}5}{1-0{\cdot}5}\right)$$

$= 0{\cdot}55.$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \times 2{\cdot}3026 \cdot \log_e\left(\frac{1{\cdot}8}{0{\cdot}2}\right)$$

$= 1{\cdot}10.$

$$(t) = \frac{|0{\cdot}55 - 1{\cdot}10|}{\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}}} = \frac{0{\cdot}55}{\sqrt{\frac{45}{500}}}$$

$= 1{\cdot}83 < 1{\cdot}96$ (மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha = 0{\cdot}05$ எனில்,)

எனவே, $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது, இரு மாறிகளும் ஒரே இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்டவை. அதாவது, இரண்டு உடன் தொடர்புக்கெழுக்களும் பொருளுடைய வகையில் வேறுபடவில்லை என்று தீர்மானிக் கிறோம்.

தொடர்புப் போக்கு ஆய்வில் உய்த்துணர்வுகள் : (Inferences in Regression Analysis) : இரண்டு மாறிகளைப்பற்றிய ஒரு பிரச் சினையைக் கருத்தில் கொள்க. இவ்விரண்டு மாறிகளில், ஒன்றின் உதவியால் (அதனது மதிப்புக்களைக் கொண்டு), மற்றொரு மாறி யின் தன்மையை முன்கூட்டியே உரைப்பதற்கான ஆய்வு, "தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு" (Regression Analysis) எனப்படும். இரண்டு மாறிகளை $x$ மற்றும் $y$ என்று குறிப்பிடுக. $\mu_{y|x}$ என்பது, $x$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கையில், $y$-ன் சராசரி எனப்படும். இதே போன்று, $\sigma^2_{y|x}$ என்பது, $x$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கையில், $y$-ன் மாறுபாடு என்றழைக்கப்படும்.

$x$-ன மதிப்புகளெல்லாம். $k_1 < x < k_2$ என்ற இடைவெளியில் அமைகின்றன என்ற உளகத்தை மேற்கொள்க. மேலும், மேற் கண்ட $[k_1, k_2]$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்த ஒவ்வொரு $x$-ன் மதிப்பிற்கும், $d_1 < y < d_2$ என்றமையும் விதத்தில், ஒரு தொடர்ச்சி யான, $y$-ன் முழுமைத்தொகுதி அமைகிறது என்றும் கொள்க. இம் முழுமைத்தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றும், தெரியாத ஒரு சராசரி யையும், தெரியாத ஒரு மாறுபாட்டையும் கொண்டுள்ளது. இம் முழுமைத் தொகுதியின் தெரியாத சராசரி $\mu_{y|x}$ எனவும், தெரியாத மாறுபாடு $\sigma^2_{y|x}$ எனவும் அமையட்டும். எல்லாச் சராசரிகளும் ஒருதொடர்ச்சியான வளைகோட்டில் அமைகின்றன என்று கொள் வதில் கொள்கைப் பிழற்சி ஏதுமில்லை. இத்தகையதொரு வளை கோடே, உடன்போக்குத்தொடர்பு வளைகோடு (curve of regression) எனப்படும். இவ்வளைகோட்டை நாம் ஒரு நேர்கோடு என்று கொண்டால்,

$$\mu_{y|x} = A + Bx$$

என்றமையும்,($A$ மற்றும் $B$ இவை மாறிகளாகும்) உடன்போக்குத்

தொடர்பு நேர்கோட்டைப் (line of regression) பெறுகிறோம். $A$ மற்றும் $B$யின் உண்மையான மதிப்புகள் தெரிந்திருப்பின், $\mu_{y|x}$-ஐ கணக்கீடு செய்ய இயலும் (ஒரு குறிப்பிட்ட $x$ மதிப்பிற்கு) எனினும், $A$ மற்றும் $B$ இவற்றின் மதிப்பீடுகளையே அமைக்க இயல்வதால், $\mu_{y|x}$-ன் மதிப்பீட்டையே பெற முடிகிறது.

$A$-ன் மதிப்பீடு '$a$' எனவும், $B$-ன் மதிப்பீடு '$b$' எனவும் கொண்டால், $\hat{\mu}_{x|y} = a+bx$
எனப் பெறப்படும். மேலும்,

($a$) $\mu_{x|y} = A + Bx$, Y-ன், $x$ சார்ந்த உடன் போக்குத் தொடர்பு ஒரு நேர்கோடாக அமைகிறது.

($b$) $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்ற $x$ மதிப்புகள் ராண்டமானவை.

($c$) $y_1, y_2 \ldots y_n$ இவை ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

($d$) $\sigma^2{}_{x|y} = \sigma^2$, அதாவது ஒவ்வொரு $Y$-ன் முழுமைத் தொகுதியும் ஒரே மாறுபாடு உள்ளது.

என்ற ஊகங்களை மேற் கொண்டால், கீழ்க்கண்ட முடிவுகளைப் பெற இயலுகிறது.

(1) $a$ மற்றும் $b$, முறையே $A$ மற்றும் $B$ யின் நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடுகளாகும். அதாவது, $E(a) = A$; $E(b) = B$ என, $\hat{\mu}_{y|x}$ என்பது $\mu_{y|x}$-ன் நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடாக அமையும் வண்ணம் விளங்குகிறது.

(2) $S^2{}_{y|x}$ என்பது $\sigma^2{}_{y|x}$-ன் நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடாகும்.

(3) $A$ மற்றும் $B$ யின் எல்லா மதிப்பீடுகளைக் காட்டிலும், $a$, $b$யே மிகக் குறைந்த மாறுபாடு உள்ளது. எனவே, $\hat{\mu}_{y|x}$ -ன் மாறுபாடும் மிகச் சிறியதாகும்.

எடுகோள் சோதனைகள் : $x$-ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கையில், உடன் போக்குத் தொடர்பு நேர்கோட்டைக் கொண்டு, $Y$-ன் பரவல் தெரியாத போதும், $Y$-ன் மதிப்புகளை முன்கூட்டியே உரைக்க இயலும். எனினும், $\mu_{y|x}$, $A$, $B$ மற்றும் $\sigma^2{}_{y|x}$ இவை பற்றிய எடுகோள்களைச் சோதிக்க விரும்பும் போதோ அல்லது இவற்றிற்கான நம்பிக்கை இடைவெளிகளை அமைக்க எண்ணும் போதோ, இயல்நிலைத் தன்மையைப் பற்றிய ஊகங்கள் இன்றியமையாததாகின்றன.

எனவே, (1) என்று அமைக்கப்பட்டுள்ள நான்கு ஊகங்களுடன், மேற்கொண்டு மற்றுமோர் ஊகம்

(e) ஒவ்வொரு $y$ தொகுதியும் இயல் நிலையானது என்பதையோ அல்லது,

(a) $(x_1\, y_1)$ $(x_2\, y_2)$ ... $(x_n\, y_n)$ என்பது ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் '$n$' சோடி மதிப்புகளாகும்.

(b) $x$ மற்றும் $y$ ஓர் இரு மாறி இயல் நிலைப் பரவலைப் பெற்றுள்ளன.

என்ற ஊகங்களையோ மேற்கொள்ள வேண்டுவது அவசியமாகிறது.

மேலே காட்டியுள்ள இரு வகையான பிரிவுடைய ஊகங்களும் எடுகோள் சோதனைகளுக்கும், நம்பிக்கை இடைவெளி அமைப்பதற்கும் ஒரே மாதிரியானவையே. எனினும், நாம் மதிப்பீடு செய்யும் $\mu_{y|x}$ என்ற மதிப்பைப் பற்றிய சோதனைகளே மிகவும் கருத்தைக் கவரும் தன்மையன. $\mu_{y|x}$ பற்றிய ஓர் எடுகோளுக்கு ஒரு புறத்த மற்றும் இரு புறத்த மாற்றுகளை, மாறெதிரான எடுகோள்களை அமைக்க முடியும்.

$H_0 : \mu_{y|x} = \mu_0$, யை எதிராக $H_1 : \mu_{y|x} < \mu_0$

$H_0 : \mu_{y|x} = \mu_0$, யை எதிராக, $H_1 : \mu_{y|x} > \mu_0$ (அல்லது)

$H_0 : \mu_{y|x} = \mu_0$ யை எதிராக, $H_1 : \mu_{y|x} \neq \mu_0$

என்ற எடுகோள் சோதனைக்கு, $x$-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு $x_0$ என்று அமையின், நாம்

$$t_{n-2} = \frac{a + bx_0 - \mu_0}{S_{y|x}\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)}}}$$

என்ற அளவையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இங்கு $E(\mu_{y|x}) = \mu_0$ என்றும்

$$\text{திட்டப் பிழை} = S.E.\,(\mu_{y|x})$$

$$= S_{y|x}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 - n\,\bar{x}^2)\right)}}$$

என்றும் காண்கிறோம்.

ஏனெனில்,

$$V(\mu_{y|x}) = S^2{}_{y|x}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{[\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2]}\right]$$ ஆகிறது.

எனவே, ஸ்டுடன்ட் $t$-ன் வரையறைப்படி,

$$t_{n-2} = \frac{a + bx_0 - \mu_0}{S_{y|x}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)}}}$$

ஆகும்.

மேலே நாம் கோடிட்டுக்குக் காட்டியுள்ள மூன்று வகையான மாறெதிரான எடுகோளுக்கும் தக்கவாறு, தீர்வு கட்டமான பகுதி அமையும் என்பதையும் அறிவோம்.

$$H_0 : \mu_{y|x} = \mu_0, \quad H_1 : \mu_{y|x} < \mu_0$$
என்பது எடுகோளிணைகள் எனில், $t_{n-2}$-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கும்,

$$H_0 : \mu_{y|x} = \mu_0, \quad H_1 : \mu_{y|x} > \mu_0$$
என்பது எடுகோளிணைகள் எனில், $t_{n-2}$-ன் பெரியமதிப்புகளுக்கும்,

$$H_0 : \mu_{y|x} = \mu_0, \quad H_1 : \mu_{y|x} \neq \mu_0$$

என்பது எடுகோளிணைகள் எனில், $t_{n-2}$-ன் சிறிய மற்றும் பெரிய மதிப்புகள் இரண்டிற்கும். சூனிய எடுகோளை நிராகரிக்கிறோம். மூன்றுவதான $H_1 : \mu_{y|x} \neq \mu_0$ என்ற வகையில் தீர்வு கட்டமான பகுதி இருபுறத்திலும் சமச்சீராக அமையும்படி அமைக்கப் படுகிறது. எனவே, மிகைத்தன்மை மட்டம் '$\alpha$' எனில்.

(i) $t_{n-2} < t_{n-2,\ \alpha}$,

(ii) $t_{n-2} > t_{n-2,\ 1-\alpha}$,

(iii) $t_{n-2} < t_{n-2,\ \alpha/2}$

மற்றும் $t_{n-2} > t_{n-2,\ 1-\alpha/2}$

என்றமையும்போது முறையே மேற்குறிப்பிட்ட மூன்றுவித மாறெதிரான எடுகோள் அமைவிற்கு, சூனிய எடுகோள் நிரா கரிக்கப்படுகிறது. $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது, நிபந்தனை $(e)$ உடன்கூடிய (1) அல்லது (2) என்ற இருவகைப்பட்ட

வற்றுள் ஒன்று பூர்த்தி செய்யப்படும்போது, $t_{n-2}$ என்ற அளவை, $(n-2)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட '$t$' பரவலாக அமைகிறது.

மேலும் $\mu_{y/x}$-க்கான, நம்பிக்கைக்கெழு $(1-\alpha)$ கொண்ட "நம்பிக்கை இடைவெளி"யை $x = x_0$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கையில்,

$$P_r\left[-t_{n-2}, {}_{1}-\frac{\alpha}{2} < \frac{a+bx_0-\mu_{y/x}}{S_{y/x}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{(x_0-\bar{x})^2}{({}^2{}_i\Sigma^2-{}^-{}_q ux)}}} < t_{n-2}, {}_{1}-\frac{\alpha}{2}\right] = 1-\alpha$$

$$P_r\left[a+bx_0-t_{n-2}; {}_{1}-\frac{\alpha}{2}S_{y/x}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\Sigma x_i^2-n_x^{-2}}} < \mu_{y/x} < a+bx_0+t_{n-2}, {}_{1}-\frac{\alpha}{2}S_{y/x}\sqrt{\frac{1}{au}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\Sigma x_1^2-n_x^{-2}}}\right] = 1-\alpha$$

என்றமைந்து, வழக்கமான முறையில் பெறப்படுகிறது.

**உதாரணம் :** ஒரு மாணவன் பள்ளியில் இறுதித் தேர்வில் பெறும் தரத்திற்கான குறியீட்டை $x_i$ என்ற புள்ளி வாயிலாகவும் கல்லூரியில் பெறும் தரத்திற்கான குறியீட்டை $y_i$ என்ற புள்ளி வாயிலாகவும் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்க. பள்ளியில் குறியீடு 2-க்குக் குறைவாகப் பெறும் எவரும் கல்லூரியில் அனுமதிக்கப்படுவதில்லை என்றும் கொள்க. 2th மாணவனுக்கான $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ பள்ளி மற்றும் கல்லூரி திட்டக் குறியீடு கீழ்க்கண்டவாறு பெறப்படுகிறது.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ : | 2·0 | 2·5 | 3·0 | 4·0 |
| $y_i$ : | 2·30 | 1·86 | 2·59 | 3·54. |

கல்லூரியில் ஒரு மாணவன் தேர்ச்சி பெறுவதற்கென '2' புள்ளிகள் தேவைப்படுகின்றன என்று கொள்க. பள்ளிச் சராசரிக் குறியீடு 2·0 எனக் கொண்ட மாணவர்கள், கல்லூரிச் சராசரி குறியீடு 2·0-க்குக் குறைவாகப் பெறுகின்றனர் என்பதை மாறெதிராக எடுகோள் கொண்டு விளங்கும் சோதனையைத் தருக.

தீர்வு :

(1) $H_0 : \mu_{y/x} = 2{\cdot}0$, $H_1 : \mu_{y/x} < 2{\cdot}0$, ($x=2{\cdot}0$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) என்பதே எடுகோளாகும்.

(2) $\alpha = 0{\cdot}05$ என்று கொள்க.

(3) அளவை $t_{n-2} = \dfrac{a + bx_0 - \mu_0}{S_{y/x}\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{\Sigma x_1{}^2 - n\bar{x}^2}}}$

என்பதை, $n=5$, $x_0=2{\cdot}0$ என்று கொண்டு பயன்படுத்துகிறோம். $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது, (a) உடன் போக்குத் தொடர்பு வளைகோடு நேர்கோடானது (b) $x$ என்பன தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட எண்கள் (c) $y$ என்பன ராண்டமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படு கின்றன. (d) ஒவ்வொரு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் $x$-க்கும், $y$-ன் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடும் சமமானது (e) ஒவ்வொரு $y$ தொகுதியும் இயல்நிலையானவை என்பன பூர்த்தி செய்யப் படின், $t_{n-2}$ என்ற அளவையானது, மூன்று வரையற்ற பாகை களைக் கொண்ட '$t$' பரவலாக அமையும். இவ்விடத்து, $b$, $c$ என்பன பூர்த்தி செய்யப்படுவதாகப் பிரச்சினையிலேயே கொடுக் கப்படுகிறது. மேலும் $a$, $b$, $c$ இவையும் பூர்த்திசெய்யப்படு கின்றன. என்று கொள்வதில் தவறு ஏதுமில்லை.

(4) தீர்வுகட்டமான பகுதி $t_3 < t_{3 \cdot 0 \cdot 05} = -2.353$ என்று அட்டவணை 3-லிருந்து பெறப்படுகிறது.

(5) $b = \dfrac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i - n\bar{x}^2}$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 2.0 + 2.5 + 3.0 + 3.5 + 4.0 = 15.0$$

$$\bar{x} = 3.0$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 2.30 + 1.86 + 2.59 + 2.59 + 3.54 = 13.25$$

$$\bar{y} = 2.65$$

$$\Sigma x_i{}^2 = (2.0)^2 + (2.5)^2 + (3.0)^2 + (3.5)^2 + (4.0)^2 = 47.50$$

$$\Sigma y_i{}^2 = (2.30)^2 + (1.86)^2 + (2.59)^2 + (2.96)^2 + (3.54)^2 = 36.75$$

$$\Sigma x_i y_i = (2.0)(2.30) + (2.5)(1.83) + (3.0)(2.55) + (3.5)(2.96) + (4.0)(3.54) = 41.54$$

$$b = \frac{41.54 - 5(3.0)(2.65)}{47.50 - 5(3.0)^2} = \frac{1.79}{2.50} = 0.72.$$

$$a = 2.65 - (0.72)(3.0) = 0.49$$

$$\hat{\mu}_{y|x} = 0.49 + 0.72x.$$

$x = 2.4$ எனில்,

$$\hat{\mu}_{y|2.4} = 0.49 + (0.72)(2.4) = 0.49 + 1.73 = 2.22$$

என்பது சராசரிக் கல்லூரிக் குறியீட்டின் மதிப்பீடு.

$\sigma^2$-ன் மதிப்பீடு, $S_{y/x}^2$

$$= \frac{1}{n-2}\left\{(\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2) - \frac{(\Sigma X_i Y_i - n\bar{x}\bar{y})^2}{\Sigma X_i^2 - n\bar{x}^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left[36.75 - 5(2.65)^2 - \frac{(1.73)^2}{2.50}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(36.75 - 35.11 - 128) = 0.12$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{0\ 12} = 0.35 = S_{y/x}$$

$$\Sigma x_i^2 - 5\bar{x}^2 = 2.50,\ \bar{x} = 3.0$$

$$a + bx_0 = 0.49 + 0.72\ (2.0) = 1.93.$$

$$t_3\text{-ன் கணக்கீடு மதிப்பு} = \frac{(1.93 - 2.00)}{0.35\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(2.0 - 3.0)^2}{2.5}}}$$

$$= \frac{-0.07}{0.35 \times \sqrt{0.60}}$$

$$= -\frac{-0.07}{0.35 \times 0.77}$$

$$= -\frac{0.07}{0.27} = -0.26$$

6. $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது' ஏனெனில் $t_3$-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $(-0.26) > -2.35$. எனவே, பள்ளி சராசரிக்

குறியீடு 2.0 எனக் கொண்ட மாணவர்க்கு, கல்லூரிக் குறியீடு 2.0-க்கும் குறைவாக அமைவதற்குக் காரணமில்லை என்று தீர் மானிக்கிறோம்.

உதாரணம் : $x = 3.5$ எனில், சென்ற பிரச்சினைக்கான, புள்ளி விவரத்தைக் கொண்டு, $\mu_{y|x}$-க்கான, நம்பிக்கைக் கெழு 0.35 எனக் கொண்ட, நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

தீர்வு :

$$S_{y|x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\Sigma X_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$= (0.35) \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(3.5 - 3.0)^2}{2.50}}$$

$$= (0.35)\sqrt{0.3} = 0.19.$$

$t_3, 0.975 = 3.18$ என அட்டவணை 3-லிருந்து பெறுகிறோம்.

எனவே, நம்பிக்கை இடைவெளி $[3.01 - 3.18(0.19), 3.01 + 3.18(0.19)] = (3.01 - 0.60, 3.01 + 0.60]$
$= [2.41, 3.61]$ என்றமையும்.

குறிப்பு : $A$ ஐப் பற்றிய எடுகோள்களும், $t_{n-2}$ என்ற அளவையைக் கொண்டே ஒரு தனிவகையாகக் கருதப்பட்டுச் சோதிக்கப்படலாம். $x = 0$ எனில், $\mu_{x|y}$-ன் மதிப்பு $A$ என்பதை நினைவில் கொண்டு இத்தகைய சோதனை கையாளப்படுகிறது.

$B$-யைப்பற்றிய உய்த்துணர்வுகள் : Bயைப் பற்றிய உய்த்துணர்வுகள் பலநேரங்களில் கருத்துக்கினியதாகும். ஏனெனில் இந்தச் சுட்டுறுப்பே உடன்போக்குத் தொடர்பின் (நேர்கோட்டின்) சரிவாக (slope) அமைகிறது. மேலும் $X$-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் விதம் $\mu_{y|x}$ அதிகரிக்கும் வீதத்தை வகுக்கையில் ஏற்படும் எண்ணாகவும் அமைகிறது.

$$(a) \quad H_0 : B = B_0, \qquad H_1 : B > B_0$$
$$(b) \quad H_0 : B = B_0, \qquad H_1 : B < B_0$$

அல்லது

$$(c) \quad H_0 : B = B_0, \qquad H_1 : B \pm B_0$$

என்ற பலவித எடுகோளினைகளைச் சோதிக்க ஏதுவானாலும், மிகப்பயனுள்ள எடுகோள் சோடி, $B_0 = 0$ என்றமைகையில், $H_0 : B = B_0$ஐ $H_1 : B \pm B_0$-க்கு எதிராகச் சோதித்தலாகும்,

$B$யின் மதிப்பு '0' எனில், $x$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\mu_{y|x}$ ஒரே மதிப்பையே பெறுகிறது. அதாவது $y$ மாறியினைப் பற்றி முன் கூட்டியே உரைப்பதற்கு $x$ மாறி எவ்விதப் பயனுள்ள விவரத்தையும் அளிப்பதில்லை. $B_o = 2$ எனில், $x$ மதிப்பு ஓர் அலகு அதிகரிக்கும்போது, $\mu_{y|x}$-ன் மதிப்பு இரு அலகுகளாக அதிகரிக்கிறது. மேலே காட்டப்பட்டுள்ள எடுகோளினைகள் (a), (b), (c) இவற்றைச் சோதிப்பதற்கான அளவை,

$$t_{n-2} = \frac{b - B_o}{S_{y|x}} \sqrt{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

என்றமையும்.

[$b$-ன் எதிர்பார்க்கும் அளவு $= E(b) = B_o$.

$$b\text{-ன் மாறுபாடு} = Var(b) = \sigma_b^2 = \frac{\sigma_{y|x}^2}{\Sigma (x-\bar{x})^2}$$

$\sigma_{y|x}^2$-ன் மதிப்பு தெரியாதபோது $S_{y|x}$-ன் மதிப்பை பயன்படுத்தினால், $b$ன் திட்டப் பிழைக்கான மதிப்பீடு

$$= S \cdot E. (b) = \frac{S_{y|x}}{\sqrt{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}} \text{ ஆகிறது.}$$

$$\text{எனவே, } t_{n-2} = \frac{b - B_o}{S_{y|x}} \sqrt{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2} \text{ ஆகின்றது.]}$$

இந்த அளவையின் மதிப்பு பெரியதாக இருக்கும்போது (a) நிலையிலும், சிறியதாக இருக்கும்போது (b) நிலையிலும். சிறிய மற்றும் பெரிதாக அமையும்போது (c) நிலையிலும் சூனிய எடுகோள் $H_o$ நிராகரிக்கப்படும். தீர்வு கட்டமான பகுதி மாறெதிரான எடுகோளுக்கு ஏற்றவாறு அமைதலை சென்ற பிரிவிலும், பலமுறையும் விளக்கியுள்ளோம். இந்த அளவை ($n$-2) வரையற்ற பாகை கொண்ட '$t$' பரவலாக, $H_o$ உண்மையாயிருக்கும்போது, சென்ற பிரிவில் விளக்கப்பட்ட நிபந்தனைகள் உண்மையாயின் விளங்கும்.

$B$-க்கான "நம்பிக்கை இடைவெளி", நம்பிக்கை கெடு $(1-\alpha)$ எனில்,

$$P_r\left[- t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{b-B}{S_{|xy}} \sqrt{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2} < t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}}\right] = (1-\alpha)$$

நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= \left[ b - \frac{t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} S_{y|x}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} , \frac{b + t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} . S_{y|x}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} \right]$$

உதாரணம்—(2) : உதாரணம் (1)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு, $B = 0$ என்ற எடுகோளை, $B \pm 0$ என்ற மாறெதிரான எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதனை செய்க.

தீர்வு :

(1) $H_0 : B = 0$, $H_1 : B \pm 0$.

(2) $\alpha = 0{\cdot}05$ என்று கொள்க.

(3) அளவையானது,

$$t_{n-2} = \frac{b - B_0}{S_{y|x}} \sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$n = 5, \quad B = 0.$$

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், உதாரணம் 1-ன் மூன்றாவது திட்டவரையில் நாம் கோடிட்டுக்காட்டிய நிபந்தனைகள் உண்மையாயின் (பூர்த்தி செய்யப்படின்), $t_{n-2}$ என்ற அளவை ஒரு $t$-பரவலைப் பெறுகிறது. இவ்விடத்து அந்த ஐந்து நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி செய்யப்படுவதற்கு ஏதுவாகிறது.

(4) தீர்வு கட்டமான பகுதி $t_3 < t_{3,0{\cdot}025} = -3{\cdot}18$; $t_3 > t_{3,0{\cdot}025} = +3{\cdot}18$. (அட்டவணை 3-லிருந்து)

(5) உதாரணம் (1)-லிருந்து, $b = 0{\cdot}72$, $S_{y|x} = 0.35$
$\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 2{\cdot}50$. எனவே,

$$t_{n-2} = t_{5-2} = t_3 = \frac{0{\cdot}72 - 0}{0{\cdot}35} \sqrt{2{\cdot}5}$$
$$= (2{\cdot}06)(1{\cdot}58)$$
$$= 3{\cdot}25.$$

(6) நாம் சூனிய எடுகோளை நிராகரிக்கிறோம். எனவே, $B-t$ அதாவது, உடன் போக்குத் தொடர்பு நேர்கோட்டின் சரிவு '0' எனவே, $x$ஐப் பற்றிய விவரம், $y$ஐப் பற்றி முன்கூட்டியே உரைப்பதற்குப் பயன்படுகிறது.

# 8. நேமன்-பியர்ஸன் எடுகோள் சோதனைகள்

ஒரு பரவலின் சுட்டுறுப்புப்பற்றிய சோதனைகள் பல ஏற்கெனவே விளக்கப்பட்டுள்ளன. அச் சோதனைகளின் கணக்கியல் கோட்பாடுகள் J. நேமன், E. S. பியர்ஸன் ஆகியோர் கண்டறிந்த வகையில், இவ்வத்தியாயத்தில் விளக்கப்படுகிறது

ஒரு புள்ளியியல் எடுகோளானது, ராண்டம் மாறிகளின் கணத்தின் (Set of random variables) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனைப் பற்றிய ஒரு கூற்றாக அமைகிறது. இத்தகையதொரு புள்ளியியல் எடுகோளானது, ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனின் சுட்டுறுப்பு அல்லது சுட்டுறுப்புகளின் வாயிலாக அமையலாம். $x$ என்ற ராண்டம் மாறியின் பரவலாக, $f\ (x,\ \theta)$ஐயும், $\theta$-வின் கூறுவெளியாக $\Omega$ ஐயும் கொள்ளுமிடத்து, ஒரு புள்ளியியல் எடுகோளானது, $\Omega_H$ என்ற $\Omega$-ன் உபகணத்தில் $\theta$ அமைவதைப்பற்றிய கருத்தாக அமைகிறது. $\theta$ என்ற சுட்டுறுப்பு வெவ்வேறான மதிப்புகளைக் கொள்ளும் போது, $f(x,\ \theta)$-ம் பல்வேறான மதிப்புகளைக் கொள்கிறது. இதனை நாம் $\Sigma_F$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். $\theta$ ஆனது $\Omega_H$ -ல் அமைந்துள்ளது என்றும் கூற்றுக்கு இணையானகூற்று யாதெனில், $f\,(x\theta)$ ஆனது; $\Sigma_F$ —ன் உபகணமான $\Sigma_H$ -ல் அமைந்துள்ளது என்பதே யாகும். $\theta$ வானது $\Sigma_H$-ல் அமையின், $f(x\ \theta)$ பெறும் மதிப்புகளின் கணம் $\Sigma_H$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. $f\ (x\ \theta)$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனைப்பெற்றுள்ள பரவலிலிருந்து ராண்டம் முறையில் பெறப்படும் மாதிரி அளவு '$n$' அளிக்கும் விவரத்தைக் கொண்டு, நமது கவனத்திலுள்ள எடுகோளை நிராகரிப்பதற்கான முயற்சி மேற்கொள்ளப்படுகிறது. மாதிரி அளவு '$n$' கொண்ட மாதிரிகளின் மொத்தம் "மாதிரி வெளி $S$" என்று அழைக்கப்படுகிறது. மாதிரி அளவு '$n$' என்றமைந்த மொத்த மாதிரிகளின், எடுகோளை நிராகரிப்பதற்குச் சாதகமாக விளங்கும் மாதிரிகளின் கணம்$=w$ என்பது, $S$ கணத்தின் துணைக் கணமாகும். இக்கணம் அமைந்த பகுதியே, எடுகோளுக்கான "தீர்வு கட்டமான பகுதி" (Critical Region) எனப்படுகிறது. மேலும், $S-w$ என்பது எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவதற்கான பகுதி (Acceptance Region) எனப்படும்.

## 8.1. எளிய எடுகோள் மற்றும் கலவை எடுகோள் (Simple and Composite Hypothesis)

ராண்டம் மாறிகளின் பரவலைப் பற்றிய விவரத்தை முழுமையாக அளிக்கும் அல்லது முழுமையாகக் குறிப்பிடும் எடுகோள் 'எளிய எடுகோள்' என்றழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் ($\mu$, $\sigma$) ஆகியவை சுட்டுறுப்பு), $\mu = \mu_0$, $\sigma = \sigma_0$ ($\mu_0$, $\sigma_0$ என்பவை தெரிந்த மதிப்புகள்) என்றுள்ள ஓர் எடுகோள் எளிய எடுகோளாகும். ராண்டம் மாறிலின் பரவலைப் பற்றிய முழு விவரத்தையும் அளிக்காமல், பரவலின் சில சுட்டுறுப்புகளைக் குறிக்காமல் அமையும் எடுகோள் 'கலவை எடுகோள்' எனப்படும். ஒரு கலவை எடுகோளால் குறிக்கப் படாமல் அல்லது விளக்கப்படாமல் விடப்பட்டுள்ள சுட்டுறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 'வரையற்ற பாகை' என்றழைக்கப்படுகிறது. சுட்டுறுப்புகளின் வெளி $\Omega$-ல் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை, ஓர் எளிய எடுகோள் விளக்குகிறது. ஒரு கலவை எடுகோள் ஒரு புள்ளிக்கு மேலாகக் கொண்ட, $\Omega$-ன் உபகணமாக அமைந்த, மற்றொரு கணத்தில் சுட்டுறுப்பு அமைகிறது என்பதை விளக்குகிறது.

$A_0$, $A_1$ என்ற இரண்டு, ஒத்த எடுகோள்களால் விளக்கப்படும், செயல் நிலைகளைக் கருத்தில் கொண்டு, இவ்விரண்டில் ஏதேனும் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டிய நிலையிலேயே, ஒரு புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை எழுகிறது. இதன் பயனாய், ஒரு புள்ளியியல் எடுகோள், ஒரு மாறெதிரான எடுகோளுடனே எப்போதும் சோதிக்கப்படுகிறது என்பதும் புலனாகிறது. இந்த எடுகோளைச் சோதிக்கப் பயன்படும் எடுகோளைச் "சூனிய எடுகோள்" (Null Hypothesis) எனவும், எதிரான அல்லது மாற்றான எடுகோளை "மாறெதிரான எடுகோள்" (Alternative Hypothesis) என்றும் அழைப்பது வழக்கம். இவை முறையே $H_0$, $H_1$ எனக் குறிக்கப்படும். $H_0$ ஆனது எப்போதும் அதனது நிராகரிப்பிற்கே சோதிக்கப்படும். ஆனால் $H_0$, $H_1$ என்னும் இக்குறியீடுகள் எங்கும் எப்போதும் ஒரே மாதிரியானவை என்று கொள்ளமுடியாது. இரண்டு எடுகோள்களில், எது சூனிய எடுகோள், எது மாறெதிரான எடுகோள் என்பது, சோதனையின் தன்மை, சூழ்நிலை, சோதனையின் எளிமை ஆகியவற்றைப் பொறுத்து அமையும்.

ஓர் எடுகோளானது, ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பரவலை முழுமையாக (Completely) விளக்கினால், அந்த எடுகோளை எளிய எடுகோள் என்றழைக்கிறோம். உதாரணமாக, ஒரு காசு நடுநிலை

மாருத காசு தானு என்றறிய அக்காசினை 30 தடவை சுண்டுகிறோம். இங்கு $n = 30$. இப்போது $H: p = 0 \cdot 5$ என்ற எடுகோள் ஓர் எளிய எடுகோள் ஆகிறது. ஏனென்ருல், காசைச் சுண்டுதல் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பெற்றுள்ளதால் அதன் சுட்டுறுப்புகள் $u, p$ இரண்டு மதிப்புகளும் முழுமையாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

இதேபோல $X$ என்ற ராண்டம் மாறி $\sigma_x = 10$ என்ற திட்ட விலக்கத்துடன் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்தால்,

$$H : \mu = 10 \ (X\text{-ன் சராசரி} = \mu)$$

என்ற எடுகோள் ஓர் எளிய எடுகோள் ஆகிறது. இங்கு இயல்நிலைப் பரவலானது அதன் சராசரி, திட்டவிலக்கம் இவற்ருல் முழுமையாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதே சமயத்தில் ஓர் எடுகோள் முழுமைத் தொகுதியின் பரவலை முழுமையாகக் குறிக்காவிட்டால், அது ஒரு கலவை எடுகோள் (Composite Hypothesis) ஆகிறது.

மேலே கூறிய காசு சுண்டும் உதாரணத்தில் $u = 30$ என்று குறிக்காவிட்டால் $H : p = 0.5$ என்பது ஒரு கலவை எடுகோள் ஆகின்றது; எப்படி என்ருல் $p = 0.5$ஐக் கொண்ட பரவல்களின் ஒரு குடும்பமே (family of distributions) அங்குள்ளது. அதேபோல $u = 30$ என்று தெரிந்தால்)

$H : p \neq 0.5$ என்ற எடுகோள் ஒரு கலவை எடுகோள் ஆகும். ஏனெனில், $n = 30$ஐக் கொண்ட எல்லாப் பரவல்களின் ஒரு குடும்பமே அங்குக் காணப்படும்.

மேலும் ஒரு சூனிய எடுகோளுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறெதிரான எடுகோள்கள் இருக்கக் கூடும்.

உதாரணமாக, $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu = 11$ என்ருல்,

$H_0$ என்ற ஒரு சூனிய எடுகோளுக்கு $H_1 : \mu = 11$ என்ற ஒரே ஒரு மாறெதிரான எடுகோள் உள்ளது.

ஆனுல், $H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu > 10$ என்ருல்,

$H_{11} : \mu = 11,$

$H_{12} : \mu = 12,$

$H_{13} : \mu = 13, \ldots \ldots \ldots \ldots$

என்ற பல மாறெதிர் எடுகோள்கள் இருப்பதைக் காண்கிருேம்.

முழுமையற்ற விவரத்தைக் கொண்டு ஓர் எடுகோள் சோதிக்கப்படும்போது, நமது தீர்மானங்களும் குறைபாடுள்ளவையாய் அமைவதற்கு வாய்ப்பு ஏற்படுகிறது. இந்த நிலையானது ஒரு சிறிய எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கப்படலாம்.

தயாரித்து முடிக்கப்பட்ட பொருள்களின் குவியல் ஒன்று, அவைகளை ஏற்றுக் கொள்ளலாமா அல்லது அவை இன்னும் முழுமை பெருதவையா என்று தீர்மானிகிகப் படுவதற்காகச் சோதிக்கப்படுகிறது என்று கொள்வோம். அக் குவியலிலுள்ள குறைபாடான பொருள்களின் விகிதம் $P$ ஆனது $P_0$-க்கு குறைவாகவோ அதற்குச் சமமானதாகவோ அமைந்தால்; அக் குவியலைச் சந்தைக்கு அனுப்பலாம் என்றும் தீர்மானிக்கப் படுகிறது; $P>P_0$ எனில். ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கதல்ல என்றும் தீர்மானிக்கப்படுகிறது என்றும் கொள்க அக் குவியிலிலிருந்து பெறப்படும் ஒரு கூறின் வாயிலாய்ச் சோதனை நிகழும்போது, கீழ்க்கண்ட நிலைகளும், தீர்மானங்களும் ஏற்பட ஏதுவாகிறது.

| | குவியலில் உண்மையான நிலை | கூறில் காணப் படும் நிலை | தீர்மானம் | குறிப்பு |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $P<P_0$ | $P<P_0$ | ஏற்றக்கொள்க | சரியான முடிவு |
| 2. | $P<P_0$ | $P>P_0$ | ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கது அல்ல | தவருன முடிவு முடிவு |
| 3. | $P>P_0$ | $P>P_0$ | ஏற்றக்கொள்ளத் தக்கது அல்ல | சரியான முடிவு |
| 4. | $P>P_0$ | $P<P_0$ | ஏற்றுக்கொள்க | தவருன முடிவு |

எனவே, $H_0 : p<P_0 : H_1 : p>P_0$ என்பதே நமது எடுகோள்களாகும். தீர்மானம் (2), (4) இவை தவருனவை. தீர்மானம் (2), எடுகோள் உண்மையான இருக்கையில், அந்த எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுவதாக அமைகிறது. எனவே, சூனிய எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்போது, அது நிராகரிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு, "முதல் வகைப்பிழை" அல்லது "நிராகரிப்புப்பிழை" எனப்படும். தீர்மானம் (4), மாறெதிரான எடுகோள் உண்மையாய் இருக்கையில், சூனிய எடுகோளை உண்மை என்று ஏற்றுக் கொள்வதாய் அமைகிறது. எனவே, மாறெதிரான எடுகோள் உண்மையாய் இருக்கையில், சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு "இரண்டாம் வகைப்பிழை" அல்லது

"ஏற்றுக்கொள்ளும் பிழை" எனப்படும். $\alpha$ என்பது முதல் வகைப் பிழையெனவும். $\beta$ என்பது இரண்டாம் வகைப்பிழை எனவும் குறியீடு மூலம் அமைக்கப்படுகின்றன. $S$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு கூறுபுள்ளி $x$ எனில், தீர்வு கட்டமான பகுதி $w$-ன் வாயிலாக, முதல் வகைப்பிழையும்; இரண்டாம் வகைப்பிழையும் கீழ்க்கண்ட வாறு அமையும்.

$$\text{முதல்வகைப்பிழை} = P_r\,(X \in w/H_0) = \alpha$$

$$\text{இரண்டாம் வகைப்பிழை} = P_r(X \in s-w/H_1) = \beta$$

தீர்வு கட்டமான பகுதி $w$-ன் '$\alpha$' என்று குறிக்கப்படும். மேலும், $B$ஆனது மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$ஐச் சார்ந்து அமை கிறது என்பது கண்கூடு. மேலும் $w$-வைச் சார்ந்தவாறும் $\beta$ அமைகிறது.

ஒரு சோதயின் திறம் (Power of A Test) : $\beta$-வரையறுக்கப் படும் விதத்தினின்றும், அதன் நிரப்பியாக உள்ள நிகழ்தகவு. $P_r(X \in w/H_1) = 1-\beta$ என்றமைகிறது. இந்நிகழ்தகவு "சோதனை யின் திறம்" எனப்படும். மேற்கண்ட நிகழ்தகவு, சூனிய எடு கோள் $H_0$ ஆனது, $H_1$ உண்மையாயிருக்கையில், நிராகரிக்கப்படு வதற்கான நிகழ்தகவாக அமைகிறது. எனவே, ஒரு சரியான தீர்மானத்தின் நிகழ்தகவு திறமாக அமைகிறது. எந்தச் சோதனை யிலும், சரியான தீர்மானத்தின் நிகழ்தகவு எவ்வளவு முடியுமோ அவ்வளவு பெரிதாக தீர்மானத்தின் நிகழ்தகவு எவ்வளவு முடியு மோ அவ்வளவு பெரிதாக அமைய வேண்டும் என்பதே நமது குறிக்கோளாகும். ஆனால், கூறினல் அளிக்கப்படும்முழுமையற்ற விவரத்தைக் கொண்டு, இந்த மிகப் பெரிது முகந்த திறத்தின் மதிப்பை எய்துவது முடியாததொன்றாகும். ஒரு நிலையான $\alpha$ மதிப்பிற்கு, $(1-\beta)$-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க, அதிகரிக்கச் சோதனையின் திறத்தின் மதிப்பும் அதிகமாகிறது. மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$ உண்மையாயிருக்கும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட $\alpha$ மதிப்பிற்கு, $H_0$ நிராகரிக்கப்படுவதற்கான வாய்ப்பை எந்த ஒரு சோதனை அதிகமாக ஏற்படுத்துகிறது என்பதைக் கணிக்க வேண்டுமாயின், "திறம்" அத்தகைய வாய்ப்பை அளிக்கும் அளவு கோலாக அமைகிறது. இரண்டு சோதனைகளின் தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவுகள் சமமாக இருந்து, மாதிரி அளவு களும் சரிசமமாக இருக்கையில், அவ்விரண்டு சோதனைகளின் திறமே எச் சோதனை சிறந்தது என்பதைக் காட்டும் கருவியாக அமைகிறது. சுட்டுறுப்பு $\theta$-வின் சார்பாகக் கருதப்படும் திறம், சோதனையின் திறச்சார்பு என்றழைக்கப்படுகிறது. $H_0, H_1$ இவை

$\theta$-வின் குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பொறுத்தமையும் மதிப்புகளாகும். திறச்சார்பு, $\theta$-வின் ஒரே ஒரு மதிப்பைச் சார்ந்து விளங்குமாயின் ஒரு வரை படத்தை அமைக்க ஏதுவாகிறது. கிடை அச்சில் $\theta$-வின் மதிப்புகளையும், திறச்சார்பை நெடு அச்சிலும் குறித்து, இவ்வரைபடம் அமைக்கப்படுகிறது. "திறன் வளைகோடு" என்றழைக்கப்படும் இவ்வளைகோடு, சுட்டுருப்பின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கொத்த திறம் மதிப்புகளைக் கணிக்கப் பயன்படுத்தப் படலாம். ஒரே சூனிய எடுகோள் சோதிக்கப்படும் போது, ஒரே மாதிரியான $\theta$ மதிப்பிற்கு, ஒரே அளவான தீர்வு கட்டமான பகுதிக்கு, இரண்டு திறம் வளைகோடுகளில் ஒன்று மற்றொன்றுக்கு மேலாக அமையுமாயின், மேலாக அமைந்த திறம் வளைகோடு சிறந்தசோதனையைக் குறிக்கிறது சிலநிலைகளில், வெவ்வேறான மாற்று எடுகோள்களுக்கு வெவ்வேறான சோதனைகள் அதிகத் திறத்தைப் பெற்று விளங்கும் ஒரே வரைபடத்தில், திறன் வளை கோடுகள் இணைந்து குறிக்கப்படும் நேரத்தில், இதன் சிறப்பு நன்கு உணர்த்தப்படுகிறது. எனவே, இதன் மூலம் மிக அதிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனையைத் தெரிந்தெடுப்பது ஏதுவாகிறது.

"திறச் சார்பு", $H_0 : \theta = \theta_0$ அதாவது எடுகோளால் குறிக்கப்படும் மதிப்பைப் பெறும் போது, $\alpha$ என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது. எந்த ஒரு சோதனையிலும், நாம் முன்பு குறிப்பிட்ட இரண்டு வகைப் பிழைகளையும் அறவே நீக்குவது இயலாததொன்றாகும். எனவே, இவற்றைக் கூடிய அளவு மீச்சிறுமமாக்குதலே நமது கருத்தாகும். எந்த ஒரு கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூறு அளவுக்கும் இந்தக் கருத்தை அடைய முடியாது. எனவே. இரண்டு வகைப் பிழைகளில், ஒன்றை நிலையானதாக்கி, மற்றொன்றை மீச்சிறுமமாக்குதலே நமது முயற்சிக் குட்பட்டதாகும். எனவே, முதல் வகைப் பிழையின் மதிப்பை நிலையானதாக்கி, இரண்டாம் வகைப்பிழையை மீச்சிறுமமாக்கும் தீர்வு கட்டமான பகுதியைத் தெரிந்தெடுக்கிறோம். அதாவது, முதல்வகைப்பிழையை நிலையானதாக்கி, திறத்தின் மதிப்பை மீப்பெருமமாக்குகிறோம். இந்தக் கோட்பாட்டின் அடிப்படையிலேயே நேமன், பியர்சன் சோதனைகள் அமைகின்றன. $\alpha$ அளவுள்ள ஒரு தீர்வு கட்டமான பகுதியைத்தேர்ந்தெடுத்து, அச்சோதனையின் திறத்தை வேறெந்தச்சோதனையின் திறத்தினைக் காட்டிலும் அதிகமானதாகவோ அல்லது அதே அளவிலேயோ அமைத்தலே செயல்முறையாகும். இத்தகையதொரு தீர்வு கட்டமான பகுதி, "மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி" (Best Critical Region) BCR-பகுதி எனப்படும். இதனைக் கொண்டமைந்த சோதனை 'மிகத் திறம் வாய்ந்த

சோதனை (Most Powerful Test—M. P. Test) எனவும் பெயர் பெறும்.

## 8.2 ஓர் எளிய எடுகோளை, ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோளுடன் சோதனை செய்தல் :

$H_0, H_1$ இவ்விரண்டுமே எளிய எடுகோள்கள் எனில், "மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி", $\alpha$ அளவுடன் அமைவதற்கான முன்நிபந்தனை, பரவல் தொடர்ச்சியானதாக இருத்தல் வேண்டும் என்பதேயாம். இந்த முடிவானது, நேமன் பியர்சன் கோட்பாட்டின் பயனுல் அமைகிறது. அக்கோட்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

**தேற்றம் :** $f(x, O)$ என்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட தனித்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots x_n$ எனில், எடுகோள் $H_i$ $(i = 0, 1)$ என்பது உண்மையாயிருக்கும் போது, $x_1 \ldots x_n$ மதிப்புகளின் நிகழும் தன்மை (likelihood) $p(x, H_i)$ என்று குறிக்கிறோம்.

$H_0 : \theta = \theta_0, H_1 = \theta = \theta_1$ என்றும்,

$$p(x, H_0) = f(x_1, \theta_0) f(x_2, \theta_0) \ldots f(x_n, \theta_0)$$

$$p(x, H_1) = f(x_1, \theta_1) f(x_2 \theta_1) \ldots f(x_n \theta_1)$$

என்றும் கொள்க. தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$ எனக் கொண்டு, $K\ p(x_1, H_1) > p(x, H_0)$ என்று எந்த ஒரு தீர்வு கட்டமான பகுதியின் உட்புறத்தில் $(BCR)$ அமைகிறதோ, அந்தத்தீர்வு கட்டமான பகுதியே "மிகச்சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியாகும். இவ்விடத்து '$k$' என்பது ஒரு நேரெண்ணுகும்.

**நிருபணம் :** $\alpha$ என்ற அளவு கொண்ட ஒரு மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியை '$w$' என்று குறிக்க. பிறகு.

$$\int_w p(x, H_0)\, dx = \alpha$$

$$\int_w p(x, H_1)$$ மீப்பெருமமாக அமையும்.

ஆயினும்,

$$\int_w p(x, H_1) = \int_w \frac{p(x H_1)}{p(x H_0)} \cdot p(x H_0) . dx.$$ மீப்பெருமமாக அமையும்.

எனவே, நிகழ்தகவு ($x \Sigma w \mid H_0$) $= \alpha$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டும், $\frac{p(x\, H_1)}{p(x\, H_0)}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு மீச்சிறுமமாக அமையும் விதத்திலும் $w$, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், அதுவே, மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியாகும். $\frac{p(x\, H_1)}{p(x\, H_0)}$-ன் மிகப்பெரிய மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் மாதிரி வெளியின் ஒரு பகுதி $\alpha$-வை, $w$-உள்ளடக்கியிருக்கும் போது தான், மிகச் சிறந்ததீர்வு கட்டமான பகுதியைப் பெற இயலுகிறது.

எனவே, $\frac{p(x\, H_0)}{p(x,\, H_1)} < k$ என்றமையும் மாதிரி வெளியின் புல்லிகளை "மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி" (*B. C. R.*) பெற்றிருக்கும் என்பது புலனாகிறது. மேலும் $w$-ன் அளவு $\alpha$ என அமையும் விதத்தில் $k$-ன் மதிப்பு பெறப்படுகிறது. எந்த ஒரு $\alpha$-க்கும், மதிப்புகளின் நிகழும் தன்மை (likelihood) தொடர்ச்சியானதாக இருந்தால் தான், மேற்கண்ட முடிவைப் பெற இயலும். $k$ என்பது நிகழ் தன்மைச் சார்பின் விகிதமாக அமைவதால், அது ஒரு நேரெண்ணாகவே அமையும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு $H_0$-க்கு, $k$-ன் மதிப்பானது தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$, மற்றும் மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$ இவற்றின் சார்பாக அமைகிறது.

**உதாரணம் :**

$$f\, x\,;\ a, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-a)^2}$$

என்னும் பரவலில் $\sigma$-ன் மதிப்பு தெரிந்துள்ள நிலையில், $H_0 : a = a_0$ என்ற எடுகோளை, $H_1 : a = a_1$ என்ற மாறெதிரான எடுகோளுடன் சோதிக்க.

தீர்வு : கூறு அளவு '$n$' எனக் கொண்ட ஒரு தனித்த கூறிலிருந்து அமைக்கப்படும் நிகழும் தன்மை சார்பு, $H_i$ ($i = 0, 1$)-ன் கீழ்,

$$P(x,\, H_i) = (\sqrt{2\pi\sigma})^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma (X_i - a_i)^2}$$

$$= (\sqrt{2\pi\sigma})^{-n}\, e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\{(s^2 + (\bar{x} - a_i)^2\}}$$

இவ்விடத்தில் $\bar{x}$, $s^2$ என்பவை கூறு சராசரி, கூறு மாறுபாடு ஆகும். மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி, BCR என்பது

$$\frac{P(x\,H_0)}{P(x\,H_1)} = e^{-\frac{n}{2\sigma^2}[(\bar{x}-a_0)^2 - (x-a_1{}^2]}$$

$$= e^{-\left[\frac{n}{9\sigma^2}\{2\bar{x}(a_1-a_0{}^2)+(a_0-a_1{}^2)\}\right]}$$

$$< K.$$

மடக்கையை (logarithm) இருபுறமும் பயன்படுத்த,

$$\bar{x}(a_1-a_0) > \frac{a_1{}^2-a_0{}^2}{2} - \frac{\sigma^2}{n}\log K.$$

எனவே, மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி, $\bar{x}$-ன் மதிப்பின் வாயிலாகப் பெறப்படுகிறது. $a_1 > a_0$ எனில், மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி.

$$\bar{x} > \frac{a_1+a_0}{2} + \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\log K}{(a_0-a_1)}$$

$\bar{x} > \lambda$, என அமைகிறது.

$$a_1 < a_0 \text{ எனில், } \bar{x} < \frac{a_1-a_0}{2} + \frac{\sigma^2}{n},\frac{\log K}{(a_0-a_1)}$$

$\lambda_1$ $\lambda_2$ என்ற மாறிலிகள், சூனிய எடுகோள் $H_0$ உண்மையாக இருக்கும்போது, $\bar{x} > \lambda_1$, $\bar{x} < \lambda_2$ என்பதற்கான நிகழ்தகவு $\alpha$ என்றமையும் வண்ணம் தேர்ந்தெடுக்கப்படவேண்டும். $H_1$ உண்மையாயிருக்கும்போது, $\bar{x}$-ன் கூறு பரவல் $N\left(ai, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ அதாவது, சராசரி $a_i$, மாறுபாடு $\frac{\sigma^2}{n}$ எனக் கொண்ட ஓர் இயல் நிலைப் பரவலாக அமைகிறது.

எனவே, $\lambda_{,1}$ $\lambda_2$ என்ற மாறிலிகள்,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-a_0)}\,d\bar{x} = \alpha$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\lambda_2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-a_0)^2}\, d\bar{x} = \alpha$$

என்ற உடன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படுகிறது.

$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-a_0)}{\sigma} = y$ என்ற உருமாற்றத்தைக் (Transformation) கருத்தில் கொண்டால்,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\sqrt{n}\,(\lambda_1-a_0)}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot dy = \alpha \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\,\cdot\,\frac{(\lambda_2-a_0)}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy = \alpha \qquad \ldots \quad (2)$$

என்று மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் மாறுகின்றன.

$K_\alpha$ ஆனது, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{K_\alpha}^{8} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot dy = \alpha$ என்றமையின்,

அதன் மதிப்பு இயல்நிலைப் பரவலுக்கான பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து எந்த ஒரு $\alpha$ மதிப்புக்கும் பெற ஏதுவாகிறது.

எனவே,

$$\lambda_1 = a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot K_\alpha$$

$$\lambda_2 = a_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot K_\alpha$$

என்று (1), (2) இவற்றிலிருந்து பெறுகிறோம்.

**8·3** சோதயின் திறம் : $H_0 : a = a_0$, $H_1 : a = a_1 = (>a_0)$ என்று கொள்க. திறம் வரையறுக்கப்படும் விதத்திலிருந்து இச் சோதனைக்கான திறம் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$$திறம் = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-a_0)^2}$$

$$= \int_{\sqrt{n}\left(\frac{\lambda_1 - a_0}{\sigma}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

இவ்விடத்து,

$\lambda_1 = a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} K_{\alpha}$ என்று முன்னமே பெறப்பட்டுள்ளது.

$\lambda_1 = a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} K_{\alpha}$ எனப் பிரதியிட,

$$திறன் = (1-\beta) = \int_{K_{\alpha} - \frac{\sqrt{n}(a_1 - a_0)}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} . dy.$$

திறன் மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$ ஆல் குறிக்கப்படும் '$a$', மதிப்பைச் சார்ந்து விளங்குவது கண்கூடு. $(a_1 - a_0)$-ன் மதிப்பு அதிகரிக்குமாயின், திறத்தின் மதிப்பும் அதிகரிக்கிறது. மாறெதிரான எடுகோளின் அதிகரிக்கும் விலக்கங்களுக்கு, அதிகரிக்கும் திறத்தைக் கொண்ட ஒரு திறச் சார்பு, ஓரியல்புப் பண்பைப் (monotonicity property) பெற்றிருப்பதாகக் கருதப்படும்.

திறம் $= 1 - \beta$ என்று காட்டப்பட்டுள்ள மதிப்பு, $n$-ன் மதிப்பு முடிவிலியை நோக்கிச் செல்கையில், அதாவது $n \to \infty$ எனும் போது ஒரு குறிப்பிட்ட $a_1 (> a_0)$ மதிப்பிற்கு 1 என்றாகிறது ஒரு சூனிய எடுகோள், பலவேறான மாறெதிரான எடுகோளுடன் சோதிக்கப்படும் நிலையில், எந்த ஒரு மாறெதிரான எடுகோளுக்கான சோதனையில், திறத்தின் மதிப்பு, ($n$-ன் மதிப்பு மிகப் பெரிதான மதிப்பை நோக்கிச் செல்கையில்) 1 என்றாகிறதோ, அத்தகைய சோதனையே "கொள்கை மாறாத சோதனை" (Consistent Test) எனப்படும். எனவே, இந்த வரையறையைக் கொண்டு நோக்குகையில், நமது எடுத்துக்காட்டில் காணப்படும் சோதனை கொள்கை மாறாத சோதனையாகும்.

$H_0 : a = a,\ \ H_1 : a = a_1\ \ (< a_0)$ என்ற எடுகோள் சோதனைக்கான திறம்,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{K_\alpha - \frac{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2} y^2} . \, dy$$

என்றமையும். இச் சோதனையின் திறமும், $n \to \infty$ என்னும் போது, 1 என்று அமைவதால், கொள்கை மாறுத சோதனையாக அமைகிறது.

உதாரணம் : $H_0 : \sigma = \sigma_0, H_1 : \sigma = \sigma_1$ என்னும் எடுகோள்களை, $N(\sigma_1 \sigma_2)$ என்ற பரவலில் சோதிக்க.

தீர்வு : மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி,

$$\frac{P(x\, H_0)}{P(x\, H_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1{}^2} - \frac{1}{\sigma_0{}^2}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i{}^2} < K$$

மடக்கையை இருபுறமும் பயன்படுத்தினல்,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma_0{}^2 - \sigma_1{}^2)}{\sigma_0{}^2\, \sigma_1{}^2}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 < n \log\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) + \log K.$$

அதாவது,

$$(\sigma_0{}^2 - \sigma_1{}^2) \sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 < 2\sigma_0{}^2 \sigma_1{}^2 \left\{ n \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) + \log K \right\}$$

$\sigma_0 > \sigma_1$ எனில், மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 < \frac{2\,\sigma_0{}^2\, \sigma_1{}^2}{(\sigma_0{}^2 - \sigma_1{}^2)} \left\{ n \log\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) + \log K \right\}$$

$\sum_{i=1}^{n} X_i{}^2$-ன் பரவல், சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், $n$-வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட $(\chi_1, \sigma_0{}^2)$ என அமைகிறது.

$\alpha$ என்பது தீர்வுகட்டமான பகுதியின் அளவு எனில், $\lambda_1$ $\lambda_2$ என்ற மதிப்புகளை,

$$\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma n/2\;\sigma_0^{\,n}}\int_0^{\lambda_1}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma_0^{\,2}}}\,d\chi^2=\alpha$$

$$\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma n/2\;\sigma_0^{\,n}}\int_{\lambda_2}^{\infty}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma_0^{\,2}}}\,d\chi^2=\alpha$$

என்னும் உடன்பாடுகளிலிருந்து பெற ஏதுவாகிறது. அதாவது,

$$\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma n/2}\int_0^{\lambda_1/\sigma_0^{\,2}}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d\chi^2=\alpha$$

$$\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma n/2}\int_{\frac{\lambda^2}{\sigma_0^{\,2}}}^{\infty}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d\chi^2=\alpha$$

என மேற்கண்ட உடன்பாடுகள் மாற்றம் பெறுகின்றன. குறைபாடான காமா சார்பின் அட்டவணை (Incomplete Gamma Function Table) மதிப்புகளின் மூலம்

$\frac{\lambda_1}{\sigma_0^{\,2}}=k_1,\ \frac{\lambda_2}{\sigma_0^{\,2}}=k_2$ என நிர்ணயிக்கலாம்.

மேற்கண்ட சோதனையின் திறச்சார்பு, $H_1 : \sigma=\sigma_1\ (<\sigma_0)$ எனில்,

$$\frac{1}{2^{n/2}\;\Gamma n/2\;\sigma_1^{\,n}}\int_{\lambda_1}^{0}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\;e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma_1^{\,2}}}\;d\chi^2$$

$$=\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma n/2}\int_0^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1^{\,2}}}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\;e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma n/2} \int_0^{K_1 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2$$

என்றமைகிறது. $H_1 : \sigma = \sigma_1\ (> \sigma_0)$ எனில், திறச் சார்பு,

$$\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma n/2} \int_{K_2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}}^{\infty} (\chi^2)^{\frac{n}{1}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2$$

என்றமைகிறது. மேலும் இத் திறச் சார்புகள் ஓரியல்புப் பண்பைப் பெற்றிருக்கின்றன.

## 8.4 சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனைகள் (UMP Tests) (Uniformly Most Powerful (Tests) :

சென்ற பிரிவில் நாம் விளக்கிய சோதனைகள் நீட்சியாக இச் சோதனைகள் அமைகின்றன. இப்பிரிவில், ஒரு சுட்டுறுப்பின் ஒரு மதிப்பு அல்லது பல்வேறு மதிப்புகளின் கணத்தை, அச் சுட்டுறுப்பின் வெவ்வேருன மதிப்புகளுடன் ஒப்பிட்டு நோக்குகிருேம் எடுத்துக்காட்டு 1-ல், $\bar{x} > \lambda$, என்ற தீர்வுகட்டமான பகுதியானது, மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனையாகும். வெவ்வேருன எடுகோள் தொடடிக்கு $\bar{x} > \lambda$, என்பதே மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதியாக அமைகிறது. எனவே, ஒரே சூனிய எடுகோள் பலவேருன மாறெதிரான எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதனையிடப் படும்போது, ஒரே தீர்வுகட்டமான பகுதி, எல்லா சோதனைகட்கும் மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனையை அளிக்கும் தன்மையைப் பெற்றிருப்பின், அத்தகைய தீர்வுகட்டமான பகுதியியே சீராக மிகத்திறம் வாய்ந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி (Uniformly Most Powerful Critical Region) UMPCR என்றும், அத்தகைய தீர்வுகட்டமான பகுதியில் அமைந்த சோதனை, சீரான மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனை என்றும் அழைக்கப் படுகின்றன. சூனிய எடுகோள் எளிமையானதாகவோ அல்லது கலவையானதாகவோ இந்நிலையில் அமையலாம். மேற்குறிப்பிட்ட இரண்டு எடுத்துகாட்டுகளில் காணப்படும் தீர்வுகட்டமான பகுதிகள், ஒவ்வொரு சோதனையினுலும் குறிக்கப்படும் வெவ்வேருன சோதனைகளின் மாறெதிரான எடுகோள்களுக்கு சீராக மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனைகளாகும்.

கோட்பாடு (Lemma): ஓர் எளிய எடுகோள் ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதனையிடப்படும்போது, அமையும் மிகச்சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதியின் திறம், அத் தீர்வுகட்டமான பகுதியின் அளவைக் காட்டிலும் ஒரு போதும் குறைந்தது அல்ல.

நிரூபனம்: எளிய எடுகோள் $H_0$ ஐ மாறெதிரான எளிய எடுகோள் $H_0$-க்கு எதிராகச் சோதிக்கையில், அளவு $\alpha$ என்றமைந்த மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி $w_0$ என்று கொள்க. பின்னர்,

$$\int_{w_0} p(x H_0)\, dx = \alpha.$$

நேமன்-பியர்சன் கோட்பாட்டின்படி, மிகச்சிறந்த தீர்வு கட்டமானபகுதி $w_0$ எனில், அதன் உட்புறத்தில்

$$Kp(x, H_1) > p(x H_0)$$

$$K\int_{w_0} p(x H_1) > \int_{w_0} p(x H_0)$$

$$K(1-\beta) > \alpha \quad \dots\dots\dots (1)$$

இவ்விடத்து, $\int_{w_0} p(x H_1)\, dx = (1-\beta$, சோதனையின் திறம் ஆகும்.

ஆனால், $S\text{-}w_0$-ன் உட்புறத்தில் அதாவது $w_0$-க்கு வெளிப்புறத்தில்,

$$Kp(x H_1) < p(x H_0)$$

$$K\int_{S-w_0} p(x H_1)\, dx < \int_{S-w_0} p(x - H_0)\, dx$$

$$(1-\alpha) > K\beta \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து,

$$K(1-\beta)(1-\alpha) >, \ K\alpha\beta$$

$(1-\beta)\ (1-\alpha)\ >, \alpha\beta$. ($K$ என்பது நேர் எண்ணாகும்).

$$1-\beta-\alpha > 0.$$

$$(1-\beta) > \alpha.$$

நாம் விரும்பும் முடிவை அடைய ஏதுவாகிறது.

சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனைகள் எப்போதும் அமையும் என்று கூற முடியாது. ஆனால், மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை எவ்விதத்திலும் அமையும். எனவே, சீரான மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனை அமைவதற்கான தேற்றம் கீழ்கண்டவாறு அமைகிறது. $f(x, \theta)$ என்ற பரவல்களின் உண்மையான சுட்டுறுப்புத் (real parameter family) தொகுப்பு ஓர் ஓரியல்பு நிகழ்தன்மை விகிதத்தைப் (monotone likelihood ratio) பெறுவதற்கான நிபந்தனை யாதெனில். எந்தவொரு $\theta < \theta'$ என்ற மதிப்பிற்கும், நிகழ்தன்மைச் சார்புகள் $p(x\ \theta)$, $p(x\ \theta,)$ இவை வெவ்வேறானவையாகும், $\frac{p(x\ \theta'}{p(x\ \theta}$ என்ற விகிதம், $D(x)$ என்ற உண்மை மதிப்பைக் கொள்ளும் சார்பின் பாற்பட்ட ஒரு குறையாத பலனாக non-decreasing $P$) விளங்குவதேயாகும்.

தேற்றம் : $\theta$ என்பது உண்மையான சுட்டுறுப்பாகவும், $f(x, \theta)$ என்பது, $x$ என்ற ராண்டம் மாறியின் பரவலாகவும், $f(x, \theta)$ என்ற பரவல், $D(x)$ என்ற சார்பில், ஓரியல் நிகழ்தன்மை விகிதம் (monotone likehood ratio) எனவும் அமைந்தால், $H : \theta < \theta_0$ என்ற எடுகோளை மாறெதிரான எடுகோள் $H' : \theta > \theta_0$-க்கு எதிராகச் சோதிக்கையில், அச்சோதனைக்கான "சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை" கட்டாயமாக அமைகிறது.

நிரூபணம் : எளிய எடுகோள் $H_0 : \theta = \theta_0$ஐ எளிய மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \theta=\theta_1(>\theta_0)$-க்கு எதிராகச் சோதிக்கையில், ஒரு மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி, $w_0$, $\frac{p(x\ H_1)}{p(x\ H_0)} >$ ஒரு மாறிலி என்று அமையும் விதத்தில் உள்ளது என்பதை அறிவோம். நிகழுந்தன்மைச் சார்புகளின் விகிதம் $\frac{p(x\ \theta')}{p(x\ \theta)}$ என்பது $D(x)$-ன் குறையாத சார்பாதலின் ($\theta' > \theta$ எனில், மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி,

$$D(x) > k_1, \quad (w_0\text{-ன் உட்புறத்தில்})$$

என்றும் அமைக்கப்படலாம். இச் சோதனையின் அளவு, திறம் இவை முறையே $\alpha_1$ $P(\theta)$ என்று கொள்க. பின்னர் $P(\theta_0) = \alpha$.

$\theta = \theta'$ ஐ $\theta = \theta''\ (> \theta')$-க்கு எதிராகச் சோதிக்கையில், மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி, $\frac{P(x\ \theta'')}{P(x\ \theta')} >$ ஒரு மாறிலி (தீர்வுகட்டமான பகுதியின் உட்புறத்தில்) என்றும் விதத்தில் அமைக்கப்படுகிறது. மேலும், நிகழும் தன்மை சார்புகளின் விகிதம் $D(x)$-ல் ஒருமுகமாக (monotone) அமைவதால், இம் மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி $D(x)$-ன் வாயிலாகவும்,

$$D(x) > k_2$$

என்று நிர்ணயிக்கப்படலாம். $k_2 = k_1$ என்று கொண்டால், இப்போது நாம் பெறும் தீர்வுகட்டமான பகுதி, $D(x) > k$. ($w_0$-ன் உட்புறத்தில்) என்னும் விதத்தில் அமைக்கப்பட்ட தீர்வு கட்டமான பகுதியை ஒத்ததாக அமைகிறது. $\theta = \theta'$ என்ற எடுகோளை $\theta = \theta''\ (> \theta')$ என்ற சோதனையின் மிகத் திறம் வாய்ந்த, அளவு $\alpha'$ எனக் கொண்ட திர்வுகட்டமான பகுதி யாகவும் அமைகிறது. $\alpha = P(\theta')$ என்றாகிறது. இச் சோதனையானது மிகத் திறம் வாய்ந்தபடியால், $P(\theta)'' > P(\theta)'$ என்பது எந்தவித $\theta'', \beta'$ மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகிறது. மேலும் திறச்சார்பு $P(\theta)$, ஏறுமுகமாக அமைகிறது,

எனவே, எடுகோள் $H : \theta < \theta_0$ என்பதைச் சோதிக்கும் போது, தீர்வுகட்டமான பகுதி $D(x) > k_1$ ($w_0$-ன் உட்புறத்தில் என்று வரையறுக்கப்பட்டு, அளவு $\alpha$ அல்லது அதற்குக் குறை வாகக் கொண்டு அமைக்கப்படுகிறது. இச் சோதனையின் திறம், எந்த ஒரு மாறெதிரான எடுகோள் $\theta = \theta_1\ (> \theta)$-க்கும் மீப் பெருமமாக அமைகிறது. எனவே இச் சோதனை சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனையாய் $H_0 : \theta < \theta_0$, $H_1 : \theta > \theta_0$ என்ற எடுகோள்களுக்கு, அமைகிறது.

குறிப்பு : இதேபோன்று $H : \theta > \theta_0$, $H' : \theta > \theta_0$ என்ற சோதனைக்கும், தேற்றத்தில் கண்ட அதே நிபந்தனை கொண்டு, ஒரு சீரான மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனை அமைகிறது எனக் காட்டலாம்,

இணைத்தேற்றம் : $B(\theta)\ \theta$ என்ற உண்மையான சுட்டுறுப் பின் சார்பாய் அமைந்த, ஒருமுகமான சார்பு என்றும், $x_1, x_2, x_n$ என்ற '$n$' மதிப்புகளின் கூட்டுப் பரவல் $R(\theta)\ e^{B(\theta)\ N(x)}\ l(x)$ என்றும் அமைந்தால்,

(i) $\theta < \theta_0$ ஐ $\theta > \theta_0$-க்கு எதிராகவும்

(ii) $\theta > \theta_0$ ஐ $\theta < \theta_0$-க்கு எதிராகவும்

சோதிப்பதற்கு, சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனை அமைய ஏதுவாகிறது.

நிரூபணம் : வகை 1: $B(\theta)$ ஏறுமுகமான சார்பாகும்.

$\theta_1 (> \theta_0)$ என்பது ஓர் எளிய மாறெதிரான கருத்தாக அமையட்டும். பின்னர்,

$$\frac{P(x\,\theta_1)}{P(x\,\theta_0)} = \frac{R(\theta_1)}{R(\theta_0)}\, e^{[B(\theta_1) - B(\theta_0)]\, N(x)}$$

இவ் விகிதம், $N(x)$-ன் குறையாத சார்பாக அமைவதால். சென்ற தேற்றத்தின்மூலம் விரும்பிய முடிவைப் பெறுகிறோம்.

வகை-2 : $B(\theta)$ இறங்குமுகமான சார்பாகம்.

$\theta_1 > \theta 0$ எனில், $$\frac{P(\bar{x}\,\theta_1)}{p(x\,\theta_0)} = \frac{R(\theta_1)}{R(\theta_0)}\, e^{[B\ \theta_1 - B(\theta_0)]\, N(x)}$$

என்ற விகிதம் $T(x) = \frac{1}{N(x)}$ என்ற குறையாத சார்பாக விளங்குகிறது,

எனவே, சென்ற தேற்றத்தின் மூலம் விரும்பிய முடிவை அடைகிறோம்.

உதாரணம் : $x$ என்ற ராண்டம் மாறியானது, சராசரி '$a$' மாறுபாடு 1 எனக்கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. இப் பரவிலிருந்து பெறப்பட்ட தனித்த '$n$' மதிப்புகளின் கூட்டு நிகழ் தகவு பரவல்.

$$p(x, a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma(\alpha_i - a)^2}$$ என அமையும்.

$a_1 > a_0$ எனில், $$\frac{p(x\,a_1)}{p(x\,a_0)} \quad e^{\bar{x}(a_1 - a_0) + \frac{1}{2}(a_0^2 - a_1^2}$$

இவ் விதமானது $\bar{x}$-ஐச் சார்ந்த, ஏறுமுகமாக, விளங்கும் சார் பாகும். எனவே, நாம் முன்பு கண்ட தேற்றத்தின்படி,

(i) $a \leq a_0$ ஐ $a > a_0$-க்கு எதிராகவும்,

(ii) $a \geq a_0$ ஐ $a > a_0$-க்கு எதிராகவும்

சோதிக்கச் சீராக மிகத் திறம்வாய்ந்த தீர்வுகட்டமான பகுதிகள் முறையே (i) $\bar{x} \geq \lambda$, (ii) $\bar{x} < \lambda_2$, என்று நிர்ணயிக்கப் படுகின்றன. நாம் முன்பு நிலைநிறுத்திய தேற்றத்திலும், மேற் கண்ட எடுத்துக் காட்டிலும் ஒரு புறத்தான சோதனைகளையே கைக்கொண்டுள்ளோம். மாறெதிரான எடுகோள் $\theta \neq \theta_0$ என்ற மையின், இருபுறத்த சோதனைகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பது இவ்விடத்தில் தோன்றும் கேள்வியாகும். இத்தகைய தொரு சூழ்நிலையில், சில நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு, சீரான மிகத் திறம்வாய்ந்த சோதனை அமையாமல் இருத்தலைக் கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தின்மூலம் காண்போம்.

**தேற்றம் :** $f(x\,\theta)$ என்பது $x$ என்ற ராண்டம் மாறியின் தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவல் என்று கொள்க. இப் பரவ லிலிருந்து பெறப்பட்ட நிகழும் தன்மைச் சார்பான $p\,(x\,\theta)$, $\theta$ஐச் சார்ந்து, தொகையிட்டுக் குறியின் கீழ் (differentiable under integral sign) வகைப் படுத்தப்பட்ட ஏதுவானுல், $p\,(x\,\theta)$ வின் வகையீடான $p\,(x\,\theta)$ எவ்விடத்தும் தொடர்ச்சியானதாக அமை கின்றது; மேலும் ஒருங்கே identically) பூச்சிய மதிப்பைப் பெறுவ தில்லை எனில், $H_0 : \theta = \theta_0$ என்ற எளிய எடுகோளை, பல் வேறுன மாறெதிர் எடுகோள்களுக்கு எதிராகச் சோதிக்கையில், $(\theta - \theta_0)$-ன். நேரான மற்றும் எதிரான எல்லா மதிப்புகளுக்கும், சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த (UMP-சோதனை அமைவதில்லை.

**நிரூபணம் :** $H_0 : \theta = \theta_1$ என்பது ஓர் எளிய மாறெதி ரான எடுகோளாக அமையட்டும். $H_0$, $H_1$ இவற்றின் கீழ், மதிப்புகளின் சார்பு $p\,(x\,\theta_0)$ $p\,(x\,\theta_1)$ என்று அமைகின்றன. $P\,(x, \theta_1)$ ஐ $\theta = \theta_0$) எனக்கொண்டு டெய்லர் தொடரைக் கொண்டு விரித்து எழுதினுல்,

$P\,(x\,\theta_1) = P\,(x\,\theta_0) + (\theta_1 - \theta_0)\; P'\,(x\,\theta')$; $\theta'$ என்பது $\theta$-ன் $(\theta_1\;\theta_0)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்த ஏதேனுமொரு மதிப் பாகும். $P\,(x\,\theta)$ மீது விதிக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தகனைகளை ஊகம் செய்து கொண்டால், எளிய எடுகோள் $\theta = \theta_0$ ஐ $\theta \neq \theta_0$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்கையில் சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை அமைகிறது.

$H_0 : \theta = \theta_0$ ஐ $H_1 : \theta = \theta_1$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்கையில், மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி, $\dfrac{P\,(x\,\theta_1)}{P\,(x\,\theta_0)}$

$> K(\theta_1)$ [ தீர்வுகட்டமான பகுதியின் உட்புறத்தில்) என அமையும்படி நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. இவ்விடத்தில், $k$-ன் மதிப்பு, தீர்வுகட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$-வின் சார்பாக அமைகிறது. எனினும், $k$-ன் மதிப்பை நாம் ஒரு நிலையான மதிப்பாகக் கொள்வதால் அதனை $\theta_1$-ன் சார்பாக அமைக்கிறோம். டெய்லர் தொடரின் மூலம் நாம் பெறும் முடிவைப் பயன்படுத்தினால்,

$$\frac{P(x\theta_1)}{P(x\theta^{\circ})} = 1 + (\theta_1 - \theta^{\circ})\frac{P'(x\theta')}{P(x\theta_0)} > K(\theta_1)$$

$\theta_1 = \theta_0$ எனில், $K(\theta_0) = 1$ எனவே, $K(\theta_1)$ மதிப்பையும், டெய்லர் தொடராக $\theta_0$-ன் பாற்பட்ட தாய் விரித்து எழுதினால், $K(\theta_1) = 1 + (\theta_1 - \theta_0) K'(\theta'')$ ; இவ்வித்து $\theta''$ என்பது $(\theta_1\ \theta_0)$ என்ல இடைவெளியில் அமைந்த ஏதேனும் ஒரு மதிப்பாகும். எனவே,

$$(\theta_1 - \theta_0)\left[\frac{P(x\theta')}{P(x\theta_0)} - K'(\theta'')\right] > 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$\frac{P(x\theta_1)}{P(x\theta_0)} > K(\theta_1)$ என்ற நிர்ணயிக்கப்படும் மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியின் எல்லையில் அமைந்த ஒரு புள்ளியை $\bar{x}$ குறித்தால்,

$$\frac{P(\bar{x}\theta_1)}{P(\bar{x}\theta_0)} = K(\theta_1)$$

எனவே,

$$\frac{P'(\bar{x}\theta_1)}{P(\bar{x}\theta^{\circ})} = K'(\theta_1)$$

$$K'(\theta'') = \frac{P'(\bar{x}\theta'')}{P(\bar{x}\theta_0)}$$

$K'(\theta'')$-ன் இந்த மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட,

$$(\theta_1 - \theta_0)\left[\frac{P'(x\theta')}{P(x\theta_0)} - \frac{P'(\bar{x}\theta'')}{P(\bar{x}\theta_0)}\right] > 0 \quad \dots \quad (2)$$

இந்தத் தீர்வு கட்டமான பகுதி, சீராக மிகத்திறம் வாய்ததாக இருக்க வேண்டுமாயின், $\frac{P(x\theta_1)}{P(x\theta_0)} > K(\theta_1)$ என்ற நிபந்தனையானது, $\theta_1$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாயிருக்க வேண்டும்.

எனவே, (2)-ம், $\theta_1$, $x$, $\bar{x}$ இவற்றின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியின் உட்புறத்தில் ஒருங்கே உண்மையாயிருக்கவேண்டும்.

$(\theta_1 - \theta_0)$ என்பது நேர் மற்றும் எதிர் மதிப்புகளைப்பெற முடியுமாதலின் இவ்வித எல்லா மதிப்புகளுக்கும் (2) உண்மையாயிருக்கவேண்டும். எனவே, $\left[\frac{P'(x\theta')}{P(x\theta_0)} - \frac{P'(\bar{x}\theta'')}{P'\bar{x}(\theta_0)}\right]$ என்ற மதிப்புப் பூச்சியமாகவேண்டும்.

மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியின் வெளிப்புறம், $\frac{P(x\,\theta_1)}{P(x\,\theta_0)} < K(\theta_1)$ என்று வரையறை செய்யப்படுகிறது. மேலும் இதன்மூலம் சமமின்மை (2) குறி மாறுபட்டாலும், $(\theta_1 - \theta_0)$-ன் நேர் மற்றும் எதிர் மதிப்புகளுக்கு, உண்மையாயிருக்கின்றது. எனவே, மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியின் வெளிப்புறத்திலும், $\left[\frac{P'(x\,\theta'}{P(x\,\theta_0)} - \frac{P'(\bar{x}\,\theta'')}{P(\bar{x}, \theta_0)}\right]$ பூச்சியமாகிறது.

$$\text{எனவே}\quad \left[\frac{P'(x, \theta')}{P(x\,\theta_0)} - \frac{P'(\tilde{x}, \theta'')}{P(\tilde{x}, \theta_0)}\right] = 0$$

அதாவது, கூறுவெளி முழுமையிலும்,

$$\frac{P'(x\,\theta')}{P(x\,\theta_0)} = \frac{P'(\tilde{x}\,\theta'')}{P(\tilde{x}, \theta_0)}$$

$P'(x-\theta)$ என்பது $\theta$-வில் தொடர்ச்சியானதாக விளங்குவதால்,

$$\frac{P'(x\,\theta_0)}{P(x\,\theta_0)} = \left[\frac{\partial \log P(x, \theta)}{\partial \theta}\right] \theta = \theta_0$$

என்பது ஒரு மாறிலியாக அமைகிறது. எனவே, இருபுறத்து மாறெதிர் எடுகோளுக்குச் சீராக மிகத்திறம்வாய்ந்த சோதனை அமைவதற்கான முக்கிய நிபந்தனை பெறப்படுகிறது.

மேலும், $\int_S P(x\,\theta)dx = 1.$

தொகையீட்டுக் குறியின்கீழ் வகையீடு அனுமதிக்கப்படுவதால்,

$$0 = \int_S [P'(x\,\theta)]_{\theta=\theta_0}\, dx$$

$$= \int_S \left[\frac{\partial \log P(x\,\theta)}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta_0} P\,(x\,\theta_0)dx$$

இந்த முடிவும், $\left[\frac{\partial \log P(x,\theta)}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta_0}$ என்பது ஒரு மாறிலி என்ற முடிவும் ஒருசேர்ந்து அமையும்போது,

$$\frac{P'(x\,\theta_0)}{P(x\,\theta_0)} = 0$$

என்றுகிறது. அதாவது, $P'(x\,\theta) = 0$ என $S$ வெளியில் ஒருங்கே (identically) அமைகிறது. இது ஒரு வேறுபாடாகும். எனவே, தேற்றம் நிலைநிறுத்தப்படுகிறது.

உதாரணம்: $H_0 : \mu = \mu_0$ என்ற சோதனைக்கு, அலைவெண் பரவல்,

$$f(x,\mu) = e^{-(x-\mu)},\ \mu < x < \infty$$
$$= 0 \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனில், சீரான மிகத் திறம்வாய்ந்த சோதனை இயலுமா?

தீர்வு: $P\,(x\mu) = e^{-\Sigma(X_i-\mu)}$

$$\left[\frac{\partial \log P\,(x\mu)}{\partial \mu}\right]_{\mu=\mu_0} = n, \text{ ஒரு மாறிலி.}$$

எனவே, தேவையான நிபந்தனை தேற்றத்தின் நடுவில் விவரிக்கப்பட்டது, பூர்த்தி செய்யப்படுவதால், $H_0$ஐ இருபுறத்த மாறெதிர் எடுகோள் $H_1 : \mu = \mu_1 \neq \mu_0$ என்பதற்கெதிராகச் சோதிக்கையில், சீராக, மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனை அமைய ஏதுவாகிறது.

வகையீட்டின் கீழ் எல்லை $\mu$-யைச் சார்ந்து அமைவதால், கூறிலுள்ள மிகச் சிறிய மதிப்பு $X_1$ $\mu$-க்கான போதுமான மதிப்பீடாக அமைகிறது.

எனவே, $[X_1 < \mu]$ என்பதற்கான நிகழ்தகவு, 0 என்றாகிறது.

$$\text{எனவே,}\quad \frac{P(x\, H_0)}{P(x\, H_1)} = \infty, \quad x_1 < \mu_1$$

$$= e^{n(\mu_0 - \mu_1)}, \text{ மற்றபடி.}$$

$$\text{எனவே,}\quad e^{n(\mu_0 - \mu_1)} < K.$$

என்பது மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியாக நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. $K$-ன் மதிப்பு தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$ என்றிருக்கும் வண்ணம், தெரிந்தெடுக்கப்படுகிறது.

$e^{n(\mu_0 - \mu_1)}$ என்பது ஒரு மாறிலியாகவும், $x_1 x_2 \ldots x_n$ இவற்றைச் சாராமலும் விளங்குகின்றபடியால், $x_1 > \mu_1$ என்றமைந்த $\alpha$ அளவு கொண்ட எந்தத் தீர்வுகட்டமான பகுதியாலும்,

$e^{n(\mu_0 - \mu_1)} < K$ என்பது பூர்த்திசெய்யப்படுகிறது.

$\mu_1$ஐ, $\mu_0$-க்காட்டிலும் குறைவான அல்லது அதிகமான மதிப்பைக் கொள்ள அனுமதித்தால்,

$$\frac{P(x\, H_0)}{P(x\, H_1)} = \begin{cases} \infty & \mu_0 < x_1 < \mu_1 \text{ எனில்,} \\ e^{n(\mu_0 - \mu_1)} < 1, & x_1 > \mu_1 > \mu_0 \text{ எனில்,} \\ e^{n(\mu_0 - \mu_1)} > 1, & x_1 > \mu_0 > \mu_1 \text{ எனில்,} \\ 0 & \mu_1 < x_1 < \mu_0 \text{ எனில்,} \end{cases}$$

எனவே, மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியானது,

$(x_1 - \mu_0) < 0$, $(x_1 - \mu_0) > c_1$ என்று பெறப்படுகிறது.

$H_0$ உண்மையாயின், $(x_1 - \mu_0) < 0$ என்பதற்கான நிகழ்தகவு '0' ஆகும். $C_1$-ன் மதிப்பு, நிகழ்தகவு $[(x_1 - \mu_0) > C_1 / H_0] = \alpha$ என்ற நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்யும்படி தெரிந்தெடுக்கப்படுகிறது. இந்தத் தீர்வு கட்டமான பகுதி, எல்லா மாறெதிர் எடுகோள்களுக்கும் மிகச் சிறந்ததாகும். எனவே, எல்லா மாறெதிர் எடுகோள்களுக்கும் *சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்ததாகும்.*

**உதாரணம் :** $N(a_1\ \sigma^2)$ என்னும் பரவலில், $H_0 : a = a_0$, $\sigma = \sigma_0$ என்ற சோதனைகட்கு, *சீரான* மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை (UMP சோதனை) அமைய இயலுமா ?

தீர்வு : $H_1 : a=a_1$, $\sigma=\sigma_1$ என்பது ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோள் எனில்,

$$\frac{P(x\ H_1)}{P(x\ H_0)} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\Sigma(X_i-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{\Sigma(X_i-a_0)^2}{\sigma_0^2}\right\}\right]} > K$$

என மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி அமைகிறது. இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறு,

$$s^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)+\frac{(\bar{x}-a_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{(\bar{x}-a_0)^2}{\sigma_0^2} < \frac{2}{n}\log\left[\frac{1}{K}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n\right]$$

$$s^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)+\bar{x}^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)+2\bar{x}\left(\frac{a_0}{\sigma_0^2}-\frac{a_1}{\sigma_1^2}\right) < \text{மாறிலி}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)[s^2+(\bar{x}-\delta)^2] < \text{மாறிலி},\quad \delta=\frac{a_0\sigma_1^2-a_1\sigma_0^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}$$

$$(\sigma_0^2-\sigma_1^2)\ \Sigma\,(x_i-\delta)^2 < \text{மாறிலி}.$$

என்றமைக்கலாம். எனவே, $\sigma_0>\sigma_1$ எனில், மிகச்சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி ($\delta$ ... $\delta$), ($\delta$ என்பது $H_1$ஐச் சார்ந்து விளங்கும்) என்பதை மையமாகக் கொண்ட கோளத்தால் கட்டப்பட்டுள்ளது. $\sigma_1>\sigma_0$ எனில், 'மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி' கோளத்தின் வெளிப்புறம் அமைகிறது. மாறெதிரான எடுகோள் மாறுபடும்போது, தீர்வு கட்டமான பகுதியும் மாறுபடுவதால் இச் சோதனைக்குச் சீராக மிகத்திறம் வாய்ந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியை அமைக்க இயலாது.

## 8.5 கலவை எடுகோள்களைச் சோதித்தல் (Testing Composite Hypotheses)

$x$ என்ற ராண்டம் மாறியின் அலைவெண் பரவல் $f\,(x_1, \theta_1 \ldots\theta_k)$ என்று கொள்க. $H_0 : \theta_1=\theta_{10}\ldots\theta_r=\theta_{r0}$ $(r<K)$ என்னும் விதத்தில் அமைந்த ஓர் எடுகோள் கலவை எடுகோளாகும். ஏனெனில், இந்த எடுகோள் $(K-r)$ சுட்டுருப்புகளைப் பற்றிய விவரத்தை அளிக்கத் தவறுகிறது. இக் கலவை எடுகோள் $(K-r)$ வரையற்ற பாகைகளைப் பெற்றுள்ளது என்று அறியப்

படும். எளிய எடுகோள் சோதனையைப் போன்றே, இவ்விடத்தும் $\alpha$ அளவு கொண்ட தீர்வு கட்டமான பகுதி $w$ஐ,

$$\int_w P(x\, H_0)\, dx = \alpha\, ; \quad \int_w P(x\, H_1)\, dx \text{ மீப்பெருமமாகும்}$$

என்னும் விதத்தில் தீர்மானிக்கவேண்டுவது நமது விருப்பமாகும். இவ்விடத்து, $H_1$ என்பது சுட்டுறுப்புகளைப் பற்றிய எளிய எடுகோளாகும். எடுகோள் $H_0$ஆல் $\theta_{r+1} \ldots \theta_k$ என்னும் $(K-r)$ சுட்டுறுப்புகள் குறிக்கப்படாமல் விட்டுவிடப்படுவதால், $\alpha$-வின் மதிப்பு, பொதுவாக, சுட்டுறுப்புகளின் சார்பாக அமைகிறது. எனவே. $\alpha$ஐ, கலவை எடுகோள் $H_0$-க்கு, ஒருமித்த முறையில் நிர்ணயிக்கமுடியாது. ஆனால், $\alpha$ஐ, குறிக்கப்படாத சுட்டுறுப்புகள் $\theta_{r+1}, \theta_{r+2} \ldots \theta_k$ இவற்றினின்றும் தனிமைப்படுத்தினால்,

$$\int_w P(x\, H_0)\, dx = \alpha$$

என்றமைந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி '$w$', சுட்டுறுப்புகள் $\theta_{r+1}, \theta_{r+2} \ldots \theta_k$ என்ற கூறுவெளிக்கு ஒத்த பகுதி அல்லது சுருக்கமாக 'ஒத்த பகுதி' (Similar Rogions) என்று குறிக்கப்படுகிறது. இத்தகைய ஒத்த பகுதியில் அமைந்த ஒரு சோதனை 'ஒத்த அளவு $\alpha$ சோதனை' என்றழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு கலவை எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கான பிரச்சினைகள் (1) கூறுவெளிக்கு ஏற்ற பகுதியை அமைத்தல், (2) இவ்வாறு அமைக்கப்படும் பகுதிகளிலிருந்து ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோளுக்கான திறத்தை மீச்சிறுமமாக்கும் பகுதியைத் தெரிந்தெடுத்தல் என்று வகைப்படுத்தப்படலாம். இவ்வாறு தெரிந்தெடுக்கப்படும் பகுதியானது, பல்வேறு எடுகோள்களின் தொடருக்கான தேவைப்படும் பகுதி எனில், சீராக மிகத் திறம்வாய்ந்த தீர்வுகட்டமான பகுதியைப் பெறுகிறோம். $H_1$ என்பது பிரச்சினையில் குறிப்பாக அறிவிக்கப்பட்டால் அல்லது, $H_0$ஐப் போலவே அதுவும் ஒரு கலவை எடுகோள் என்று கொள்ளப்படும்.

எனவே, நமது கவனத்தை 'ஒத்த பகுதிகளை' அமைப்பதிலும், அதற்குத் தேவையான சில எளிய முடிவுகளைப் பெறுவதிலும் செலுத்துகிறோம். 'ஒத்த பகுதிகள்' எப்போதும் அமைக்கப்படமுடியாது. குறிக்கப்படாத ஒவ்வொரு சுட்டுறுப்புக்கும் போதுமானதான அளவை அமையும்போதோ அல்லது குறிக்கப்படாத சுட்டுறுப்புக்காக அளவைகளின் இணைப்பு

அமையும்போதோ 'ஒத்த பகுதிகள்' அமைக்கப்பட ஏதுவாகிறது. எனவே, 'போதுமானதான அளவைகள்' அமைந்திடின்தான், 'ஒத்த பகுதிகள்' (Sufficient Statistics) அமைக்கப்படமுடியும் என்பது கண்கூடு. $w$ என்பது அளவு $\alpha$ எனக் கொண்ட தீர்வு கட்டமான பகுதி என்று கொள்க. $D(x)$ என்ற சார்பை,

$$D(x) = \begin{matrix} 1 & x \in w \\ 0 & x \notin w \end{matrix}$$

என்னும் விதத்தில் அமைக்கிறோம். $D(x) = 1$ என்பதைப் பூர்த்தி செய்யும் புள்ளிகளின் கணம், நிராகரிப்புக்கான பகுதியாகும். எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$\int_w P(x, H)\,dx = \int_S D(x)\,P(x, H)\,dx$$

$$= E(D|H)$$

$= H$ உண்மையாயிருக்கும்போது, $D(x)$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு,

மேலும், $E(D|H) = \alpha$ $\quad H = H_0$ என்றிருக்கும்போது.

$=$ திறம் $H = H_1$ என்றிருக்கும்போது.

சுட்டுறுப்பு $\theta$, ஒரு போதுமான மதிப்பினை அனுசரித்தால், மதிப்புகளின் சார்பு $P(x\theta) = \phi(t\theta)\,\chi(x/t)$; இவ்விடத்து $\phi(t\,\theta)$ என்பது போதுமான அளவை $t$-ன் அலைவெண் பரவல், $\chi(x/t)$, ஒரு கொடுக்கப்பட்ட $t$ மதிப்பிற்கு, கூறு மதிப்புக்களின் சார்பாக மட்டுமே அமையும்.

$$E(D) = \int_S D_p(x, \theta)\,dx = \int_S D_\phi(t\,\theta)\,\chi(x/t)\,dx$$

$$= E\{E(D/t)\}$$

இவ்விடத்து, $E(D/t)$ என்பது, கொடுக்கப்பட்ட '$t$' மதிப்பிற்கு, $D$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பைக் குறிக்கிறது. மேற்காணும் முடிவானது ஒரு முக்கியமான பயனைத் தோற்றுவிக்கும் திறன் வாய்ந்தது. $t$ ஆனது $\theta$-க்கான 'போதுமான மதிப்பீடு' ஆதலின், $E(D/t)$ என்பது $\theta$ஐச் சார்ந்து அமைவதில்லை. எனவே, $\theta$ஐப் போன்றே இதுவும் அதே எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை உடையதாயிருக்கின்றது. $t$, $\theta$-க்குப் போதுமானதாக இருக்

கையில் $H_0$, $H_1$ இவ்விரண்டுமே உண்மையாயிருக்கும்போது, $E[E(D/t)]$-லிருந்து, $t$-யைச் சார்ந்து, ஒரு தீர்வு கட்டமான பகுதி, கூறுவெளிக்கானதாக அமைகிறது என்று பெறுகிறோம். மேலும், இத் தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு, திறம் இவை முன்பு கூறப்பட்ட தீர்வு கட்டமான பகுதிக்கான அளவையும் திறத்தையும் பெற்றுள்ளது.

எனவே, 'ஒத்த பகுதிகளை'த் தீர்மானிப்பதற்காக மேற் கூறப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்தவேண்டுமாயின், அளவை களின் முழுமைத் தன்மையின் இணைவைப் பற்றிய பண்பையும் அறியவேண்டியுள்ளது. $\theta_1 \theta_2 .. \theta_k$ என்ற சுட்டுறுப்புகளைச் சார்ந்திருக்கும் பரவல்களின் தொகுதி $f(x; \theta_1 \theta_2 . \theta_k)$ முழுமைத் தன்மை பெறுவதாகக் கருதப்பட வேண்டின், ஏதேனுமொரு சார்பு $\phi(x)$-க்கு ($\theta$-வின் சார்பாக அமையாத),

$$E[\phi(x)] = \int \phi(x) f(x; \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_x) = 0$$

என்றமையவேண்டும். அதாவது, $\phi(x)$ முழுமையாக '0' என அமையவேண்டும்.

உதாரணம் : இயல்நிலைத் திணிவுச் சார்பு,

$$F(x, a, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}$$

முழுமையானது என்று காட்டுக.

தீர்வு : $\phi(x)$ என்பது ஏதேனுமொரு சார்பு எனில், ($a$-யின் சார்பாக அமையாத)

$$E[\phi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2} . \, dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\phi(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}\right] e^{ax} \cdot dx = 0 \qquad \ldots (1)$$

'இலாப்லாஸ் உருமாற்றம்' (Laplace Transformation)

$\phi(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$ என்று அமைகிறது. இந்த உருமாற்றமானது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்தது. '0' என்பது உருமாற்றமே '0' ஆகும்.

எனவே, (1)-லிருந்து,

$$\phi(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0.$$
$$\phi(x) = 0.$$

கொடுக்கப்பட்ட பரவல் முழுமைத்தன்மை உடையது.

உதாரணம் : இப்பொழுது $N(0, \sigma^2)$ஐக் கருத்தில் கொள்க.

$$F(x, 0, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = 0.$$

$\phi(x)$ ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பாக அமையின், மேற்கண்ட சமன்பாடு உண்மையாகும். எனவே, $\phi(x) \neq 0$.

$$\therefore \quad F(0, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

என்பது முழுமையானதன்று.

## 8·6 போதுமான அளவைகளும் ஒத்த பகுதிகளும் (Sufficient Statistics and Similar Regions) :

எடுகோள் $H_0$ஆல் குறிக்கப்படும் சுட்டுறுப்புகளை $\theta_s$ எனவும், குறிக்கப்படாத சுட்டுறுப்புகளை $\theta_u$ என்றும் கொள்வோம். $H_0$ உண்மையாயிருக்குங்கால், $\theta_u$-க்கான போதுமான அளவை '$t$' என்க. $H_0$ உண்மையாயிருக்குங்கால், $t$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $E(D/t) = \alpha$ என்றமையும் வண்ணம் '$w$' என்ற தீர்வு கட்டமான பகுதியை அமைக்க. $D(x)$ ஆனது, $w$-வுடன்,

$$D_x = 1 \quad x \in w$$
$$= x \, 0 \notin w$$

என்னும் விதத்தில் தொடர்புடையது.

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை இருபுறத்திலும் அமைக்க,

$$E(D) = E(D/t) = \alpha.$$

எனவே, தீர்வு கட்டமான பகுதி '$w$' கூறு வெளியை ஒத்திருக்கிறது. மேலும், அதன் அளவு '$\alpha$' ஆகும்.

$E(D/t) = \alpha$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் வகையில் அமைந்த ஒரு சோதனை நேமன் அமைப்பைப் பெற்றிருக்கிறது என்று கூறுகிறோம். $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது $t$ என்ற அளவை $\theta_u$-க்குப் போதுமானதாக அமைகிறது. $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது, $t$ ஆனது முழுவதும் கட்டுண்டிருப்பின் (Completely bounded), பின்னர் $\alpha$ அளவு கொண்ட ஒவ்வோர் 'ஒத்த பகுதியும்' $E(D/t) = \alpha$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்திசெய்கிறது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினை, ஓர் எளிய எடுகோளை, ஒரு நிலையான $t$ மதிப்பிற்கு ஏற்றவாறு சோதிப்பதாக அமைகிறது.

$\alpha$-அளவு கொண்ட எந்த ஓர் ஒத்த பகுதிக்கும்,

$$E\{E\, D/t\} = \alpha$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது, $E\{E(D/t) - \alpha\} = 0$.

$[E(L/t) - \alpha]$ என்ற கோவையானது கட்டுப்படுத்தப்பட்ட $t$-ன் வாயிலாக அமைந்த ஒரு சார்பாகும். $t$ ஆனது முழுமையாகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்டிருப்பின் ஒருங்கே $E(D/t) - \alpha = 0$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே, முழுமையாகக் கட்டுண்டிருக்கும் $t$ அளவை, $\alpha$ அளவு கொண்ட எல்லா ஒத்த பகுதிகளும்,

$$E(D/t) = \alpha$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்கின்றன. நாம் மேற்கண்டவாறு நிலைநிறுத்திய உண்மைகள் மிகப் பெரும் பயன் உடையவை. $t$ ஆனது முழுமையாகக் கட்டுண்டு விளங்கின், ஒவ்வொரு $\alpha$-அளவு கொண்ட ஒத்த பகுதியும், மாறிலி $t$-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவின் ஒரு பகுதி $\alpha$ வைத் தன்னுள் அடக்கியுள்ளது என்று பெறப்படும். $t$ ஆனது $\theta_u$-க்குப் போதுமானதாக அமைந்திருப்பதால், ($\theta_u$, $H_0$-ஆல் குறிக்கப்படாத சுட்டுறுப்புத் தொகுதி தனி மதிப்புகளின் சார்பு $P(x, \theta) = \phi(t\phi)\chi(x/t)$ என்று நாம் முன்பு குறிப்பிட்டு விளக்கம் தந்தவாறு காரணிப் படுத்தப்படுகிறது. $\chi(x/t)$ என்ற சார்பு, $H_0$-ன் சார்பாக அமையும் ஓர் அலைவெண் பரவலாகும். எனவே, $t$-ன் மதிப்பு குறிப்பிட்டதாயின், கலவை எடுகோள் ஓர் எளிய எடுகோளாக மாறுகிறது. $H_1$-ன் கீழ், $t$ என்ற அளவை $\theta_u$-க்குப் போதுமானதாக அமையின், ஒரு குறிப்பிட்ட $t$-ன் மதிப்பிற்குக் கலவையான மாறெதிரான எடுகோளும், ஓர் எளிய எடுகோளாக உருமாற்றம் பெறுகிறது. ஏனெனில், சோதனையின் திறம் அந்நிலையின் குறிப்

பிடப்படாத சுட்டுருப்புகளைச் சார்ந்து விளங்குவதில்லை. அளவை $t$-ஆனது போதுமானதாக அமையின், ($H_0$, $H_1$ இவற்றின் கீழ்) இரண்டு கலவை எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யும் பிரச்சினை, ஓர் எளிய எடுகோளை மற்றோர் எளிய எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதனை செய்தல் என்னும் தெரிந்த முறைக்கு மாற்றம் பெறுகிறது. $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது மட்டுமே $t$ ஆனது போதுமானதாக அமையின், $H_0$ஐ ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$-க்கு எதிராகச் சோதித்தல் என்னும் பிரச்சினை, ஓர் எளிய எடுகோளை, ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோளுடன் சோதிப்பதற்கு ஒப்பாகிறது. இச் சோதனையானது, தொடரான பல மாறெதிர் எடுகோளுக்கு மிகத் திறம்வாய்ந்த சோதனையெனில், அச் சோதனை 'சீரான மிகத் திறம்வாய்ந்த சோதனை' என்று அமைகிறது.

உதாரணம் : $N(a, \sigma^2)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலில் $H_0 : a=a_0$ என்ற எடுகோள் சோதனையை மேற்கொள்க.

தீர்வு : இந்த எடுகோளானது, வரையற்ற பாகை 1 கொண்ட ஒரு கலவை எடுகோளாகும். ஏனெனில், '$\sigma$'-ன் மதிப்புக் குறிக்கப்படவில்லை.

$$P(x\, H_0) = (\sqrt{2\pi\,\sigma})^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{1}^{n}(X_i - a_0)^2}$$

$H_0$ உண்மையாயின் $Z = \Sigma(\alpha_i = a_0)^2$, $\sigma^2$-க்கான போதுமான மதிப்பீடாக அமைகிறது. ஆனால், $H_0$ உண்மையில்லாவிடில், இந்த அளவை போதுமானதாக அமைவதில்லை. $Z$-ன் பரவல்,

$$\alpha\ \frac{1}{\sigma^n}\, Z^{\frac{n}{2}-1}\, e^{\frac{z}{2\sigma^2}} = e^{\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\cdot Z + \frac{n-2}{2}\log Z - n\log\sigma\right\}}$$

இப் பரவலானது ஒரு சுட்டுருப்பு கொண்ட அடுக்குப் (Exponential Distribution) பரவலின் ஒரு தனித்த வகையாதலின், $Z$ ஒரு முழுமையான அளவையாகும். $Z$-ன் மதிப்பை நிலையாக்கி, தீர்வையைப் பெறுகிறோம்.

$H_1 : a = a_1 ;\ \sigma = \sigma_1$ என்பது ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோள் எனில்;

$$\frac{P(x\, H_0)}{P(x\, H_1)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i - a_0)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i - a_1)^2} \quad ...(1)$$

இவ் விகிதம் ஒரு மாறிலியைக் காட்டிலும் குறைவாகவோ, அல்லது அதிகமாகவோ அமைகையில், மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு நாம் பெறும் 'மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி' ஒரு நிலையான $Z$ மதிப்பிற்கு அமையும் கூறுவெளியை ஒக்கும். எனவே, $\sigma$-க்கு எந்த மதிப்பை நாம் அளித்தாலும், அதனால் தீர்வு கட்டமான பகுதி மாற்றம் அடைவதில்லை. எனவே, $\sigma = \sigma_1$ என்று (1)-ல் பிரதியிட, மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியானது

$$e^{\left[\frac{-1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{1}^{n}(X_i-a_0)^2-\sum_{1}^{n}(X_i-a_1)^2\right\}\right]} < \text{ஒரு மாறிலி.}$$

அதாவது, $\bar{X}\,(a_0 - a_1) < \lambda =$ ஒரு மாறிலி என்றாகிறது.

எனவே, $Z$-ன் மதிப்பு நிலையான ஒரு மதிப்பிற்கு, $a_0 > a_1$ எனில், 'மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி' $\bar{x}$-ன் சிறிய மதிப்புகளின் ஒரு பின்னத்தை அல்லது பகுதியை உடையதாயிருக்கிறது. இதேபோன்று $a_0 < a_1$ எனில், $\bar{X}$-ன் பெரிய மதிப்புகளின் ஒரு சிறிய பகுதியைக் கொண்டிருக்கின்றது. இவ்விரண்டு தீர்வு கட்டமான பகுதிகளும், ஒரு குறிப்பிட்ட $Z$ மதிப்பிற்கு, தனித்தனியாக சீராக மிகத் திறம்வாய்ந்தனவாக, பல்வேறு மாற்று எடுகோள் தொடர்கள் $a_1 < a_0$, $a_1 > a_0$ இவற்றிற்கு முறையே அமைகின்றன.

இப்போது,

$$\Sigma\,(X_i - a_0)^2 = \Sigma\,(X_i - \bar{X})^2 + n\,(\bar{x} - a_0)^2$$

$$= \Sigma\,(X_i - \bar{X})^2\left(1 + n\,.\,\frac{(\bar{X} - a_0)^2}{\Sigma\,(X_i - \bar{X})^2}\right)$$

$$= \Sigma\,(X_i - \bar{X})^2\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)$$

இவ்விடத்து, $t$ ஆனது $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு ஸ்டூடண்ட் $t$ பரவலாக அமைகிறது. மேலும், $\Sigma\,(X_i - a_0)^2 = \Sigma\,(X_i - \bar{x})^2 + n\,(\bar{X} - a_0)^2$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, $\bar{X}$ மிகச் சிறிய மதிப்புகளைப் பெறும்போது, $\Sigma\,(X_i - \bar{X})^2$ என்ற கோவை அதன் மிகப் பெரிய மதிப்பினைப் பெறுகிறது என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, $a = a_0$ என்ற எடுகோளை, $a_1 < a_0$ என்ற எடுகோளுடன் சோதிக்கையில், அச் சோதனைக்

-கான மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி. $n\frac{(\bar{x}-a_0)^2}{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}$ என்ற தொடரின் மிகச் சிறிய மதிப்புகளாக அதாவது $(n-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $t$-பரவலின் மிகச்சிறிய மதிப்புகளைக் கொண்டுள்ளது என்று, $\Sigma_i (X_i-a_0)^2 = \Sigma_i (X_i-\bar{X})^2 . \left[1+\frac{n(\bar{x}-a_0)^2}{\Sigma(X_i-\bar{x})^2}\right]$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பெறுகிறோம். $H_0$ உண்மையாயின், $t$-ன் பரவல் $\sigma^2$ சார்ந்ததாக அமைவதில்லை. எனவே, மேற்குறிப்பிட்ட எடுகோள் சோதனையின் மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி $t<$ ஒரு மாறிலி என்பதாக அமையும். $H_1 : a = a_1 \ (<a_0)$ என்ற மாற்று எடுகோளில் $a_1$-ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும், அம் மதிப்பு $a_0$யை விடச் சிறியதாக இருப்பின், இத் தீர்வு கட்டமான பகுதியே மிகச் சிறந்தது. ஆதலால், இத் தீர்வு கட்டமான பகுதி சீராக மிகத் திறம்வாய்ந்தது எனப் பெறுகிறோம். இதேபோன்று, $H_0 : a=a_0$, $H_1 : a = a_1 \ (> a_0)$ என்ற எடுகோள் சோதனையிலும், $t>$ ஒரு மாறிலி என்றமையும் தீர்வு கட்டமானபகுதி, மிகச்சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியாக அமைவதோடு மட்டுமல்லாது, சீராக மிகத் திறம்வாய்ந்ததாகவும் அமைகிறது.

$\Sigma(X_i-a_0)^2$ என்ற அளவை $\sigma^2$-க்குப் போதுமானதாக அமைவதில்லையாதலின், ($H_1$ உண்மையாயிருக்கும் போது), மேற்குறிப்பிட்ட சோதனைகளின் திறம் $\sigma^2$-ன் மதிப்புகளைச் சார்ந்து விளங்குகிறது. முன்பு நாம் குறிப்பிட்ட $t$-பரவல் 'நடுநிலையில்லாத $t$ பரவலாக', அமைகின்றபடியால், அப் பரவலைத் தகுந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியில் வகை காணும்போது திறத்தை அடைய ஏதுவாகிறது. மையப் போக்கற்ற $t$-பரவலின் (Non central $t$ Distribution) 'மையப் போக்கற்ற சுட்டுறுப்பு' (non-centrality parameter) $\frac{(a_1-a_0)^2 . n}{\sigma^2}$ என்றமையும்.

இருபுறத்தான தீர்வு கட்டமான பகுதி சோதனையின் திறத்தை, திறச்சார்பை ஸ்டுடண்ட் $t$-பரவலிலிருந்து பெறும் முறை கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

$$2\int_{t_\alpha}^{\infty} F_{n-1}(t)\, d . F = \alpha,$$ என்று சார்புப்படுத்தப்பட்ட முறையில் $t_\alpha$ அமையட்டும். $F_{n-1}$, $(n-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட ஸ்டுடண்ட் '$t$' பரவலாகவும் அமையட்டும்.

$ns^2 = \Sigma (X_i - \bar{x})^2$ ; $X_i$ தனித்த இயல் நிலைப் பரவலாக $N(a, \sigma^2)$; எனில், $H_0 : a = a_1$ என்ற எடுகோளுக்கு, இருபுறத் தான சோதனை மேற்கொள்ளப்படும்போது, 'அனுசரிப்புப் பகுதி'

$$\left[a_0 - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}} < \bar{x} < a_0 + \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}}\right]$$

என்றமைகிறது. $H_1 : a = a_1$ எனில், இரண்டாம் வகைப் பிழையானது,

$$\beta = P_r\left\{a_0 - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}} < \bar{x} < a_0 + \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}} \middle| a = a_1\right\}$$

என்றமையும்.

$H_1$ உண்மையாயின், $\bar{X}_{1s}$ இவற்றின் இணைந்த பரவல்,

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}\, \sigma^n \sqrt{\frac{n-1}{2}}} s^{n-2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\{s^2 + (\bar{x} - a_1)^2\}} d\bar{x}ds$$

என்று அமைகிறது.

$$\beta(a_1) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{n-1}{2}}\, \sigma^n} \int_0^\infty s^{n-2}\, e^{-\frac{ns^2}{\sigma^2}}$$

$$\left\{ \int_{a_0 - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}}}^{a_0 + \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - a_1)^2} d\bar{x} \right\} ds$$

$$\sqrt{n}\, \frac{(\bar{x} - a_0)}{\sigma} = Z, \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{t_\alpha s}{\sigma} = V$$

என்ற உருமாற்றத்தை ஏற்படுத்த,

$$\left|\frac{\partial(ZV)}{\partial(\bar{x}s)}\right| = \frac{n}{\sqrt{n-1}} \frac{t_\alpha s}{\sigma^2}$$

$$\beta(a_1) = \left(\frac{(n-1)}{2t\alpha^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty v^{n-2}\, e^{-\frac{(n-1)}{2t\alpha^2}} \left\{ \int_{-\rho-V}^{-\rho+V} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \right\} dV$$

$\rho = \frac{\sqrt{n}(a_1 - a_0)}{\sigma}$ ஆகும்.

$$\beta(a_1) = \left(\frac{n\quad 1}{2t\alpha^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty v^{n-2}\, e^{-\frac{n-1}{2t\alpha^2}} [\phi(V-\rho) - \phi(-V-\rho)]\, dV$$

இவ்விடத்து, $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$

**உதாரணம்** : $N(a_1, \sigma^2)$ $N(a_2, \sigma^2)$ என்பன இரண்டு இயல் நிலைப் பரவல்களாகும். $H_0 : a_1 = a_2 = a$ (தெரியாத ஒரு மதிப்பு) என்ற எடுகோளைச் சோதிக்க.

**தீர்வு** : இக் கலவை எடுகோளின் வரையற்ற பாகை '2'. $n_1$ $n_2$ அளவு கொண்ட இரு கூறுகள் இவ்வியல்நிலைப் பரவல்களிலிருந்து பெறப்படுகின்றன.

$$P(x, H_0) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_1(\bar{x}_1 - a)^2 + n_2(\bar{x}_2 - a)^2]}$$

$n = (n_1 + n_2)$, $x_i$, $s_i$ இவை, $2^{th}$ தொகுதியின் கூறு அளவு $n_i$-யின் சராசரி, திட்டவிலக்கம் என்றமைகின்றன. $i = 1, 2$ ஆகும்

$$\bar{x} = \frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)}{n};$$

$$s^2 = n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$$

$H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது மட்டும் $(\bar{x}, s^2)$ இவை இணைந்து $(a, \sigma^2)$-க்குப் போதுமானதாக அமைகிறது.

$$P(x\, H_0) = P(x\,;\, a\,\sigma^2) = F(\bar{x}, s^2\,;\, a, \sigma^2)\, h(x)$$

$F(\bar{x}, s^2;\, a\,\sigma^2)$, $\bar{x}$, $s^2$ இவற்றின் இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல். $\bar{x}$, $s^2$ இவை தனித்தனியே $a, \sigma^2$-க்குப் போதுமான மதிப்பீடுகளாக அமைவதில்லை. மேலும், $(\bar{x}, s^2)$ முழுமையானது மாகும். எனவே, $\bar{x}$, $s^2$ இவற்றை நிலையானதாக்கி நமது விவாதத்தைத் தொடருகிறோம். $H : a, a_2, \sigma_1 = \sigma_2, a_1, a_2$ சராசரிகளின் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் என்ற ஓர் எளிய மாற்று எடுகோளைக் கருதுக.

$$\frac{P(x\, H_0)}{P(x\, H_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^n e^{\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_1(\bar{x}_1 - a)^2 + n_2(\bar{x}_2 - a)^2\} + \frac{1}{2\sigma_1^2}\{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_1(\bar{x}_1 - a_1)^2 + n_2(\bar{x}_2 - a_2)^2\}\right]}$$

மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியானது, மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் அமைந்துள்ள கோவை ஒரு மாறிலிக்குக் குறைவாகவோ அதிகமாகவோ அமையும் விதத்தில் பெறப்படுகிறது. $a, \sigma$ இவற்றைப் பொறுத்தமட்டில், இப் பகுதியானது கூறுவெளியை ஒத்திருப்பதால், $a, \sigma$ இவற்றிற்கு எந்த ஒரு மதிப்பை அளித்தாலும், அதனால் தீர்வுகட்டமான பகுதி மாற்றம் பெறுவதில்லை. எனவே, $a = a_1, \sigma = \sigma_1$ என்று பிரதியிட,

$$e^{\frac{1}{2\sigma^2}\{n_2(\bar{x}_2 - a_2)^2 - n_2(\bar{x}_2 - a_1)^2\}} < \text{ஒரு மாறிலி}$$

என்பது மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியாக அமைகிறது. ஆனால், $\bar{x}$, $s^2$ இவற்றின் மதிப்பு நிலையானதாக்கப்படவேண்டும் எனவே, மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி,

$$\bar{x}(a_2 - a_1) > \lambda(a, a_2, \sigma, \sigma_1, \bar{x}, s^2)$$

எனவே, $\bar{x}$, $s^2$ இவற்றின் நிலையான மதிப்பிற்கு,

$\bar{x}_2 >$ ஒரு மாறிலி, $a_2 > a_1$ எனில்,

$\bar{x}_2 <$ ஒரு மாறிலி, $a_2 < a_1$ எனில்,

இவ்விரண்டு பகுதிகளும் சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்தவை.

$$s^2 = n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \frac{n_1 n^2}{(n_1 + n_2)} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2$$

$$= (n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2) \left\{ 1 + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)} \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2}{(n_1 s_1^2 + n^2 s_2^2)} \right\}$$

$\bar{x}$-ன் மதிப்பு நிலையானதாகையால். $\bar{x}_2$-ன் மிகப் பெரிய மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்புகள் $\bar{x}_1$-ன் மிகச் சிறிய மற்றும் மிகப் பெரிய மதிப்புகளைக் குறிக்கின்றன. எனவே, $\bar{x}_2$-ன் மதிப்புச் சிறிதாக அமைகையில் $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$ மிகப் பெரியதாகவும், எதிரெண்ணாகவும் அமைகிறது; $\bar{x}_2$-ன் மதிப்புப் பெரிதாக அமைந்தால் $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$-ன் மதிப்பும் பெரிதாக, நேரெண்ணாக அமைகிறது. எனவே, தீர்வு கட்டமான பகுதிகள் $\bar{x}_2 >$ ஒரு மாறிலி, $\bar{x}_2 <$ ஒரு மாறிலி என்பவை.

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)} \frac{(n_1+n_2-2)}{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)}} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = t_{n_1+n_2-2} >$$

ஒரு மாறிலி,

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)} \frac{(n_1+n_2-2)}{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = t_{n_1+n_2-2} <$$ ஒரு

மாறிலி

என்றாகிறது: $t_{n_1+n_2-2}$ என்பது $(n_1 + n_2 - 2)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட ஒரு ஸ்டூடண்ட் பரவலாகும். $H_0$ உண்மையாயின் இந்த $t$-பரவல், $a, \sigma^2$ இவற்றின் சார்பாக அமையவில்லையாதலின் $(\bar{x}, s^2)$ பரவலினின்றும் தனித்து விளங்குகின்றன. எனவே, மேற் குறிக்கப்பட்ட தீர்வு கட்டமான பகுதிகள் சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்த தீர்வு கட்டமான பகுதிகளாக எல்லாவித மாற்று எடுகோள்களுக்கும் விளங்குகின்றன.

உதாரணம் : $N(a_1 \sigma^2)$, $N(a_2 \sigma^2)$ இவை இரண்டு இயல் நிலைத் தொகுதிகளாகும். சூனிய எடுகோள் $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ (பொது மதிப்புத் தெரியாது) எனில், சோதனையை விவரிக்க.

தீர்வு : தெரியாத பொது மதிப்பை '$\sigma$' என்று குறிப்பிடுக. $H_0$, 3 வரையற்ற பாகை கொண்ட ஒரு கலவை எடுகோளாகும். $(n_1 + n_2) = n$ எனக் கொள்க.

$$p(x\, H_0) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^n$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[n_1 s_1^2 + n_1 (\bar{x}_1 - a_1) + n_2 s_2^2 + n_2 (\bar{x}_2 - a_2)^2]}.$$

$H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது மட்டும், $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2 = n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)$ இவற்றின் இணைவு $(a_1\ a_2\ \sigma^2)$-க்குப் போதுமானதாக

அமைகிறது எனவே. $\bar{x}_1$, $\bar{x}_1$, $s_2$ இவற்றின் மதிப்பை நிலையான தாக்கி, எடுகோள் $H_0$ஐ மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : a_1 = a_{10}$; $a_1 = a_{20}$, $\sigma_1 \sigma_2$-க்கு எதிராகச் சோதிக்கிறோம். $\sigma_1\ \sigma_2$ இவற்றின் மதிப்பு, திட்ட விலக்கங்களின் குறிப்பிட்ட மதிப்பாகும். மிகச் சிறந்த தீர்வுகட்டமான பகுதி. $\frac{p\,(x\, H_0)}{p\,(x\, H_1)}$ < ஒரு மாறிலி என்று பெறப்படுகிறது.

$$\frac{p\,(x\, H_0)}{p\,(x\, H_1)} = \frac{\sigma_1^{n1}\ \sigma_2^{n2}}{\sigma^n}$$

$$e - \frac{1}{2\sigma^2}\left[n_1 s_1^2 + n_2 s^2 + n_1(\bar{x}_1 - a_1)^2 + n_2(\bar{x}_2 - a_2)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2\sigma_1^2}\left[n_1 s_1^2 + n_1 (\bar{x}_1 - a_{10}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sigma_2^2}\left[n_2 s_2^2 + n_2 (\bar{x}_2 - a_{20})^2\right]$$

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $s^2$ இவற்றின் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு மேற்கண்ட தீர்வு கட்டமான பகுதி கூறுவெளியை ஒத்திருப்பதால், $\sigma = \sigma_1$, $a_1 = a_{10}$ $a_2 = a_{20}$ என்று பிரதியிடும்போதும் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படுவதில்லை.

$$\frac{P(x\, H_0)}{P(x\, H_1)} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{n_2} e\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\{n_2 s_2 + n_2 (\bar{x}_2 - a_{20})^2\}\right]$$

எனவே, மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி.

$$\left(\frac{1}{\sigma^2_2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) s_2^2 < \lambda$$

என்று பெறப்படுகிறது. $\lambda$-ன் மதிப்பு, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $s^2$ இவற்றைச் சார்ந்துள்ளது.

எனவே, $s_2^2\ s_2^2 > \lambda_1$, $\sigma_2 > \sigma_1$ எனில்,

$s_2^2 < \lambda_2$, $\sigma_2 < \sigma_1$

என்பதே மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதியாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட $s^2$ மதிப்பிற்கு, $s_2^2$-ன் மதிப்பு அதிகமாயின் $s_1^2$-ன் மதிப்பு சிறியதாக அமைகிறது. இதன் மறுதலையும் உண்மையாகிறது. எனவே, தீர்வு கட்டமான பகுதிகள்

$$\frac{n_2\ s_2^2}{n_1\ s_1^2} \times \frac{n_1-1}{n_2-1} = F_{n_2-1,\ n_1-1} > \text{ஒரு மாறிலி.}$$

$$\frac{n_2\ s_2^2}{n_1\ s_1^2} \times \frac{n_2-1}{n_2-1} = F_{n_2-1,\ n_1-1} < \text{ஒரு மாறிலி.}$$

என்று உருமாற்றம் பெறுகின்றன. $H_0$ உண்மையாயின், $F$-ன் பரவல் $a_1$, $a_2$ $\sigma$ இவற்றின் மதிப்புகளைச் சார்ந்து அமையாதபடியான, $(\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ s^2)$-ன் பரவலிலிருந்தும் தனித்து விளங்குகிறது. எனவே, இத் தீர்வு கட்டமான பகுதி, மிகச் சிறந்த பகுதியாக மட்டுமன்றி, சீராக, மிகத் திறம் வாய்ந்ததாகவும் அமைகிறது.

**இரு புறத்தான $F$-சோதனையின் திறச்சார்பு (Power Function of Two sided F-Test)**

$$\int_0^{d_1} P(F)dF = \frac{\alpha}{2} \quad \int_{d_2}^{\infty} P(F)dF = \frac{\alpha}{2}$$ என்றமையும் வண்ணம்

$d_1$, $d_2$ இவற்றைக் கருதுக. $P(F)$ என்பது $n_1$, $n_2$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட $F$ பரவலின் நிகழ்தகவு திணிவுச் சார்பாகும். $\chi_1^2$, $\chi_2^2$ என்பவை, $(\chi^2\ \sigma_1^2)$ $(\chi^2\ \sigma_2^2)$ மாறிகளாகும். மேலும் இம் மாறிகள் முறையே $n_1$, $n_2$ வரையற்ற பாகைகளுடன் தனித் தன்மை வாய்ந்தவையாய் விளங்குகின்றன. $\sigma_1 = \sigma_2$ எனில்,

$$F = \frac{\chi_1^2}{n_1} \Big/ \frac{\chi_2^2}{n_2} = \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} \cdot \frac{n_2}{n_1}$$ என்பது ஸ்னடைகர் $F$ பரவலை

$n_1$, $n_2$ வரையற்ற பாகைகளுடன் பின்பற்றுகிறது. $d_1 < F < d_2$ எனில் எடுகோள் $\sigma_1 = \sigma_2$ எனப்படும் எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப் படுகிறது. எனவே, இரண்டாம் வகைப்பிழை,

$$\beta = P_r(d_1 < F < d_2 / \sigma_1 \neq \sigma_2)$$

$\sigma_1 \neq \sigma_2$ எனில், $$F_1 = \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

$$= F\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$ என்பது ஒரு ஸ்னடைகர்-$F$ மாறியாகும்.

$$\beta = \int_{d_1}^{d_2} P\left(F\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) d\left(F\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) = \int_{d_1 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}^{d_2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} P(F)\, dF$$

எனவே, திறச் சார்பு = $(1 - \beta)$

$$= 1 - \int_{d_1 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}^{d_2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} P(F)\, dF$$

மேற்கண்ட திறச் சார்பினின்று ஒரு புறத்த $F$ சோதனைகட்கும் திறத்தின் மதிப்பைப் பெற ஏதுவாகிறது.

## 8.8 நடுநிலை மாருத சோதனைகள் (Unbiased Tests)

எந்த ஒரு புள்ளியியல் சோதனையின் திறமும், ஒரு சரியான முடிவினைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவாகவும், அதற்கேற்ற தீர்வு கட்டமான பகுதி ஒரு தவருன முடிவிற்கான நிகழ்தகவாகவும் அமைகின்றது. எந்த ஒரு சோதனையிலும், சரியான முடிவைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு, தவருன ஒரு முடிவை அடைவதற்கான நிகழ்தகவைக் காட்டிலும் அதிகமாக அமைதல் வேண்டும் என்று விரும்புதல் நியாயமானதே எனவே, சோதனையின் தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவை மேற்கண்ட கோட்பாட்டைக் கருத்தில் கொண்டு, திறத்தின் வாயிலாக அமைக்கிருேம். அதாவது, தீர்வுகட்டமான பகுதியின் அளவானது, அத் தீர்வு கட்டமான பகுதியில் அமையும் சோதனையின் திறத்தைக் காட்டிலும் குறைவானவை என்பதே நமது வழிகாட்டும் கொள்கையாகும். இவ்வாருக அமைந்த ஒரு தீர்வுகட்டமான பகுதியே "நடுநிலை மாருத தீர்வுகட்டமான பகுதி" (Unbiased Critical Region) UCR எனப்படும். இத்தகைய தீர்வுகட்டமான பகுதியில் அமைந்து விளங்கும் சோதனையே "நடுநிலை மாருத சோதனை" (Unbiased Test) என்றழைக்கப்படுகிறது.

$$H_0 : \theta \in \Omega_{H_0},\ H_1 : \theta \in \Omega_{H_1},\ \Omega_{H_0} \cdot \Omega_{H_1}$$

என்பவை $\Omega$ என்ற வெளியின் உட்பிரிவுகள், $H_0$ஐ, $H_1$-க்கு எதிராகச் சோதிப்பதற்கான தீர்வுகட்டமான பகுதியே எனில்,

$$P_r\,(x \in w/H_0) < \alpha.$$
$$P_r\,(x \in w/H_1) > \alpha.$$

$H_1$ என்பது கலவை எடுகோளாக அமையின், ஒவ்வொரு எளிய மாற்று எடுகோளுக்கும், அச் சோதனையின் திறம் $\alpha$-க்கு அதிகமாகவோ $\alpha$ அளவோ இருப்பின், சோதனை "நடுநிலை மாருத சோதனை" என்று அழைக்கப்படுகிறது. சோதனையின்

திறம் எப்போதும், தீர்வுகட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$-வைக் காட்டிலும் அதிகமானதாகவே இருந்தால், அச் சோதனை "சீரான நடுநிலை மாறாத சோதனை" அல்லது "முழுமையாக நடுநிலை மாறாத சோதனை" (Uniformed Unbiased or Completely Unbiased) என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஓர் எடுகோளுடன் பல்வேறு மாற்று எடுகோள்கள் சோதிக்கப்படும்போது, எந்த ஒரு தீர்வுகட்டமான பகுதி, வேறெந்த கொள்கை மாறாத தீர்வுகட்டமான பகுதியைக் காட்டிலும் அதிகத் திறம் வாய்ந்ததாகவோ அதே அளவு திறம் வாய்ந்ததாகவோ இருப்பின், அந்தத் தீர்வு கட்டமான பகுதியின்பாற்பட்ட சோதனை "சீராக மிகத்திறம் வாய்ந்த நடுநிலை மாறாத சோதனை" (UMPU) என்று அழைக்கப் படும். ஆனால், இவ்வாறு ஒப்பிட்டு நோக்குகையில், எல்லாத் தீர்வுகட்டமான பகுதியும் ஒரே அளவு கொண்டவை.

ஒரு *UMPU* சோதனை அமைகின்றதென்றாலும், நாம் சோதனையைத் தெரிந்தெடுக்க, கொள்கைமாறாத் தன்மையைக் கருத்தில் கொள்கிறோம் என்றாலும், *UMPU* சோதனையே மிக்க நலன் பயக்கும் சோதனையாகும். இத்தகைய *UMPU* சோதனை சார்ந்த ஒரு தீர்வு கட்டமான பகுதியை, நேமன் பியர்சன், வகை $A_1$ என்ற தீர்வு கட்டமான பகுதி" (Critical Region of Type $A_1$) என்று பெயரிட்டனர். ஒரு சோதனைக்கு சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்தசோதனை அமையவில்லையெனினும், *UMPU* சோதனைகள் அமைய முடியும். இதுவே இத்தகைய சோதனைகளின் சிறப் பாகும்.

உதாரணம் : $H_0 : a = a_0$, $H_1 : a = a_0 \pm a_1$ என்ற எடு கோள்களை $N(a, 1)$ என்ற இயல்நிலைப்பரவலில் சோதிக்க.

தீர்வு : இத்தகைய சோதனைக்கு நாம் தெரிந்தெடுக்கும் தீர்வுகட்டமான பகுதி இயல் நிலைப்பரவலின் இரண்டு வெவ்வேறு கோடிகளில் அமைந்த இரு தனிப்பகுதிகளின் கூட்டமாகும். ஒவ்வொரு தனிப்பகுதியும் $\frac{\alpha}{2}$ அளவு கொண்டது. $H_0$ உண்மையாயிருப்பின், தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$ ஆகும். சோதனையின் திறம், $H_1 = a_1 > a_0$ எனில்,

$$\int_{-\infty}^{-k_\alpha - \sqrt{n}(a_1 - a)} N(y)\, dy + \int_{k_\alpha - \sqrt{n}(a - a_0)}^{\infty} N(y)\, dy$$

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

$k_\alpha$ ஆனது, $\int_{k_\alpha}^{\infty} N(y)\,dy = \frac{\alpha}{2}$

என்னும் விதத்தில் அமைகிறது.

எனவே, திறச்சார்பு,

$$p(a_1) = \int_{-\infty}^{-k_\alpha} N(y)\,dy + \int_{k_\alpha} N(y)\,dy$$

$$+ \left\{ \int_{k_\alpha - \sqrt{n}(a_1 - a_0)}^{k_\alpha} N(y)\,dy + \int_{k_\alpha - \sqrt{n}(a_1 - a_0)}^{-k_\alpha} N(y)\,dy \right\}$$

$$= \alpha + \int_{k_\alpha - \sqrt{n}(a_1 - a_0)}^{k_\alpha} N(y)\,dy + \int_{k_\alpha}^{k_\alpha \sqrt{n}(a_1 - a^0)} N(y)\,dy$$

$$= \alpha + \int_{k_\alpha - \sqrt{n}(a_1 - a_0)}^{k_\alpha \sqrt{n}(a_1 - a_0)} N(y)\,dy$$

$$= \alpha + \delta_1 > \alpha.$$

இதே போன்று, $a_1 < a_0$ எனில், திறச் சார்பு,

$$p(a) = \alpha + \int_{-k_\alpha + \sqrt{n}(a_1 - a_0)}^{-k_\alpha - \sqrt{n}(a_1 - a_0)} N(y)\,dy$$

$$= \alpha + \delta_2 > \alpha.$$

இயல்நிலைப் பரவலின் சமச்சீரான தன்மையினால் $\delta_1$ $\delta_2$ இவற்றின் மதிப்பு சமமாக அமைகிறது. திறம் $a_1 = a_0$ என்றமை

யும் போது, $\alpha$ என்றுகிறது. எனவே, எந்த ஒரு மாற்று எடு கோளைப் பொறுத்த மட்டிலும், சோதனை நடுநிலை மாறுதது. எனவே, சோதனை சீராக நடுநிலை மாறுதது. ஒரு சோதனையின் திறம் $H_0$-ன் மிக அருகிலமைந்த ஒரு புள்ளியில், தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$வைக் காட்டிலும் அதிகமானதெனில், அச் சோதனை "வட்டார எல்லைக்குட்பட்ட நடு நிலை மாறுதது" (locally unbiased) என்று அழைக்கப்படுகிறது. நாம் மேற் கொண்டுள்ள சோதனையும் வட்டார எல்லைக்கு உட்புறமாக நடு நிலை மாறுதது என்பது, $p(a_1)$ தொடர்ச்சியானதாலும், $a_0$ என்ற புள்ளியைச் சார்ந்து சமச்சீராகவும் அமைகின்ற படியால் பெறப் படுகிறது. ஏனெனில், $p'(a_0) = [p'(a_1)]_{a_1=a_0} = 0$.

$\alpha$ அளவு கொண்ட எந்த ஒரு மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை யும் திறம் $\alpha$-வைக் காட்டிலும் அதிகமானதாகவோ $\alpha$ அளவோ உள்ளபடியால், மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனைக் கொள்கை மாறுத தாக அமைகிறது. நடுநிலை மாறுத ஒரு சோதனையின் திறச் சார்பற்ற விதிக்கப்படும் நிபந்தனையாதெனின், எளிய எடுகோள் $H_0$ஆல் குறிக்கப்படும் மதிப்பில், அச்சார்பு ஓர் ஒப்பு மீச்சிறு மத்தை அடைய வேண்டும்.

**8·9** ஒத்த பகுதிகளும் நடுநிலை மாறுத தன்மையும் (Similar Region and unbiasedness) : $H_0 : \theta_s < \theta_s^\circ$ என்ற ஒரு கலவை எடுகோளை நாம் கருதுவோம். மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \theta_s > \theta_s$ என்று அமையட்டும். $H_0$, $H_1$ என்ற இரண்டு கலவை எடுகோள்களும், மற்றச் சுட்டுறுப்புகள் $\theta_u$ஐ பற்றி ஒன்றும் குறிப்பிடாமல் இருக்கட்டும் எடுகோள் சோதனைக் கான, தீர்வு கட்டமான பகுதி $w$-ன் அளவு $w$ என எல்லா $\theta_u$-க்கும் அமையட்டும். $P(\theta_s, \theta_u)$ என்பது சோதனையின் திறச்சார்பாக அமையட்டும். எனவே,

$$P(H_0, \theta_u) < \alpha.$$

சோதனை நடுநிலை மாறுத் தன்மையைப் பெறவேண்டுமாயின்,

$$P(H_1 \theta_u) > \alpha.$$

என்றமைதல் இன்றியமையாதது. திறச் சார்பானது $\theta_s$-ல் தொடர்ச்சியானதாக அமையின், $(P\ \theta_s^\circ\ \theta_u) = \alpha$ என்று முன்பு கண்ட இரண்டு சமமின்மையினின்றும் பெறுகிறோம். $P(\theta_s^\circ, \theta_u) = \alpha$ என்ற சமன்பாடு, எல்லா $\theta_u$-க்கும் உண்மையானதாகிறது. $H_0 : \theta_q = \theta_s$ என்ற எல்லை எடுகோளை (boundary hypostesis) சோதிக்கையில், $w$ என்பது கூறுவெளிக்கு ஒப்பானது என்றும்

பெறுகிறோம். எனவே, ஒவ்வொரு நடுநிலை மாறுத $H_0$-க்கான சோதனையும், $H_0'$ என்ற எடுகோள் சோதனைக்கு ஒப்பானதே. $H_0'$ என்ற எடுகோளுக்கான சோதனை நடுநிலை மாறுததாகவும் ஒருசில உகந்த பண்புகளைப் பெற்றிருப்பினும், $H_0$-க்கான நடுநிலை மாறுத சோதனையால் அவை பிரித்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் ஒத்த சோதனை $H_0'$ சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்தது எனில், $H_0$-க்கான அச் சோதனை UMPU ஆக அமைகிறது.

கீழ்க்கண்ட பகுதியில் நாம் இருவிதமான நடுநிலை மாறுத தீர்வுகட்டமான பகுதியை ஆராய்வோம். இப் பகுதிகள், நடுநிலை மாறுத தீர்வுகட்டமான பகுதி — வகை $A_1$, வகை $A$ (Type $A_1$ Type $A$,) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

## 8·10 வகை A – நடுநிலை மாறுத தீர்வுகட்டமான பகுதி:

ஒரு பகுதி $w_0$, நடுநிலை மாறுத தீர்வுகட்டமான பகுதி— வகை $A$ என்று அழைக்கப்படவேண்டுமாயின்,

$$\text{(i)} \quad \int_{w_0} P(x, \theta_0)\, dx = \alpha \qquad \dots \quad (1)$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{w_0} P'(x\, \theta_0)\, dx = 0 \qquad \dots \quad (2)$$

$$\text{(iii)} \quad \int_{w_0} P''(x\, \theta_0)\, dx > \int P''(x\, \theta_0)\, dx, \quad (\text{எல்லா } w\text{-க்கும்})$$

என்றமைதல் இன்றியமையாததாகும். $P'(x\,\theta_0)$, $P''(x\,\theta_0)$ என்பன $P(x\,\theta_0)$-ன் முதலாம் மற்றும் இரண்டாம் வகையீடுகளாக, $\theta$-வைப் பொறுத்து, $\theta = \theta_0$ என்றும் புள்ளியியல் அமைகின்றன. $w$ என்பது நிபந்தனை (i) நிபந்தனை (ii) இவற்றைப் பூர்த்திசெய்யும் வேறு தீர்வுகட்டமான பகுதியாகும். சுட்டுறுப்புகளின் மேற் குறிப்பிட்ட இரு மதிப்புகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்று நெருக்கமாக அமைகையில், எந்தச் சுட்டுறுப்பு மதிப்பு மிகப் பொருத்தமானது என்பது பற்றி ஐயப்பாடு எழுவது இயல்பு. இத்தகைய தருணங்களில், சோதனையைத் தெளிவு செய்வதற்கு, கொள்கை மாறுத் தன்மை ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டால், எந்தச் சோதனைக்கான திறம் $H_1 : \theta = \theta_0$ என்ற எடுகோளின் மிக அருகாமையில் மீப்பெருமமாக அமைகிறதோ அந்த சோதனையே ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. இதனையே (iii) குறிக்கின்றது.

நிபந்தனை (i) முதல்வகைப் பிழையையும், நிபந்தனை (ii) பகுதி உட்புறமாகக் கொள்கை மாருத் தன்மையைப் பெறுகின்ற விதத்தையும் கண்காணிக்கின்றது. எடுகோள்களும், அதன் மாற்றும். ஒன்றுக்கொன்று மிகத் தொடர்புடையதாக இருக்கையில்தான் வகை $A$ பகுதியானது பயன்படுத்தப்படுகிறது. நேமன்-பியர்சன் கோட்பாட்டின் மூலம் வகை $A$ தீர்வு கட்டமான பகுதி நிர்ணயிக்கப்படலாம்.

**தேற்றம் :** ஒரு பகுதி $w_0$ வகை $A$—கொள்கை மாருத தீர்வு கட்டமான பகுதியாக அமையவேண்டுமாயின்,

(i) $w_0$-க்குள் $P''(x\,\theta_0) > K_1 P'(x\,\theta_0)+K_2 P(x\,\theta_0)$ (3)

(ii) $w_0$-க்கு வெளியே, $P''(x\,\theta_0) < K_1 P'(x\,\theta_0) + K_2 P(x\,\theta_0)$ ... (4)

($K_1$ $K_2$ இவை, (1), (2) இவற்றைப் பூர்த்தி செய்யும் விதத்தில் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன) என்று விளங்கவேண்டும்.

**நிரூபணம் :** $\phi = \left[\dfrac{\partial \log P(x\,\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=\theta_0}$ என்று கொள்க.

$$\phi = \left[\frac{\partial^2 \log P(x\,\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\theta_0}$$

$$P'(x\,_0) = \phi(x\,\theta_0),\quad P''(x\,\theta_0) = (\phi^1 + \phi^2)\,P(x\,\theta_0)$$

*பின்னர் நிபந்தனை (3), (4)* இவை,

$$\phi^1 + \phi^2 > K_1\,\phi + K_2,\ w_0\text{-க்குள்ளே}$$
$$\phi^1 + \phi^2 < K_1\,\phi + K_2,\ w\ \text{க்கு வெளியே}$$

$\phi'$ என்பது $\phi$-ன் சார்பாக $\phi'=\chi(\phi)$-ல் அமையின் $w_0$ஆனது,

$\chi(\phi) + \phi^2 > k_1\,\phi + k_2$ ($w_0$-க்கு உட்புறத்தில்)

$\chi(\phi) + \phi^2 < k_1\,\phi + k_2$ ($w_0$-க்கு வெளிப்புறத்தில்)

என்று வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$c_j$, $j=1, 2 \ldots m$ என்பவை $\psi(\phi)+\phi^2-k_1\,\phi-k_2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், தீர்வு கட்டமான பகுதியானது $\phi_j=c_j$, $j=1, 2 \ldots m$ என்று அமைகிறது. குறிப்பாக, $\theta$ ஒரு போதுமான மதிப்பீட்டை அனுமதிக்குங்கால்,

$\phi' = A + B\,\phi$ என்றாகும். இவ்விடத்து, $A$, $B$ இவை கூறு மதிப்புகளைச் சார்ந்து அமையவில்லை. இந்நிலையில்,

$\chi'(\phi) + \phi^2 > k_1\,\phi + k_2$ என்ற சமமின்மையானது,

$\phi^2 - a_1\,\phi - a_2 > 0$

என்றாகிறது. $c_1$, $c_2$ இவை, $\phi^2 - a_1\,\phi - a_2 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $w_0$ ஆனது, $\phi < c_1$. $\phi > c_2$ என்று நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. மற்றும் $c_1$, $c_2$ (2), (3) இவற்றையும் பூர்த்தி செய்கின்றன

ஒரு விரிவான உதாரணமாக, ஒரு சுட்டுறுப்பு கொண்டு பரவல் தொகுதியைக் கருத்தில் கொள்கிறோம். இதன் நிகழ் தன்மைச் சார்பு, $R(\theta)\, e^{\theta\, t(x)} l(x)$ என்று அமைகிறது. தொகையீட்டின் எல்லைகள் (limits of integration) $\theta$-யைச் சாராமல் அமைகின்றன. பின்னர் $t(x)$, $\theta$-க்கான போதுமான மதிப்பீடாகும்.

$$\phi = t(x) + \frac{R'(\theta_0)}{R(\theta_0)}$$

$$\phi' = c(\theta_0)$$

$$\text{இவ்விடத்து } c(\theta_0) = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{R'(\theta)}{R(\theta)}\right]. \quad \theta = \theta_0.$$

$$= A + B\phi,\ B = 0,\ A = C(\theta_0).$$

எனவே, வகை $A$ நடுநிலை மாறுத கிடைத்தன்மை மட்டம் $\phi < c_1$, $\phi > c_2$ என்று பெறப்படுகிறது. இதற்கிணையாக, $t(x) < c'$, $t(x) > c_2'$ என்றும் அமைக்கப்படலாம். $c_1'$, $c_2'$ இவை தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$ என்றிருக்கும் வகையிலும், $\theta$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு தீர்வு கட்டமான பகுதியின் உட்புறத்தில் 0 என்னும் விதத்திலும் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன

8·11 நடுநிலை மாறுத தீர்வு கட்டமான பகுதி வகை $A_1$ : ஒரு பகுதி $w_0$ ஆனது, நடுநிலை மாறுத தீர்வு கட்டமான பகுதி வகை $A_1$ என்று கருதப்பட வேண்டுமாயின்,

$$\text{(i)} \quad \int_{w_0} P'(x\,\theta_0)\,dx = \alpha.$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{w_0} P'(x\,\theta_0)\,dx = 0.$$

(iii) $$\int_{w_0} P(x\,\theta)dx > \int_{w} P(x,\,\theta)dx$$

என்று, அனுமதிக்கப்படும் எல்லா $\theta$ மதிப்பிற்கும், நிபந்தனை (i), நிபந்தனை (ii) இவற்றைப் பூர்த்தி செய்யும் எல்லா $w$-க்கும், அமைய வேண்டுவது இன்றியமையாததாகும். வகை $A$, வகை $A_1$ இவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தின் வாயிலாக விளக்கப்படுகிறது.

தேற்றம் : பூஜ்யமில்லாத நிகழ் தன்மைச் சார்பு $P(x\,\theta)$ எனக் கொண்ட கூறு வெளி $S_1$,

$$\phi = \phi(\theta) = \frac{\partial \log P(x\,\theta)}{\partial \theta},$$

$\phi' = \dfrac{\partial^2 \log P(x\,\theta)}{\partial \theta^2}$, $\phi'\ A+B\phi$, $AB$ இவற்றின் மதிப்புகள் கூறு மதிப்புகளைச் சாராமல் அமைகின்றன; $\phi(\theta_0) \neq \phi$ ($S_1$-ல்), எனில், நடுநிலை மாறுத தீர்வு கட்டமான பகுதி வகை $A$, வகை $A_1$ ஆகவும் அமைவது நிச்சயம்.

நிரூபணம் : தேற்றத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளை ஊகம் செய்க. $C_1 < \phi(\theta_0) < C_2$ என்ற வகையில் தீர்வு கட்டமான பகுதி—வகை $A$-யின் வெளிப் பகுதி நிர்ணயிக்கப்படுகிறது என்பதை நாம் முன்னரே கண்டோம்.

$\int_{w_0} p(x\theta)\,dx > \int_{w} p(x,\,\theta)\,dx$ என்று நிரூபிக்கவேண்டியுள்ளது.

இவ்விடத்து, எல்லாப்பகுதி $w$-ம் நிபந்தனை (i), நிபந்தனை(ii) இவற்றைப் பூர்த்தி செய்கின்றன.

$\phi' = A + B\phi$ என்பது ஓர் ஒரு படித்தான வகைக் கெழு சமன்பாடாகும் (Linear Differential Equation) இதனது மிகப் பொதுவான தீர்வு, $\phi = e^{\int B.d\theta}\left\{\int A\, e^{-\int Bd\theta} d\theta + t\right\}$ என்றமைகிறது. $t$ என்பது $\theta$வைக் கொண்டு அமையவில்லை. இத்தீர்வை $\theta$-க்கு தொகையீடு செய்தால்,

$$\log p(x\theta) = R(\theta) + D(\theta)t + X(x)$$

இவ்விடத்து $R(\theta)$, $D(\theta)$ இவை கூறு மதிப்புகளைச் சார்ந்து அமைவதில்லை. $\theta$-க்கு வகைப்படுத்தி, $\theta = \theta_0$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\phi(\theta_0) = R'(\theta_0) + D(\theta_0)\, t \qquad \ldots \quad (1)$$

$D'(\theta_0) = 0$ எனில், (1)ஐ $p(x\theta_0)$ஆல் பெருக்கி, $x$-ன் சார் பாகத் தொகையீடு காண,

$$0 = \int \phi(\theta_0) p(x\,\theta_0) dx = R'(\theta_0) \int p(x\,\theta_0)\, dx$$

$$= R'(\theta_0)$$

எனவே, $\phi(\theta_0) = 0$ (ஓருங்கே) என்று ஒரு மாறுபாடான முடிவை எய்துகிறோம். எனவே, (1)-லுள்ள $D'(\theta_0) \pm 0$. நாம் விரும்பும் முடிவை எய்த, $p(x\theta) \geqslant k_1 p'(x\theta_0) + k_2 p'x\,\theta_0)$,

அதாவது, $p(x,\theta) > (k_1 \phi(\theta_0) + k_2)\, p(x\theta_0)$ ... (2)

என்னும் விதத்தில் $k_1, k_2$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டறிய வேண்டும். மேற்குறிப்பிட்ட முடிவு, பகுதி $w_0$-க்கு உள்ளேயே உண்மையாகும். பகுதி $w_0$-க்கு வெளியே $P(x,\theta) < (K_1 \phi(\theta_0( + K_2)\, P(x,\theta_0)$ என்றமையும் (1)-ல் காணப்படும் முடிவையும், அதற்கு மேற்பட்ட முடிவையும் பிரதியிட்டால், (2)-ன் மதிப்பு,

$$e^{[R(\theta) - R(\theta_0)] + [D(\theta) - D(\theta)]\, t} > K_1 R(\theta_0) + K_1 D(\theta_0)\, t + K_2$$

$$g_1 = R(\theta) - R(\theta_0);\; g_2 = D(\theta) - D(\theta_0);\; K_3 = D(\theta_0)$$

$K_4 = K_1 R(\theta_0) + K_2$ என்று மாற்றங்களை ஏற்படுத்தினால்,

$$e^{g_1 + g_2} > K_3\, t + K_4 \qquad \ldots \quad (3)$$

இவ்விடத்து $g_2 \neq 0$ ஏனெனில், $g_2 = 0$ எனில், $D(\theta) = D(\theta_0)$

$$1 = e^{R(\theta)} \int e^{D(\theta_0)\, t + \chi(x)} . dx$$

$$= e^{R(\theta_0)} \int e^{D(\theta_0)\, t + \chi(x)} . dx$$

எனவே, $R(\theta) - R(\theta_0) = g_1 = 0$; $\theta = \theta_0$ என்பதே $\theta$-வின் ஒரே மதிப்பாகும். ஏனெனில், எந்த ஒரு மாற்று எடுகோளும்

$\theta_0$ உடன் பொருந்தி அமைகிறது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினையை, (3)ஐப் பூர்த்தி செய்யும் விதத்தில் $K_3$ $K_4$ என்ற மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்தலுக்கு மாற்றுகிறோம்.

முதலில், வகை $A$–யில் காணப்படும் மாறிலிகள் $C_1$ $C_2$ இவை ஒன்றுக்கொன்று வேறானவை என்று கொள்வோம். பின்னர், $\phi(\theta_0) = R'(\theta_0) + D\theta_0) t$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

(i) $\phi(\theta_0) = C_1$ எனில் பின்னர் $t = \dfrac{C_1 - R'(\theta_0)}{D'(\theta_0)} = t_1$

(ii) $\phi(\theta_0) = C_2$, எனில் பின்னர் $t = \dfrac{C_2 - R'(\theta_0)}{D'(\theta_0)} = t_2$

இந்நிலையில் $t_1$, $t_2$ இவை வேறானவை என்பது கண்கூடு $K_3$, $K_4$ இவற்றை,

$$K_3 t_1 + K_4 = e^{g_1 + g_2 t}$$

$$K_3 K_2 + K_4 = e^{g_1 + g_2 t}$$

என்னும் விதத்தில் தெரிந்தெடுக்கவும். பின்னர் (3) ஆனது எல்லைப் புள்ளிகளில் பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது. (3) ஆனது தீர்வு கட்டுமானப் பகுதியின் உட்புறம் உண்மையானது என்பதை விளக்க,

$$e^{g_1 - g_2 t} > K_3 t + K_4. \ \phi(\theta_3) < C_1 \ \phi(\theta_0) > C_2$$
என்றிருக்கும்போது)

$$e^{g_1 + g_2 t} < K_3 t + K_4 \ (C_1 < \phi(\theta_0) < C_2$$
என்றிருக்கும்போது)

என்பதை நிலைநிறுத்தினால் போதுமானது. இதற்கென, $Z = e^{(g_1+g_2 \ t) - k_3 t - k_4}$ என்று வரையறை செய்கிறோம். $Z$-ஐ $t$ சார்ந்து, வகையீடு காண

$$Z' = g_2 \ e^{g_1 + g_2 t - k_3}$$

$$Z'' = g_2^2 \ e^{(g_1 + g_2 \ t)}$$

இரண்டாவது வகையீடானது நேரெண்ணாதலின், முதலாவது வகையீடு $t$-ல் அமைந்து ஒருங்கே ஏறுமுகமான சார்பாகும்.

எனவே, $Z$ ஆனது $t_1$, $t_2$ இவற்றிற்கு இடையே ஒரே ஒரு மீச் சிறுமத்தையே உடையது. மேலும் $t_1$. $t_2$ என்ற புள்ளிகளில் $Z$ மாறுகிறது. எனவே, இப்புள்ளிகளுக்கும், நேரெண் மதிப்பை அடையும் புள்ளிகளுக்கிடையே எதிரெண்ணாக அமைகிறது.

$$\text{எனவே, } e^{g_1+g_2t} > k_3t+k_4, \ (\phi(\theta_0)<c_1, \ \phi(\theta_0)>c_2 \text{ எனில்})$$

$$e^{g_1+g_2t} < k_3t+k_4, \qquad c_1<\phi(\theta_0)>c_2 \text{ எனில்,}$$

இப்பொழுது $C_1 = C_2 = C$ என்று ஊகம் செய்து கொள்க. $k_3$, $k_4$ என்னும் மதிப்புகளை,

$$R'(\theta_0)+D'(\theta_0)\,t_3 = c$$

$$g_2\, e^{(g_1+g_2\ t_3)-k_3}$$

$$e^{(g_1+g_2\ t_3)-k_3\ t_3-k_4} = 0.$$

என்றும் சமன்பாடுகள் பூர்த்தி செய்யப்படும் விதத்தில் தெரிந் தெடுக்கப்பட வேண்டும். $Z$ ஆனது $t=t_3$ என்ற புள்ளியில் ஒரு மீச்சிறுமத்தைப் பெற்றுள்ளது; மேலும் இப்புள்ளியில் '0' என மதிப்பு பெறுகிறது. $\phi(\theta^0)=C$ எனில், அனுமதிக்கப்படும் பகுதி,

$$e^{g_1+g_2\,t} = k_3\,t+k_4$$

எனவே, தீர்வு கட்டமான பகுதியின் உட்புறத்தில், $e^{g_1+g_2\ t} > k_3\,t+k_4$. எனவே, நிருபணம் முழுமையடைகிறது.

உதாரணம் : $H_0 : a=a_0$ என்ற எடுகோளை $N(a, 1)$ என்ற பரவலில் சோதிக்க, வகை $A$ பகுதியைப் பெறவும். இப்பகுதியே வகை $A_1$ ஆகவும் அமைகிறதா என்று காண்க.

தீர்வு : தனி மதிப்புகள் சார்பு $P(x, a)$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-n}\ e^{-\frac{1}{2}\Sigma(X_i-a)^2}.$$

$\phi(\theta_0)$ வரையறை செய்யப்படும் முறையிலிருந்து,

$$\phi(\theta_0) = \phi = \Sigma(X_i-a_0) = n(\bar{x}-a_0)$$

$$\phi' = -n.$$

$\phi'$ என்பது, $A+B\phi$ என்ற அமைப்பைப் பெற்றுள்ளது. $A=-n$. $B=0$ ஆகும். எனவே, வகை $A$ பகுதியானது, $\phi<c_1$, $\phi>c_2$ என்று அமைகிறது. $\phi \propto (\bar{x}-a_0)$ என்றமைவதால், தீர்வு

கட்டமான பகுதியாவது, $d_1 < \bar{x}$, $d_2 > \bar{x}$. $d_1$, $d_2$ என்ற மாறி லிகள்

$$\int_{-\infty}^{d_1} (\bar{x} \quad a_0)\, e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-a_0)^2} \cdot d\bar{x} + \int_{d_2}^{\infty} (\bar{x}-a_0)\, e^{-\frac{u}{2}(\bar{x}-a_0)^2} d\bar{x} = 0$$

என்னும் விதத்தில் பெறப்படுகின்றன. அதாவது,

$$\int_{d_1}^{d_2} (\bar{x}-a_0)\, e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-a_0)} d\bar{x} = 0.$$

$\bar{x}$-ன் பரவல் சமச்சீருடையது. ஆதலின், $d_1$, $d_2$ இவை $\sigma_0$-லிருந்து சமதூரத்தில் அமைகின்றன. மேலும் $d_1$, $d_2$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1}^{d_2} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-a_0)^2} d\bar{x} = 1 - \alpha.$$

என்ற நிபந்தனையையும் பூர்த்தி செய்ய வேண்டுவது அவசியம்.

$$\text{எனவே, } \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi 2}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-a_0)^2} d\bar{x} = \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_2}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-a_0)^2} d\bar{x}$$

தீர்வு கட்டமான பகுதி, இரண்டு வெவ்வேறு முனைகளின் அமைந்த, சமபரப்புள்ள இரு பிரிவுகளின் கூடுதலாக அமைகிறது. $\bar{x}$-ன் பரவல் இதற்குப் பயன் பெறுகிறது. இச் சோதனையே, $a = a_0$, $a \neq a_0$ என்ற எடுகோள் சோதனைக்கான, இரு புறத்த சோதனையாகும்.

$$\text{மேலும், } \phi(\theta_0) = (\Sigma\alpha_i = a_0) \neq 0 \quad (\text{ஒருங்கே } S_1\text{-ல்})$$

எனவே, வகை $A$ பகுதியானது, வகை $A_1$ எனவும் அமைகிறது.

உதாரணம்: $N(a, \sigma)$ என்ற இயல் நிலைப்பரவலில் $H_0 = \sigma = \sigma_0$ என்ற சோதனைக்கான வகை $A_1$ சோதனை அமைகிறதா என்று ஆராய்க.

தீர்வு : $p(x;\sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma X_i^2}$

$$\phi(\sigma_0) \equiv \phi = \left[\frac{\partial \log\ p\ (x\ \sigma)}{0\ \sigma}\right]_{\sigma=\sigma_0}$$

$$= -\frac{n}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0^3}\Sigma x_i^2$$

$$\phi' = \frac{n}{\sigma_0^2} - \frac{3}{\sigma_0^4}\Sigma x_i^2 = A + B\phi$$

$$A = -\frac{2n}{\sigma_0^2},\ B = -\frac{3}{\sigma_0}$$

எனவே, நடுநிலை மாறுத தீர்வு கட்டமான பகுதி வகை $A$, $\phi < C_1'$, $\phi > C_2'$ என்றமைக்கப்பட வேண்டும். $\phi$யின் கோவையிலிருந்து, $\Sigma x_i^2$ஐத் தீர்வு கட்டமான பகுதியை நிர்ணயிக்கப் பயன்படுத்தலாம் என்று தெளிவாகிறது. $\frac{\Sigma x_i^2}{\sigma^2}$ பரவல், $H_0$ உண்மையாயிருக்கும் போது, $n$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ என அமைகிறது. $v = \frac{\Sigma x_i^2}{\sigma^2}$ என்று எழுதுக. வகை $A$ பகுதியின் உள், வெளி ஆகிய இரு புறங்களிலும் $\phi$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு '0' ஆதலின், $C_1$, $C_2$ ஆகியவற்றை,

$$1.\quad \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\frac{n}{2}}\, v^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-v}.\ dv = 1 - \alpha.$$

$$2.\quad \int_{C_1}^{C_2} \frac{(v-n)}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\frac{n}{2}}\, v^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{v}{2}}.\ dv = 0$$

என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு, நிர்ணயிக்க வேண்டியுள்ளோம். நிபந்தனை (2) ஆனது,

$$\int_{C_1}^{C_2} v^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{v}{2}}\, dv = n\int_{C_1}^{C_2} v \int_{C_2}^{C_2} v^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{v}{2}}\, dv$$

அதாவது,

$$-2\int_{C_1}^{C_2} v^{\frac{n}{2}}\, d\left(e^{-\frac{v}{2}}\right) = n\int_{C_1}^{C_2} v^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{v}{2}} \cdot dv.$$

$$\therefore \left. v^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}v} \right]_{C_1}^{C_2} = 0$$

$$\therefore C_1^{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{C_1}{2}} = C_2^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{C_2}{2}}$$

மேற் காணப்படும் சமன்பாட்டிற்கான ஒரு தீர்வு, நிபந்தனை (1)ஐயும் பூர்த்தி செய்யுங்கால், $v$-ன் வாயிலாக, அமைந்த நடுநிலை மாருத தீர்வுகட்டமான பகுதி—வகை $A$ஐ மேற்கண்ட சோதனைக்கு அமைகிறது.

$\phi(\sigma_0) \neq 0$ ஆதலின், வகை $A$ பகுதியானது தேவையானதாக வகை $A_1$, ஆகவும் அமைகிறது. $\chi^2$-ன் பரவலின் இரு சம பரப்புள்ள பகுதிகளைக் கொண்ட இருபுறத்த சோதனையானது நடுநிலை மாருதது அல்ல. வகை $A_1$ அல்லது வகை $A_1$-ன் நடுநிலை மாருதது அல்ல.

$$c_1^{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{c_1}{2}} \cdot c_2^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{c_2}{2}}$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, இருபுறத்த தீர்வுகட்டமான பகுதி அமையமுடியாது என்பது தெளிவு.

கலவையான எடுகோள்கள் சோதிக்கப்படும்போது, நடுநிலை மாருத சோதனைகள் அமைய ஏதுவாகின்றன. ஒரு மாறிலியை அதாவது, பல்வேறு சுட்டுறுப்புகளில் ஒன்றே என்று எடுகோளால் குறிக்கப்படும்போது அமையும் கலவை எடுகோள் சோதனைகள் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை.

முன்பிரிவில் குறிப்பிட்டுள்ளதுபோலவே, வட்டார எல்லைக்கு உட்புறமான (Locally) நடுநிலை மாருத தீர்வுகட்டமான பகுதி, சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த நடுநிலை மாருத தீர்வுகட்டமான பகுதி என இரண்டு வகைப் பகுதிகளைக் கருதுகிறோம். இவை முறையே வகை $B$, வகை, $B_1$, என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

**8·1 நடுநிலை மாறாத தீர்வுகட்டமான பகுதி—வகை $B$ :**

ராண்டம் மாறி $X$ ஆனது $F(x; \theta_1 \theta_2 \dots \theta t)$ என்ற பரவலாக அமைந்துள்ளது என்று கொள்க. $\lambda$ என்பது $(\theta_2 \theta_3 \dots \theta_e)$ என்பதைக் குறிக்கட்டும். $(\theta_1 \theta_2 \dots \theta_e) = (\theta_1, \lambda)$ ஒரு நிபந்தனையுடன் (with one constant) அமைந்த கலவை எடுகோள் $H_0 ; \theta_1 = \theta_1{}^0$. அதாவது, $\theta \Sigma \Omega_H$ .

**வரையறை 1:** $w_0$ என்பது வகை-$B$ என்ற தீர்வுகட்டமான பகுதி என்றழைக்கப்படவேண்டுமாயின், அனைத்து $\theta \Sigma \Omega_H$

(i) $$\int_{w_0} P(x; \theta_1{}^0, \lambda)\, dx = \alpha$$

(ii) $$\int_{w_0} P'(x, \theta_1{}^0, \lambda)\, dx \text{ மற்றும் } \int_{w_0} P''(x, \theta_1{}^0, \lambda)\, dx$$

அமைந்து விளங்குகின்றன.

(iii) $$\int_{w_0} P'(x; \theta_1{}^0, \lambda)\, dx = 0$$

(iv) $$\int_{w_0} P''(x; \theta_1{}^0, \lambda)\, dx > \int_{w_1} P''(x; \theta_1{}^0, \lambda)\, dx$$

இவ்விடத்து $w_1$ என்பது நிபந்தனைகள் (i), (ii), (iii) இவற்றைப் பூர்த்திசெய்கின்றன என்ற நான்கு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி

செய்யப்படவேண்டும். $P(x_1 \theta_1, \lambda)$ என்பது, $\theta$ சுட்டுருப்பு மதிப்பாக அமையுங்கால், தனி மதிப்புகளின் சார்பாகும். $P'(x\, \theta_1{}^0, \lambda)$, $P''(x\, \theta^0, \lambda)$ என்பன $\theta_1 = \theta_1$ என்ற புள்ளியில், $\theta$ சார்ந்த முதலாம் மற்றும் இரண்டாம் வகையிடுகளாகும், இதே குறியிடுகளைக் கொண்டு, வகை $B_1$ பகுதியை வரையறுக்கிறோம்.

**வரையறை 2:** $w_0$ என்பது வகை-$B_1$ என்ற தீர்வுகட்டமான பகுதி என்று விளங்கவேண்டுமாயின், எடுகோள் $H_0 : \theta \Sigma \Omega_H$ $\theta \Sigma \Omega_H$ என்ற சோதனையில்,

(i) $$\int_{w_0} P(x_1\, \theta_1{}^0\, \lambda)\, dx = \alpha$$

(ii) $\int_{w_0} P'(x_1 \theta_1^{\circ}, \lambda)\, dx = 0$

(iii) $\int_{w_0} P'(x\, \theta_1\, \lambda)\, dx$, $\theta_1$-ல் தொடர்ச்சியானதாக,

$\theta_1 = \theta_1{}^{0}$ என்ற புள்ளியில் அமைகிறது. $\theta \Sigma \Omega_H$.

(iv) $\int_{w_0} P(x_1\, \theta_1\, \lambda)\, dx > \int_{w_1} P(x,\, \theta_1\, \lambda)\, dx$,

இவ்விடத்து எல்லா $w$-க்களும் மேற்கூறிய மூன்று நிபந்தனைகளையும் பூர்த்தி செய்கின்றன என்னும் நான்கு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

கீழ்க்கண்ட ஊகங்களைக் கொண்டு, தீர்வு கட்டமான பகுதி வகை $B$ அமைவதற்கான தேற்றத்தை நிலைநிறுத்துகிறோம்.

(a) எந்த ஒரு $\theta \in \Omega$, தீர்வு கட்டமான பகுதி $w$-க்கும்,

(1) $P(w/\theta) = \int_{w} P'(x;\ \theta) dx$,

$x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, $dx = (dx_1\ dx_2, \ldots\ dx_n)$ என்றமையும் விதத்தில், $P(x,\ \theta)$ என்ற நிகழ்தகவு திணிவுப்பரவல் அமைந்துள்ளது.

(b) கூறுவெளி $S$லுள்ள, $P(x\ \theta) > 0$ எனப்படும் பகுதி $S_1$, $\theta$ வைச் சாராமல் அமைந்துள்ளது. $\theta \in \Omega_H$

(c) $S_1$-ல் அமைந்துள்ள எல்லா $x$-க்கும், $\theta \in \Omega_H$க்கும், $P(x\ \ \theta)$ ஆனது $\theta_1$-வைச் சார்ந்து இரு முறை வகைப் படுத்தப்பட ஏதுவாகிறது $\theta_2, \theta_3, \ldots\ \theta_e$ஐச் சார்ந்து பன்முறை வகைப்படுத்தப்பட ஏதுவாகிறது. எந்த வொரு $w$, $\theta \in \Omega_H$, $P(w/\theta)$-வின் வகையீடுகள் அமைகின்றன.

$$\phi_i = \frac{\partial \log P(x_1 \theta)}{\partial \theta_i}\ ;\ \phi_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta_j},\ i,\ j = 1,\ 2\ \ldots\ l.$$

(d) எல்லா $x \in S_1$, $\theta \in \Omega_H$, $\phi_i = \phi_i(x,\ \theta)$, $x$-ன் சார்பாகத் தொடர்ச்சியானதாகிறது.

$$(2)\quad \phi_{ij}=A_{ij}+\sum_{k=2}^{l} B_{ijk}\,\phi_k,\quad ij = 2 \dots l.$$

$$(3)\quad \phi_{i1}=A_{i1}+\sum_{k=1}^{l} B_{1k}\,\phi_k,\quad i = 1,\ 2 \dots l$$

$A_{ij}$, $B_{ijk}$ என்பன, $\theta^0{}_1$, $\theta_2 \dots \theta_k$ என்பனவற்றின் சார்பு களாகும். அவை $x$ஐச் சார்ந்து விளங்குவதில்லை. $\theta_2 \dots \theta_l$ என்ற ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியானதாகிறது.

(e) $\left(\dfrac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)$ $i=1, 2 \dots l,$ $j=1, 2 \dots n$ என்ற அணி,

"$l\times l$" வரிசை கொண்ட ஒரு பூச்சியமற்ற சிற்றணியைக் (Minor) கொண்டுள்ளது.

$\chi=(\phi_2\ \phi_3 \dots \phi_e)$ என்று குறிப்பிடுக. $P(\phi_1,\ \chi/w,\ \theta)$ என, $\phi_1$, $\chi$ இவற்றின் நிகழ்தகவுப்பரவலை, $x \in w$ என்ற கூகத்தில், குறிப்பிடுக. $\dfrac{P(x\ \theta)}{P(w/\theta)}$, $x \in w$, $x$-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல் எனவும், $x \in (s-w)$ எனில் 0 எனவும் குறிப்பிடுகிறோம். மேலும்

$$(4)\quad Q_r(\chi/w_1\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1{}^r\, P[(\phi_1\ \chi)/w_1\ \theta]\,d\phi_1$$

$(a)$ முதல் $(c)$ வரையான நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்யும் பிரிதொரு தீர்வு கட்டமான பகுதியாக $w_1$ஐக் கருதுக. ஒவ்வொரு $\theta \in \Omega_H$க்கும், $Q_r(\chi/w_1,\theta)$, $Q_r(\chi,s\theta)$ இவற்றின் திருப்புதிறன்கள் (Moments) சமமானதாக இருப்பின், இவ்விரண்டு சார்புகளும் எல்ல $\chi$-களுக்கும் (i) $r=0$ (ii) $r=1$ என்னுமிடத்தும் சம மாகின்றன.

உதாரணம் : $H_0$ : $\sigma_1=\sigma_2$ என்ற எடுகோள் சோதனையில், $N(a_1, \sigma_1{}^2)$, $N(\sigma_2, \sigma_2{}^2)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவல்களில், வகை$B$, வகை $B_1$ பகுதிகள் அமையுமா என்று கண்டறிக.

தீர்வு : $n_1$, $n_2$ இவை முதல் மற்றும் இரண்டாவது பரவல் களிலிருந்து முறையே பெறப்படும் கூறு அளவுகள் என்க.

$$\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2} = \frac{1}{r},\ \frac{1}{h} = \sigma_2{}^2.$$

எனவே,

$$P(x, r, h, a_1, a_2) = (\sqrt{2\pi})^{-\frac{n}{2}} r^{\frac{n_1}{2}} h^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} rh}$$

$$\{n_1(\bar{x}-a_1)^2+s_1^2]-\tfrac{1}{2}h[n_2(\bar{x}_2-a_2)^2+s_2^2]\} \quad \ldots \quad (1)$$

$$n = n_1+n_2$$

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}-\bar{x}_i)^2 = n_i s_i, \quad i = 1, 2.$$

$X_{ij} = (i=1 . 2, \ j = 1, 2 \ldots n_i)$ என்பது $i$ th தொகுதியிலிருந்து பெறப்படும் கூறிலுள்ள $jth$ மதிப்பு என்று ஊகம் செய்து கொள்ளப்படுகிறது.

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$H_0 : \sigma_3 = \sigma_2$, என்ற எடுகோளை, $\lambda = (h, a_1, a_2)$ என்ற குறிக்கப்படாத மதிப்புடன் சோதனையிடுவதற்குப் பதிலாக, $H_0' : r = r_0 (= 1)$ என்பதை $\lambda = (h, a_1, a_2)$ என்ற குறிக்கப் படாத, மதிப்புடன் ஒப்பிடுவோம். ஏனெனில், சுட்டுறுப்பு உரு மாற்றம், வகை $B$, வகை $B$ பகுதிகளில் எவ்வித மாற்றத்தையும் ஏற்படுத்துவதில்லை.

| சார்பு (Function) | பரவல் (Distirbution) |
|---|---|
| $v_1 = rhs_1^2 = s_1^2/\sigma^2_1$ | வரையற்ற பாகை $(n_1 - 1)$ கொண்ட $\chi^2$ |
| $v_2 = hs_2^2 = s_2^2/\sigma_2^2$ | $(n_2 - 1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ |
| $u_1 = (rhn_1)^{\frac{1}{2}} (\bar{x}_1 - a) = \dfrac{\sqrt{n} \ (\bar{x}_1 - a_1)}{\sigma_1}$ | $N(0, 1)$ |
| $u_2 = (hn_2)^{\frac{1}{2}} (\bar{x}_2 - a_2) = \dfrac{\sqrt{n^2} \ (\bar{x}_2 - a)_2}{\sigma_2}$ | $N(0, 1)$ |

$r, h, a_1, a_2$ இவற்றை விட $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ மற்றும் $\theta_4$ இவற்றோடு ஒப்பிட,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{n_1}{r} - h \;\{n_1(\bar{x}_1 - a_1)^2 + s_1^2\}\right]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{h} - r\{n_1(\bar{x}_1 - a_1)^2 + s^2{}_1\} - \{n_2(\bar{x}_2 - a_2)^2 + s_2^2\}\right]$$

$$\phi_3 = rhn_1(\bar{x}_1 - a)$$

$$\phi_4 = h\,n_2(\bar{x}_2 - a) \qquad \ldots (2)$$

$$\phi_i = \frac{\partial \log\; p(x\,\theta)}{\partial \theta_i}$$

என (1)-லிருந்து பெறுகிறோம்.

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} = -\frac{n}{2h^2}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_3} = n_1 r(\bar{x}_1 - a_1)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_4} = n_2(\bar{x}_2 - a_2)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \phi_2} = r.\, n_1(\bar{x}_1 - a_1), \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \phi_3} = -rhn, \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \phi_4} = 0.$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial \phi_2} = n_2(\bar{x}_2 - a_2), \frac{\partial \phi_4}{\partial \phi_3} = 0, \frac{\partial \phi_4}{\partial \phi_4} = -hn_2$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_1} = -\frac{n_1}{2r^2}\;.\; \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_2} = -\frac{1}{2}\;\{n_1(\bar{x}_1 - a_1)^2 + s_1^2\}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_3} = h\,n_1(\bar{x} - a_1), \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_4} = 0$$

எனவே, நிபந்தனை ($d$) பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது.

மேலும், $\dfrac{\partial(\phi_1\,\phi_2\,\phi_3\,\phi_4)}{\partial(x_{11}\,x_{12}\,x_{21}\,x_{22})}$

$$= \begin{vmatrix} h(x_{11} - a_1) & h(x_{12} - a_1) & 0 & 0 \\ r(x_{11} - a_1) & r(x_{12} - a_1) & (x_{21} - a_2) & (x_{22} - a_2) \\ rh & rh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & h \end{vmatrix}$$

$= h^2 r (x_{21} - x_{22}) (x_{12} - x_{11})$ என்றாகிறது. என நிபந்தனை $(e)$ பூர்த்தியாகிறது. $\theta_r (\chi/w_1\, \theta)$ $Q_r (\chi/w_2, \theta)$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரண்டு சார்புகளும், $r = 0, 1$ இவற்றிற்கு, $P(x, \theta)$ என்பது பல்லுறுப்புப் (multinomial)) பரவலாக அமையும்போதும், $\phi_1\, \phi_2 \ldots \phi_s$ இவை ஒவ்வொன்றும் மதிப்புகளின் இரண்டாம் படியில் அமைந்ததாயிருககும்போதும், ஒன்றாக அமையும் என்பது ஷெஃபேயால் (Scheffe) நிலைநிறுத்தப்பட்டது. எனவே, மேலும் ஒரு நிபந்தனை பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது.

$$\int_{K_2}^{K_2} \phi_1^r\, P(\phi_1, \phi_2, \phi_5, \phi_4 / r_0 \lambda)\, \alpha\, \phi_1$$

$$= (1-\alpha) \int_{K_1}^{K_2} \phi_1^r\, P(\phi_1\, \phi_2\, \phi_3\, \phi_4 / r_0\, \lambda\; d\phi \qquad \ldots \quad (1)$$

என்ற விதத்தில் $K_j (\phi_2\, \phi_3\, \phi_4\, ro, \lambda)$, $j = 1, 2$ அமைகின்ற விதத்தை நிலைநிறுத்த வேண்டியுள்ளோம். $Ki$ அமைந்தால், கூறுவெளியின் பகுதி $K_1 < \phi_1$, $\phi_1 > \theta\, K_2$ என்று நிர்ணயிக்கப்பட்டு $\lambda$-வின் சார்பாக அமையாமல் உள்ளது. எனவே, இது வகை $B$ ஆகும். மேலும் (2)-லிருந்தும், சார்பும்—பரவலும் எவ்வாறு அமைகின்றன என்ற பட்டியலிலிருந்தும்,

$$\phi_1 = \tfrac{1}{2} \frac{(n_1 - u_3)}{r_0},\ \phi_2 = \frac{1}{2h} (n - u_4)$$

$$\phi_3 = (r_0\, h n_1)^{\frac{1}{2}} u_1,\ \ \phi_4 = (h n_2)^{\frac{1}{2}} u_2$$

$u_3 = (v_1 + u_1^2)\; u_4 = v_1 + v_2 + u_1^2 + u_2^2$ என்றும், $v$, $u$, இவற்றில் $r$ ஆனது $r_0$ ஆல் பிரதியிடப்படுகிறது. மேலும் நிலையான $u_4$, $u_1$, $u_2$ இவற்றின் மதிப்பிற்கு, $u_3$-ன் எல்லை, $u_1^2 < u_3 > u_4 + u_2^2$ மேற் காணப்படும் உருமாற்றத்தை,

$$P(\phi_1\, \phi_2\, \phi_3\, \phi_4 / r_0\, \lambda) = \frac{(P(v_1 v_2\, u_1 u_2)}{\dfrac{\partial (\phi_1\ \phi_2\ \phi_3\ \phi_4)}{\partial (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)} \cdot \dfrac{\partial (u_1^2\ u_2\ u_3\ u_4)}{\partial (v_1\ v_2\ v_3\ v_4)}}$$

என்னும் சமன்பாட்டில் ஏற்படுத்த, $P(u_1\ u_2\ u_1\ u_2)$-ன் நிகழ்தகவு திணிவு

$$P \text{ மாறிலி } v_1^{\frac{n_1 - 1}{2}} \cdot v_2^{\frac{n_2 - 1}{2} - 1}\, e^{\frac{1}{2} u_4}$$

$$\frac{\partial(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3\ \phi_4)}{\partial(u_1\ u_2\ u_3\ u_3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & r_0 hn & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (n_2)\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2r_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{மாறிலி} \neq 0.$$

எனவே, (3) ஆனது,

$$\int_{l_1} (n_1-u_3)^r\ (u_3-u_1^2)^{\frac{n_1-1}{2}} (u_4-u_2^2-u_3)^{\frac{n_2-1}{2}} \cdot du_3$$

$$=(1-\alpha)\int_0^1 (n_1-u_3)^r\ (u_3-u_1^2)^{\frac{n_1-1}{2}} (u_4-u_2^2-u_3)^{\frac{n_2-1}{2}-1}\ du_3 \quad \ldots (4)$$

$r=0_1\ 1,\ l_i[(u_1u_2u_4)\ r_0,\ \lambda] = k_i\,(\phi_2\phi_3\phi_4;r_0\lambda),\ \ i=1,2.$

$x = \dfrac{u_3-u_1^2}{(u_4-u_2^2-u_1^2)}$ என (4)-ல் பிரதியிட,

(4) ஆனது,

$$\int_{a_1}^{a_2} \{\, n_1-u_1^2-(u_4-u_1^2)x\,\}^r\ x^{\frac{n_1-1}{2}-1} (1-x)^{\frac{n_2-1}{2}}\ dx,$$

$$= (1-\alpha)\int_0^1 \{\, n-u_1^2\ (u_4-u_2^2-u_1^2)\,\}^r x^{\frac{n_1-1}{2}-1}$$

$$(1-x)^{\frac{n_2-1}{2}-1} \cdot dx. \quad r=0,\ 1. \quad \ldots (5)$$

$u_3 = l_1, l_2$ எனில் $a_1, a_2$ என்பன $x$ மதிப்புகளாகும்.

$$\int_{a_1}^{a_2} x^{\frac{n_1-1}{2}-1+r} (1-x)^{\frac{n_2-1}{2}-1}\ dx =$$

$$(1-\alpha)\int_0^1 x^{\frac{n_1-1}{2}-1+r} (1-x)^{\frac{n_2-1}{2}-1}\ dx \quad r=0,\ 1. \quad \ldots (6)$$

$x$ என்பது $\phi_1$-ன் ஒழுங்கு தொடர்ச்சியான சார்பாதலின், $\phi_1<k_1$, $\phi_1<k_2$ என்னும் பகுதியானது, $a_1 < x$, $x > a_2$ என்ற மைக்கப்படலாம். (6)ஐப் பூர்த்தி செய்யும் $a_1, a_2$ என்ற தீர்வுகள் $a_i$=மாறிலி, $i=1, 2$ என்ற வடிவத்தில் அமைகின்றன. எனவே $H_0 : \sigma_1=\sigma_2$ என்ற சோதனைக்கு வகை $B$ பகுதி அமைகிறது.

மேலே நாம் கண்ட வகை $B$ பகுதி, வகை $B_1$ பகுதியாகவும் அமைகிறது என்பதை,

$$\frac{P(x : r, \lambda)}{P(x : r_0, \lambda)} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{n_1}{2}} e^{(r-r_0)\left(\phi_1 - \frac{1}{2}\frac{n_1}{r0}\right)}$$

$r \neq r_0$ எனில், $\phi$-ல் இந்தச்சார்பு குவிந்த சார்பாக (Convex function) அமைகின்றபடியால் $H_0$ சோதனைக்கு வகை $B_1$ ஆகவும் அமைகிறது

**8·13** நிகழும் தன்மை விகிதச் சோதனைகள் (Likehood Ratio Tests) முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறபட்ட நிகழும் தன்மைச் சார்பை மீப்பெருமமாக்கி அதன் மூலம் வகையீடு கண்டு, அமைக்கப்படும் மதிப்பீடுகள் சில பெரிதும் போற்றத்தக்க பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது. இதேபோன்று அமைக்கப்படும் எடு கோள் சோதனையும் மிக்க நலன் பயப்பதாகும். இச்சோதனைகள் நேமன், பியர்சன் இவர்களால் முதன்முதலில் கையாளப்பட்டன.

$P(x, \theta)$ என்பது மதிப்புகளின் நிகழ்தன்மைச் சார்பினைக் குறிக்கட்டும். சூனிய எடுகோள் $H_0 : \theta$ ஆனது $\Omega_H$-ல் அமைந் திருப்பதைக் குறிக்கட்டும். மாறெதிரான எடுகோள் $H_1 : \theta_1$ என்பது $\Omega_H$-ல் அமையவில்லை என்பதாக அமையும். அதாவது $H_1$ என்பது $\theta \in \Omega - \Omega_H$ என்பதைக் குறிக்கட்டும். $\theta$-வின் மதிப்பு $\Omega_H, \Omega$ ஆகிய வெளிகளில் அமையும் போது, நிகழ் தன்மை சார்புகள் பெறும் மீப்பெருமத்தை முறையே $P(\Omega_H$ மீப் பெருமம்), $P(\Omega$ மீப்பெருமம்) என்று குறிக்கிறோம். பின்னர் நிகழ் தன்மை விகிதம் $\lambda$ என்பது (Likelihood Ratio—LR)

$$\lambda = \frac{P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்})}{P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்})}$$ என்றவாறு இரண்டு நிகழ்

தன்மைச் சார்புகளின் விகிதமாக வரையறை செய்யப்பட்டு எப் போதும் ஒரு நேரெண்ணாகவே அமைகிறது. மேற் காணப்படும் விகிதம் ஒரு நிபந்தனைக்குட்பட்ட மீப்பெருமத்திற்கும், நிபந்தனை யில்லாத மீப்பெருமத்திற்கும் இடையேயான விகிதம் ஆதலின்,

$\lambda$-ன் மதிப்பு 1-க்குக் குறைவாகவோ அல்லது அதிக அளவு ஒன்றாகவோ அமையும். மேலும் $0<\lambda<1$. $\theta$-வின் மதிப்பு $H_0$ல் குறிக்கப்படும் $\Omega_H$ வெளியில் அமையும்போது, சார்பின் மீப்பெரும மதிப்பானது, $\theta$-வின் மதிப்பு முழு வெளி $\Omega$வில் அமையுங்கால் சார்பின் மீப்பெரும மதிப்பினின்றும் பெரிதும் மாறுபடவில்லை யெனில், எடுகோள் ஒரு தனித்தன்மை வாய்ந்ததாக (exceptional) விளங்க எவ்விதக் காரணமும் இல்லை. ஆனால், இரண்டு சார்பு களுக்கும் இடையே $\theta$-வின் வெளி மாறுபட்டிருக்கும்போது, கணிசமான மாறுதல் காணப்படின், எடுகோள் ஒரு தனித்தன்மை வாய்ந்ததாகக் கருதப்பட ஏதுவாகிறது. எனவே, எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுவதற்கான பகுதி $\lambda$-ன் சிறிய மதிப்புகளைக் கொண்டு அமைகிறது. $\alpha$ என்பது தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு எனில், அத்தீர்வு கட்டமான பகுதியின் உட்புறம், $\lambda<\lambda_{\alpha}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இவ்விடத்து $\lambda_{\alpha}$-ன் மதிப்பு

$$P_r(\lambda<\lambda_{\alpha}/H_0)=\alpha$$

என்று அமைகிறது. எனவே $\lambda$-ன் பரவல் தீர்வு கட்டமான பகுதி தீர்மானிக்கப்படுவதற்கு இன்றியமையாததாக அமைகிறது; $\lambda$ ஒரு நேரெண்ணுகை எப்போதும் அமைவதால், ஏதேனும் ஒழுங்கு முகமான சார்பு $\lambda$-ன் பரவலையும். தீர்வு கட்டமான பகுதியையும் நிர்ணயிக்கப்பயன்படுத்தப்படலாம். $H_0$ உண்மையாயிருக்கும் போது, $\lambda$-ன் பரவல் எடுகோளால் குறிக்கப்படாத சுட்டுறுப்பு களைச் சார்ந்து அமையாவிட்டால், தீர்வு கட்ட மான பகுதி, கூறு வெளியை ஒத்ததாகிறது. இந்த முறையைப் பயன்படுத்திப் பெறப்படும் எல்லா சோதனைகளிலும் நிர்ணயிக்கப்படும் தீர்வு கட்டமான பகுதி கூறுவெளிக்கு ஒத்தாக அமைகிறது.

உதாரணம் : $H_0 : a=a_0$, $H_1 : a\neq a_1$ என்ற எடுகோளை, $N(a, \sigma^2)$ என்ற பரவலில், $\sigma$-ன் மதிப்பு தெரிந்திருக்கும்போது சோதனை செய்க.

தீர்வு : $P(x, a_0, \sigma)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i-a_0)^2}$

$$=P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்})$$

$$P(x, a_1, \sigma)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i-a_1)^2}$$

$a$-ஐ பொறுத்து, சார்பை மீப்பெருமப்படுத்த, $a = \bar{x}$ என்னுமிடத்தில் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற ஏதுவாகிறது.

$$P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \; e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \Sigma (X_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{எனவே,} \quad \lambda = \frac{P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்})}{P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}} = e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - a_0)}$$

எனவே, $\lambda < \alpha_\lambda$ என்ற சமமின்மை,

$$\sqrt{n} \; \frac{(\bar{x} - a_0)}{\sigma} < -c_1 \; \sqrt{n} \; \frac{(\bar{x} - a_0)}{\sigma} < c_1$$

என்றாகிறது. $c_1$-ன் மதிப்பு, தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$ எனக்கொண்டு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. மேலும், $\frac{(\bar{x} - a_0)}{\sigma} \sqrt{n}$ பரவல் $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது $N(0 \; 1)$ என அமைகிறது. எனவே, இரு புறத்த தீர்வு கட்டமான பகுதி பயன் படுத்தப்படுகிறது. இத்தகைய தீர்வு கட்டமான பகுதியின் கண் அமைந்த சோதனையும் $UMPU$ சோதனை என்று முன்னரே விளக்கப்பட்டது.

**உதாரணம் :** $N(a, \sigma)$ என்ற இயல் நிலைப்பரவலில் $\sigma$-ன் மதிப்பு தெரியாவிடில், $H_0 : a = a_0$ என்ற எடுகோளை $H_1 : a \neq a_0$ என்ற மாற்றுக்கு எதிராகச் சோதனை செய்க.

**தீர்வு :** $p(x, a, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \; e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \Sigma (X_i - a)^2}$

$p(x, a, \sigma)$-ன் மீப்பெருமம், $\sigma^2 = \frac{\Sigma (X_i - a_0)^2}{n}$ என்ற புள்ளியில் நிகழ்கிறது.

எனவே,

$$P(\Omega H \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2n[\Sigma(X_i - a_0)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$$

$P(x, a, \sigma)$-ன் மீப்பெருமம், $H_0$ஆல் கட்டுப்படுத்தப்படாத போது, $a = \bar{x}$, $\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \bar{x})^2$ என்ற புள்ளியில் நிகழ்கிறது.

எனவே, $P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{2\pi\,[\Sigma(X_i - \bar{x})^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$

$P(x, a, \sigma)$-ன் மீப்பெருமம், $H_0$ ஆல் கட்டுப்படுத்தப்படாத போது, $a = \bar{x}$, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ என்ற புள்ளியில் நிகழ்கிறது.

எனவே, $p(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{2\pi(\Sigma(X_i - \bar{x},^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$.

எனவே,

$$\lambda = \left\{\frac{\Sigma(X_i - \bar{x})^2}{\Sigma(X_i - a_0)^2}\right\}^{\frac{n}{2}}$$

i.e. $$\lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{\Sigma(X_i - \bar{x})^2}{\Sigma(X_i - a_0)^2}$$

$$\lambda^{\frac{2}{n}} = \left\{\frac{1}{1 + \frac{n}{n-1}\,t^2}\right\}$$

இவ்விடத்து, $t = \dfrac{\sqrt{n-1}\,(\bar{x} - a_0)}{s}$

என்பது $(t_r)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட ஒரு $t$ பரவலாகும்.

$P_r(\lambda < \lambda\alpha \mid H_0 = \alpha$ என்ற சமன்பாடு
$P_r(t^2 > c^2 \mid H_0) = \alpha$ என்பதோடு மட்டுமன்றி.
$P_r(t < -c \mid H_0)\ P_r(t > c \mid H_0) = \alpha$ என்பதேயாகும்.

சமமானதாகும். இச் சோதனையும் இரு புறத்த சோதனையாகும். இச் சோதனையின் திறம் $= 1\ \beta(a_1)$ ஆகும். $\beta(a_1)$-ன் மதிப்பு முன்னரே விளக்கப்பட்டுள்ளது. $a_1 = a_0$ எனில் திறம் '$\alpha$' ஆகும். இச் சோதனை நடுநிலைமாறுததுமாகும்.

உதாரணம் : $N(a, \sigma)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலில், $H_0 : \sigma = \sigma_0$-யை $H_1 : \sigma \pm \sigma_0$-க்கு எதிராகச் சோதனை செய்க.

தீர்வு : $P(x, a, \sigma) = (\sqrt{2\pi\sigma})^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i - a)^2}$

$P(x, a, \sigma_0)$ஐ $a$-யின் வாயிலாக மீப்பெருமப்படுத்த, $a = \bar{x}$ ஆகிறது.

எனவே, $P$ ($\Omega_H$ மீப்பெருமம்)

$$= (\sqrt{2\pi\sigma_0})^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\Sigma(X_i - \bar{x})}$$

$P(x, a, \sigma)$ஐ $a, \sigma$ இவற்றின் வாயிலாக மீப்பெருமப்படுத்த, $a = \bar{x}, \sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma(\alpha_i - \bar{x})^2$ என்ற புள்ளியில் மீப்பெருமம் ஏற்படுகிறது.

$$P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்}) = \left\{\sqrt{2\pi\frac{\Sigma(X_i - \bar{x})^2}{n}}\right\}^{-n} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\lambda = \frac{P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்})}{P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்})} = n^{-\frac{n}{2}}\left[\frac{\Sigma(X_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}\right]^{\frac{n}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\Sigma(X_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} - n\right\}}$$

இவ்விடத்து, $u = \frac{1}{\sigma_0^2}\Sigma(X_i - \bar{x})^2$

$$= n^{-\frac{n}{2}} . u^{\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2} + \frac{n}{2}}$$

தீர்வுகட்டமான பகுதி, $u^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{u}{2}} <$ ஒரு மாறிலி என நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

$u^{\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} = c$ ஒரு (மாறிலி) என்ற சமன்பாடு இரண்டு மூலங்களையே (rooth) பெற்றுள்ளது. எனவே, தீர்வுகட்டமான பகுதி $u < c_1$, $u < c_2$ என்றமைகிறது. $H_0$ உண்மையாயின், $u$-வின் பரவல் $(n-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக அமைகிறது. மேலும், இப் பரவல் $H_0$ ஆல் குறிப்பிடப்படாத சுட்டுருப்புகளையும் சார்ந்து விளங்குவதில்லை. எனவே, தீர்வுகட்டமான பகுதி, கூறுவெளிக்கு ஒத்தாக அமைகிறது. மேலும்,

$$c_1^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} = c_2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{c_2}{2}} \quad \text{அதாவது} \quad u^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{u}{2}}\Big]_{c_1}^{c_2} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டையும் பூர்த்தி செய்கிறது. எனவே, UMPU தீர்வுகட்டமான பகுதி வகை $A$ ஆனது, $u < d_1$. $u > d_2$ என்று அமையவேண்டும். $d_1$ $d_2$ இம் மதிப்புகள்

$$\left. u^{\frac{n-1}{2}} - e^{-\frac{u}{2}} \right]_{d_1}^{d_2} = 0$$

என்ற சமன்பாடு பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டும். எனவே, நாம் நிர்ணயித்துள்ள தீர்வு கட்டமான பகுதி மேற்கண்ட நிபந்தனையிலிருந்து மாறுபடுவதால், இச்சோதனை *UMPU* சோதனை அல்ல, இச்சோதனை நடுநிலை மாறும் தன்மை வாய்ந்தது.

உதாரணம் : $N(0, \sigma^2)$ என்ற பரவலில் $H_0 : \sigma = \sigma_0$ என்ற எடுகோளை *L. R.* முறையில் சோதனை செய்க. மேலும் நாம் அமைக்கும் தீர்வு கட்டமான பகுதி வகை $A_1$ஐச் சார்ந்ததா என்று ஆராய்க.

தீர்வு : $P(x; \sigma_0) = (\sqrt{2\pi}\,\sigma_0)^{-n}\, e^{-\Sigma \frac{X_i^2}{2\sigma_0^2}} = P(\Omega_H$ மீப்பெருமம்) $P(x, \sigma)$ஐ, $\sigma$ வாயிலாக, மீப்பெருமப்படுத்த, $\sigma^2 = \Sigma \frac{X_i^2}{n}$ என்ற புள்ளியியல் சார்பலன் மீப்பெருமத்தை அடைகின்றதாதலின்,

$$P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = \left(\sqrt{2\pi \frac{\Sigma X_i^2}{n}}\right)^{-n} e^{-\frac{n}{2}}$$

எனவே, நிகழும் தன்மை விகிதம் $\lambda$

$$= n^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\Sigma X_i^2}{\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\Sigma X_i^2}{\sigma_0^2} + \frac{n}{2}}$$

$$= n^{-\frac{n}{2}}\, v^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{v}{2} + \frac{n}{2}},\quad v = \frac{\Sigma X_i^2}{\sigma_0^2}$$

எனவே, தீர்வு கட்டமான பகுதி,

$$v^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{v}{2}} < \text{ஒரு மாறிலி.}$$

என்றமைக்கப்படும். $v^{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{v}{2}} =$ ஒரு மாறிலி என்ற சமன்பாடு இரண்டு மூலங்களையே உடையது. இம் மூலங்களை $c_1$, $c_2$ என்று குறித்தால், $v < c_1$, $v > c_2$ என்றவாறு அமைகிறது. $c_1$, $c_2$ இவை தீர்வு கட்டமான பகுதியின் அளவு $\alpha$ என்னும் விதத்தில்

$$c_1^{\frac{n}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} = c_2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{c_2}{2}}$$

$$v^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{v}{2}}\Big]_{c_1} = 0.$$

என்றவாறு தெரிந்தெடுக்கப்படுகிறது. எனவே, முன்பு நாம் விளக்கிய ஓர் எடுத்துக்காட்டின்படி *UMPU* ஆக இச் சோதனை விளங்குகிறது. $H_0$ உண்மையாயின், $v$ஆனது $n$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக அமைகிறது.

**உதாரணம்:** $N(a_1, \sigma_1^2)$, $N(a^2 \sigma_2^2)$ என்ற இரு இயல் நிலைப் பரவல்களில் $_1\sigma_1 = \sigma_2$ என்ற எடுகோளை நிகழ்தன்மை விகித முறையில் சோதிக்க.

**தீர்வு:** இரண்டு தொகுதிகளிலிருந்தும் பெறப்படும் கூறுகளின் அளவு முறையே $n_1, n_2$ என்று கொள்க. $n_1 + n_2 = n_1$ மற்றும் எப்போதும் பயன்படுத்தும் குறியீடுகளைக் கொண்டால்,

$$P(x; a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2,) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \sigma_1^{-n_1} \sigma_2^{-n_2}$$

$$e^{-\frac{n_1}{2\sigma_1^2}[s_1^2 + (\bar{x}_1 - a_1)^2]} \times e^{-\frac{n_2}{2\sigma_2^2}[s_2^2 + (\bar{x}_2 - a_2)^2]}$$

$a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ இவற்றின் மீப்பெரும் நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள், முறையே $\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2$ என்றவாறு அமைகின்றன.

$$P(\cup \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} e^{\frac{-n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n (n_1 s_1^2)^{\frac{n_1}{2}} (n_2 s_2^2)^{\frac{n_2}{2}}}$$

$\sigma_1, \sigma_2$ இவைகளின் பொதுவான மதிப்பு '$\sigma$' எனில், $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது, $a_1, a_2, \sigma^2$ இவற்றின் மீப்பெரும நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள்

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n}$$ என்றமைகின்றன.

எனவே, $$P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n (n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)^{\frac{n}{2}}}$$

நிகழும் தன்மை விகிதம்

$$\lambda = \frac{(n_1 s_1)^{\frac{n_1}{2}} (u_2 s_2)^{\frac{n_2}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)^{\frac{n}{2}} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}$$

$$= \frac{n^{\frac{n}{2}} F^{\frac{n_1}{2}}}{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} (1+F)^{\frac{n}{2}}}$$

எனவே, தீர்வுகட்டமான பகுதி, $F^{\frac{n_1}{2}}(1+F)^{-\frac{n}{2}} <$ ஒரு மாறிலி என்றமைக்கப்படுகிறது. $F^{\frac{n_1}{2}}(1+F)^{-\frac{n}{2}} =$ மாறிலி என்னும் சமன்பாடு சரியாக இரண்டு மூலங்களைப் பெற்றுள்ளது. எனவே, தீர்வுகட்டமான பகுதி $F < c_1$, $F > c_2$ என்றழைக்கப்படுகிறது. $c_1$, $c_2$ இவற்றின் மதிப்புகள், தீர்வுகட்டமான பகுதியின் அளவு $d$ என்னும் விதத்தில் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன. மேலும் $c_1$, $c_2$ இவை,

$$\left[ F^{\frac{n_1}{2}} (1+F)^{-\frac{n}{2}} \right]_{c_1}^{c_2} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டையும் பூர்த்தி செய்கின்றன. $H_0$ உண்மையாயின், $F$ ஆனது ஸ்னெட்கரின் $F_{n_1-1,\, n_2-1}$-க்கு நேர்விகிதத்தில் அமைகின்றது. எனவே, நடுநிலை மாறுத சோதனையானது $F < d$, $F > d_2$ என்றமைகிறது. $d_1$, $d_2$ இவை,

$$\left[ F^{\frac{n_1-1}{2}} (1+F)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}} \right]_{d_1}^{d_2} = 0 \text{ என்ற}$$

சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்கிறது.

உதாரணம் : ஒரே அளவு திட்டவிலக்கம் σ-ம், சராசரிகள் $a_1, a_2 \ldots a_k$ எனக் கொண்டதுமான $k$ இயல்நிலைப் பரவல்கள் உள்ளன. $H_0 : a_1 = a_2 = a_k (=a)$ என்றசோதனைக்கான நிகழ் தன்மை விகித முறையைக் கண்டறிக.

தீர்வு ; $\sum n_i = n$ எனில்,

$$P(x, a_1, \ldots a_k\, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma)^{-n}\; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{1}^{k}\{n_i s_i^2 + n_i(\bar{x}_i - a_i)^2\}}$$

$a_i$, $\sigma^2$ இவற்றின் மீப்பெரும நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள் $\bar{x}_i$, $\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i s_i^2}{n}$ என்றமைகின்றன.

$$P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}}}{\{2\pi \sum n_i s_i^2\}^{\frac{n}{2}}}$$

$H_0$ உண்மையாயின், $a_i$, $\sigma^2$ இவற்றின் மீப்பெரும நிகழும் தன்மை மதிப்பீடுகள்

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \bar{x}_i}{n}, \quad \frac{\sum n_i s_i^2 + \sum n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{n}$$

என்றமைகின்றன.

$$P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n^{\frac{n}{2}}\; e^{-\frac{n}{2}}}{\{2\pi(\sum n_i s_i^2 + \sum n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2\}^{\frac{n}{2}}}$$

$$\lambda = \left[\frac{\sum n_i s_i^2}{\sum n_i s_i^2 + \sum n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{\sum n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{\sum n_i s_i^2}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

தீர்வு கட்டமான பகுதியாவது,

$$F = \frac{(n-k)}{(k-1)} \frac{\sum n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{\sum n_i s_i^2} > C = (\text{ஒரு மாறிலி}$$

இச் சோதனையானது, $\sum n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$, $H_0$ உண்மையாயிராத போது, ஒரு மையப் போக்கற்ற கைவர்க்கமாக அமைவதால், சீராக நடுநிலை மாறுதது என்பது தெளிவாகும். $H_0$ உண்மையாயின், $F$ ஆனது $(k-1)$, $(u-k)$ வரையற்ற பாகைகளைக் ஸ்னெடகர் $F$ என அமைகிறது.

உதாரணம் : $0 < x < \theta$ என்ற இடைவெளியில் $x$ ஒரு செவ்வக மாறியாகும். தொகுதியிலிருந்து அளவு $n$ கொண்ட ஒரு கூறு அளிக்கப்பட்டால், எடுகோள் $H_0 : \theta = \theta_0$ஐ, $H_1 : \theta \neq \theta_0$க்கு எதிராகச் சோதனை செய்க. நிகழ்தன்மைச் சோதனையான நடுநிலை மாறுதது என்றும் நிறுவுக.

தீர்வு: $\theta$-வின் மீப்பெரும நிகழும் தன்மை மதிப்பீடு கூறிலுள்ள மிகப்பெரிய மதிப்பாகும். அதனை $x_n$ என்று குறிக்கவும்.

$P(\Omega$ மீப்பெருமம்$) = x_n^{-n}$

$P(\Omega_H$ மீப்பெருமம்$) = \theta_0^{-n}$

நிகழ்தன்மை விகிதம் $\lambda = \frac{x_n^n}{\theta_0^n}$, $x_n < \theta_0$ எனில்,

$= 0 \quad x > \theta^0$ எனில்,

சோதனை முறை கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$x_n < \theta$ எனில், அனுமதிக்கும் பகுதி $\frac{x_n}{\theta_0} >$ ஒரு மாறிலி.

அதாவது $X_n > c_1$ என்றமையும். அதாவது, $H_0$ஐ ஏற்றுக் கொள்வதற்கான பகுதி $c_1 < x_n < \theta_0$ ஆகும். $x_n > \theta_0$ அல்லது $x_n > c_2$ எனில், $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது.

$x_n$-ன் பரவல் $\frac{n\, x_n^{n-1}}{\theta^n} \cdot dx$ ஆகும். எனவே, $c_1$-க்கும், தீர்வு கட்டமான பகுதி அளவு $\alpha$-க்கும் இடையேயான தொடர்பானது,

$$n \int_{c_1}^{\theta_0} \frac{x_n^{n-1}}{\theta^{0n}}\, dx_n = (1-\alpha)$$

$$\text{(i. e.)} \quad \alpha = \frac{c_1^n}{\theta_0^n} \qquad \dots (1)$$

என்றமையும்.

$$\text{திறம்} = P(\theta) = 1 - \int_{c_1}^{\theta_0} \frac{n\, x_n^{n-1}}{\theta^n} \cdot dx_n = 1 - \frac{1}{\theta^n}\,(\theta_0^n - c_1^n)$$

$$= 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n (1 - \alpha).$$

$\theta = \theta_0$ எனில், $P(\theta_0) = \alpha$, மற்றும் $\theta > \theta_0$ எனில், $P(\theta_0) > \alpha$

$\theta < \theta_0$ எனில்,

$$P(\theta) = 1 - \int_{c_1}^{\theta} \frac{n\, x_n^{n-1}}{\theta^n} \cdot dx_n = 1 - \frac{1}{\theta^n}\,(\theta^n - c_1^n)$$

$$= \frac{c_1^n}{\theta^n} > \alpha$$ என்று (1)ன் பயனாய் அமைகிறது.

எனவே, இச்சோதனை சீராக நடுநிலை மாறுததாகும்

**உதாரணம் :** இரண்டு இயல்நிலைப் பரவல்களில், சராசரியின் மதிப்பு தெரிந்த நிலையில், $\sigma_1 = \sigma_2$ என்ற சோதனைக்கான நிகழ் தன்மை விகிதச் சோதனையை அமைக்க. இத்தகையதொரு சோதனை, சீராக நடுநிலை வாய்ந்தது என்றும் காட்டுக.

**தீர்வு :** இயல்நிலைப் பரவல்களின் சராசரியை '0' என்று கொள்வதால் தவறேதுமில்லை. சோதனையிலும் எவ்வித மாற்றமும் காணத்தக்கது இல்லை.

எனவே, $n = (n_1 + n_2)$ எனில்,

$$P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}}}{\left[\sum_1^{n_1} x_i^2 + \sum_1^{n_2} y_i^2\right]^{n/2}}$$

$$P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n_2^{\frac{n_1}{2}}\, n_2^{\frac{n_2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\, (\Sigma x_i)_2^{\frac{n_1}{2}}\, (\Sigma y_i)^{2\,\frac{n_2}{2}}}$$

($x_i$ $y_i$, இவை முதலாவது மற்றும் இரண்டாவது தொகுதிகளி லிருந்து பெறப்படும் $i$ ஆவது மதிப்புகளாகும்)

$$\lambda = \frac{n^{\frac{n}{2}} (\Sigma x_{i^2})^{\frac{n_1}{2}} (\Sigma y_i^{2})^{\frac{n_2}{2}}}{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \left( \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 \right)^{n/2}}$$

$$= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n_1^{\frac{n^1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}} \quad \frac{F^{\frac{n_1}{2}}}{(1+F)^{\frac{n}{2}}}, \quad F = \frac{\Sigma x_i^2}{\Sigma y_i^2}$$

எனவே. L. R. சோதனையின் தீர்வுகட்டமான பகுதி,

$$F^{\frac{n_1}{2}} (1+F)^{-\frac{n}{2}} < \text{ஒரு மாறிலி.}$$

எனவே, தீர்வுகட்டமான பகுதி, $F < c_1$, $F > c_2$ என்றமையும்.

$$c_1, c_2 \text{ இவை } \left[ F^{\frac{n_1}{2}} (1+F)^{-\frac{n}{2}} \right]_{c_1}^{c_2} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்கின்றன. $H_0$ உண்மை யாயின் $F$ ஆனது ஸ்னெடகர் $F$-ற்கு நேர்விகிதத்தில் அமை கிறது. எனவே, நாம் அமைத்த சோதனை சீராக மிகத் திறம் வாய்ந்தது, நடுநிலை மாருதது என்று பெறுகிறோம்.

உதாரணம் : ஒரே திட்ட விலக்கத்தைக் கொண்ட இரு இயல்நிலைப் பரவல்களின் சராசரிகளின் சமத்தன்மைக்குச் சோதனையிடும்போது, நிகழ்தன்மை விகிதக் கோட்பாட்டைப் பெறுக. மேலும், $L$. $R$. முறையால் அமைக்கப்படும் தீர்வு கட்ட மான பகுதி, கூறுவெளிக்கு ஒத்தாய் விளங்குகிறது என்றும், அத் தீர்வு கட்டமான பகுதியின் கீழ் அமைந்த சோதனை முற்றிலும் நடு நிலை மாருதது என்றும் நிறுவுக.

தீர்வு : $N(a_1\ \sigma^2)$, $N(a_2\ \sigma^2)$ என்ற இரு இயல்நிலைப் பரவல் களிலிருந்து பெறப்படும் கூறுகளின் அளவு $n_1$, $n_2$ என்று கொள்க.

$H_0 : a_1 = a_2$ (= $a$ தெரியாத மதிப்பு)

$$n = (n_1 + n_2)$$

$$P(x; a_1, a_2, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[n_1 s_1^2 + n_1(\bar{x}_1 - a_1)^2 + n_2 s_2^2 + n_2(\bar{x}_2 - a_2)^2]}$$

$a_1, a_2, \sigma^2$ இவற்றின் மீப்பெரும நிகழ்தன்மை மதிப்பீடுகள் முறையே,

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n}$ என்றமைகின்றன.

$$P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}}}{[2\pi(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)]^{\frac{n}{2}}}$$

$H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது, $a_1, \sigma^2$ இவற்றின் மீப்பெரும நிகழ்தன்மை கொண்ட மதிப்பீடுகள் முறையே,

$$\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n},$$

$$\left[n_1 s_1^2 + n_2 s_2 + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)} \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{n}\right]$$

என்றமைகின்றன.

$$P(\Omega_H \text{ மீப்பெருமம்}) = \frac{n^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left[n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

எனவே, நிகழ்தன்மை விகிதம் $\lambda$,

$$\lambda = \frac{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)^{\frac{n}{2}}}{\left[n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \left[1 + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)} \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

i. e. $\lambda < \lambda_\alpha$ என்பது, $t^2 > c^2$ என்றமைகிறது.

$$t = \left[\frac{n_1\ n_2}{(n_1+n_2)}\ \frac{(n_1+n_2-2)}{(n_1\ s_1^2+n_2\ s_2^2)}\right]^{\frac{1}{2}} (\bar{x}_1-\bar{x}_2)$$ என்பது $(n-2)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட '$t$' பரவலாக அமைகிறது. எனவே, தீர்வு கட்டமான பகுதியானது, $t < -c, t > c$, என்று $H_0$ உண்மையாயிருக்குங்கால் அமைக்கப்படுகிறது. இது ஓர் இரு புறத்த சோதனையாகும். எனவே, இச்சோதனை முழுமையாக நடுநிலைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும். $t$-யின் பரவல், $H_0$ உண்மை யாயிருக்கும்போது, $\sigma$ மீது சாராது அமைவதால், தீர்வு கட்டமான பகுதியானது, கூறுவெளியை ஒத்ததாக அமைகிறது.

L. R. சோதனைகளின் குணப்பண்புகள் (Properties of L. R. tests)

முதலில் (1) மதிப்புகளின் நிகழும் தன்மை, சார்பு $p(x\,\theta)$ தொகையீட்டுக் குறியின் கீழ் வகையீடு செய்யப்பட இயலும் என்றும் (2) $p(x, \theta)$-ன் $\theta$ சார்ந்த முதல் இரண்டு வகையீடு களும் அமைந்து $\theta$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும் அமைகின்றன.

(3) $\left|\frac{\partial \log p(x\,\theta)}{\partial \theta}\right| < f_1, \left|\frac{\partial^2 \log p(x\,\theta)}{\partial \theta^2}\right| < f_2$, ($f_1, f_2$ இவை தொகையீடு காணப்படத்தக்க சார்புகள்) என்று ஊகம் செய்க.

$\theta$ என்பது ஒரு தனிச் சுட்டுறுப்பு எனில், மேற் கூறப்பட்ட ஊகங்களைக் கொள்கையில் மீப்பெரு நிகழ்தன்மை மதிப்பீடு $\theta$, தொடர்ந்து இணையாது அணுகிச் செல்லும் (asymptotic minimum variance) மீச்சிறும மாறுபாட்டை அடைகிறது. எனவே, நிகழ் தன்மைச்சார்பு கீழ்க்கண்ட அமைப்பைத் தொடர்ந்து இணையாது அணுகிப் பெறுகிறது.

$$\frac{\partial \log p(x\,\theta)}{\partial \theta} = -E\left\{\frac{\partial^2 \log p(x\,\theta)}{\partial \theta^2}\right\}(t-\theta) \qquad \dots (1)$$

அல்லது $p(x\,\theta) \propto e^{-\frac{1}{2}E\left[\frac{\partial^2 \log p(x\,\theta)}{\partial \theta^2}\right](t-\theta)^2}$

$\theta$ என்பது $k$ மூலங்களைக் கொண்ட ஒரு திசையிலி (Vector) என்றும், இம் மூலகங்களில் $r$ஐ $H_0$ குறிக்கட்டும் என்று கொள்க. அதாவது $\theta_j = \theta_j$ $(j = 1, 2 \ \ r)$ $H_1$-ன் அமைவு $\theta_j \neq \theta_j$ $(j=1 2 \dots r)$ என்றவாகும். இப்போது, (1)-ன் அமைப்பு,

$$\frac{\partial \log p(x\,\theta)}{\partial \theta} = (T-\theta)\Lambda^{-1}$$

என்றவாறாகும். $\Lambda^{-1}$ என்ற அணியின் $(i\,j)$th மூலகம்,

$$-E\left\{\frac{\partial^2 \log p(x\,\theta)}{\partial \theta_i\,\partial \theta_j}\right\}.$$ இதற்கு வகையீடு காண,

$$p(x\,\theta) \propto e^{-\frac{1}{2}(T-\theta)'\,\Lambda^{-1}\,(T\;\;\theta)}$$

இதனை $\theta$-க்கு மீச்சிறுமப்படுத்த, $\theta_i$-ன் மதிப்பு, $T$ யிலுள்ள $t_i$-ன் $i$ ஆவது மதிப்பாக அமையும்.

எனவே, $p$ ($\Omega$ மீப்பெருமம்) $= 1$.

$H_0$ உண்மையாயின் $\theta_l$ ஆனது $t_l$-ன் மூலமாக, $l=(r+1)\ldots k$, மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறது. எனவே,

$$p\,(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) \propto e^{-\frac{1}{2}(T_r-\partial_r)'\,\Lambda_r^{-1}\,(T_r-\partial_r)}$$

$$T_r = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_r \end{bmatrix} \partial = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \cdot\cdot \\ \cdots \\ \theta_r \end{bmatrix}$$ $\Lambda_r^{-1}$ என்பது, $\Lambda^{-1}$-ன் $(r\times r)$ என்ற வரிசையான முதலான சிற்றணி (Minor) ஆகும்.

வரையறையின்படி, $\lambda = e^{-\frac{1}{2}(T_r-\partial_r)'\Lambda_r^{-1}(T_r-\partial_r)}$

$$-2\log_e \lambda = (T_r-\partial_r)\;\Lambda_r^{-1}\,(T_r-\partial_r)$$

$H_0$ உண்மையாயின், மேற்கண்ட தொடர், '$r$' வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக அமைகிறது. $H_0$ உண்மையாக இல்லாவிடின் $-2\log_e \lambda$ '$r$' வரையற்ற பாகை கொண்ட மையப் போக்கற்ற $\chi^2$ என அமைகின்றது. மையப்போக்கற்ற தன்மைக்கான சுட்டுறுப்பு $(\nu_r - \varrho_r)'\,\Lambda_r^{-1}(\nu_r-\partial_r)$ $\nu'_r = (\theta_1 \cdot\; \theta_r)$. சில நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில், $-2\log_e \lambda$ தகுந்த வரையற்ற பாகையுடன் கூடிய $\chi^2$ ஆக அமைகிறது. அலெவெண் பரவலின் வகையீட்டின் எல்லைகள் சுட்டுறுப்புகளைச் சார்ந்து அமையின், மேற்குறிப்பிட்ட முடிவு உண்மையாதலைக் காணலாம்.

இக்கூற்றைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குகிறோம். ஒரு செவ்வக முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, தனித்து

$n_i$ மதிப்புகள் அளிக்கப்படுகின்றன. தொகுதியின் அலைவெண் பரவல்,

$$\frac{dx}{\theta_i}\ (0 < x < \theta_i),\quad i = 1, 2 \dots k.$$

சூனிய எடுகோள் : $H_0 : \theta_1 = \theta_2 \dots = \theta_k = \theta$ (என்று கொள்க.) இவ்விடத்தில் $-2\log_e \lambda$-ன் பரவல், $2(k-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவல் என்று நிலை நிறுத்துவோம்.

ஒரு மாறி $u$, செவ்வகப் பரவலைப் பின்பற்றினல், எல்லை [0 1], எனில் $-2\log_e u$, என்பது 2 வரையற்ற பாகைகொண்ட $\chi^2$ என அமைகிறது என்பதை முன்னரே விளக்கினேம். $i$ வது தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட கூறின் மிகப் பெரிய மதிப்பு $x_i$ என்று குறிப்பிடுக. $x_i$ என்பதை எல்லாக் கூறுகளும் ஒன்ருக அமைகையில், மிகப் பெரிய மதிப்பு என்று கொள்க.

$x_i$ என்பது $\theta_i$-க்கான போதுமான மதிப்பீடாகும். இதனுடையபரவல்,

$$\frac{n_i\, x_i^{n_i-1}}{\theta_i^{n_i}}\, dx_i$$

என்று அமைகிறது. பின்னர் $Z_i = \frac{x_i^{n_i}}{\theta_i^{n_i}}$ என்ற அளவை [0 1] என்ற எல்லையில், ஒரு செவ்வக மாறியாக அமைகிறது. எனவே, $-2\log Z_i$ என்பது 2 வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக அமைகிறது. $H_0$ உண்மையாயின், $x_0$, $\theta$-க்கான போதுமான மதிப்பீடாகும். இதன் பரவல், $\frac{n.x^{n-1}}{\theta_i}\, dx,\ n < n_i$ என்று அமைகிறது. எனவே, $\frac{x^n}{\theta^n}$ என்பது ஒரு செவ்வக மாறியாக [0 1] என்ற எல்லை கட்சியிடைல் அமைகிறது. $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது,

$$y = \prod_{i=1}^{K} \frac{x_i^{n_i}}{x_i^{n}}$$

$$= \prod_{i=1}^{K} \frac{(x_i/\theta)^{n_i}}{(x^i/\theta_0)^{n}}$$

$y$-ன் பரவல் $\theta$-வைச் சாராமல் அமைகிறது என்பது கண்கூடு. மேலும் போதுமான அளவை $x_l$-யும் முழுமையானதாக அமைகிறது. ஏனெனில், $\chi(x_l)$ என்பது $2x_l$-ன் சார்பாக அமையின்,

$$E[\chi(x_l)] = 0 \text{ என்பது } n \int_0^\theta \chi(x_1) \frac{x_l^{n-1}}{\theta^n} \cdot dx_l = 0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு சமமானதாகிறது. ஆனால், $\chi(x_l)$ என்ற சார்பு $\theta$-வைச் சார்ந்து அமையக்கூடாது. சார்பான வகையீட்டைக் கண்டுபிடிக்க, $\chi(\theta) = 0$, என்று எந்த ஒரு $\theta$ மதிப்பிற்கும் அமைகிறது. அதாவது, $\chi(x_l) = 0$ ஒருங்கே அமைகிறது. $x_l$, $y$ இவ்விரண்டும் தனித்து, ஒன்றையொன்று சாராமல் விளங்குகின்றது. எனவே, $\frac{x_l^n}{\theta^n}$, $y$ இவ்விரண்டும் தனித்தனியானவை.

$$\text{இப்போது, } (-2\log y) + \left(-2\log\left[\frac{(x_l)^n}{\theta^n}\right]\right)$$

$$= \sum_1^K \log_e \left(\frac{x_l}{\theta}\right)^{ni}$$

$\phi(t)$ என்பது $-2\log y$-ன் சிறப்புச் சார்பு (Characteristie Function) எனில்,

$$\phi(t) = \frac{(1-2it)^{-2k}}{(1-2it)^{-}} = (1-2it)^{-2(k-1)}$$

எனவே, $-2\log y$ ஆனது $2(K-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக அமைகிறது. இப்போது, எடுகோள் சோதனைக்கான நிகழும் தன்மை விகிதம்

$$\lambda = \prod_{i=1}^{K} \frac{x_l^{ni}}{x_l^n}$$

என்றமைகிறது. எனவே, $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது, $-2\log\lambda$-ன் பரவல் $2(K-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக அமைகிறது.

## 8.15 L. R. சோதனைகளின் கொள்கை மாறாத் தன்மை (Consisteney of LR Tests)

கட்டுறுப்பு திசையிலியின் மீப்பெரும நிகழ் தன்மை மதிப்பீடுகள், தொடர்ந்து இணையாது அணுகிச் செல்லும் கொள்கை மாறாத் தன்மையைப் (asymptotically consistent) பெற்றிருக்கும்

நிலையை ஆராய்வோம். $\theta = (\theta^s, \theta^u)$ என்று கொள்க. $\theta^s$ என்பது எடுகோளால் குறிக்கப்படும் சுட்டுறுப்புத் திசையிலியாகவும், $\theta^u$ என்பது எடுகோளால் குறிக்கப்படாத சுட்டுறுப்புத் திசையிலியாகவும், அமைகின்றன. எடுகோள் $H_0 : \theta^s = \theta_0^s$ என்றிருக்கட்டும். $n$ ஆனது மிகப் பெரிய மதிப்பை நோக்கிச் செல்கையில், ஒவ்வொரு மீப்பெரும நிகழும் தன்மை மதிப்பீடும், அதனுடைய சுட்டுறுப்பை நோக்கிச் செல்கிறது: எனவே, நிகழும் தன்மை விகிதம், தொடர்ந்து, இணையாது, அணுகிச் செல்கிறது.

$$\lambda \rightarrow \frac{P(x; \theta_0^s, \theta^u)}{P(x; \theta^s, \theta^u)}$$

$H_0$ உண்மையாயின், $\dfrac{P(x; \theta_0^s\ \theta^u)}{P(x; \theta^s; \theta^u)}$

என்ற விகிதம் '1' என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது. எனவே, $\lambda_x$-வின் மதிப்பும் '1' என்ற மதிப்பை அணுகுகிறது. $H_0$ உண்மையாக இல்லாவிடின், மேற் காட்டப்பட்ட விகிதம், $0 < K < 1$ என்றமைந்த $K$ என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது.

இச் சோதனையின் திறம்,

நிகழ்தகவு $\{K < \lambda_{\alpha} \mid H_1\}$

என்றமைகிறது. $n$ மிகப் பெரிய மதிப்பை நோக்கிச் செல்கையில் திறம், நிகழ்தகவு $(0 \leqslant k < 1)$ என்ற மதிப்பை நோக்கிச் செல்கிறது. ஆனால், மேற்கண்ட நிகழ்தகவோ '1' ஆகும். எனவே, திறம் '1'ஐ நோக்கிச் செல்கிறது. L. R. சோதனை தொடர்ந்து, இணையாது, அணுகிச் செல்லும் கொள்கை மாறுத்தன்மை உடையது என்பது நிலை நிறுத்தப்படுகிறது.

**8·16** *L. R.* **சோதனைகளின் நடுநிலை மாறுத்தன்மை :** (Unbiasedness of *L.R.* Tests) நிகழும் தன்மை விகித சோதனைகள் பலவும் நடுநிலை மாறுத தன்மையைப் பெற்றிருக்கின்றன. எனினும், எல்லாச் சோதனைகளும் நடுநிலை மாறுதவை என்று கூறுவதற்கில்லை. இப்பிரிவில் நாம் தீர்வு கண்ட எடுத்துக் காட்டுகள் இதனை விளக்குகின்றன. ஒரு சோதனையானது, இணையாக, தொடர்ந்து, அணுகிச் செல்லும் கொள்கை மாறுத் தன்மையைப் பெற்றிருப்பின், அச்சோதனையின் திறம் $\alpha$வைக் காட்டிலும் அதிகமானதாக அமையும். எனவே, நிகழ்தன்மை விகிதச் சோதனைகள், எத்தகைய நிபந்தனைகளின் மேல், கொள்கை

மாறுதத் தன்மையைப் பெற்றிருக்கின்றனவோ, அதே நிபந்தனையின் அடிப்படையில் தொடர்ந்து, இணையாத, அணுகிச்செல்லும் நடுநிலை பிறழாத தன்மையையும் பெற்றிருக்கின்றன.

உதாரணம் : இயல்நிலைத் தொகுதிகள் $k$ இருப்பதாகக் கொள்க : $i$ஆவது தொகுதியின் சராசரி $a_i$, திட்டவிலக்கம் $\sigma_i$.

(i) $a_1 = a_2 \dots = a_k$; திட்ட விலக்கங்கள் சமமானதாக இருக்கின்றன.

(ii) $\sigma_1 = \sigma_2 \dots = \sigma_k$

(iii) $a_1 = a_2 \dots = a_k$ மற்றும் $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_2 \dots = \sigma_3$ என்ற சோதனைகளுக்கான, நிகழும் தன்மை விகிதத்தின் தொடர்ந்து இணையாது அணுகிச் செல்லும் (asymptotic) பரவல்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\text{(i)} \quad P(x; H) = \prod_{i=1}^{k} (\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{n_i} \; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(n_i s_i^2 + n_i(\bar{x}_i - a_i)^2)}$$

$$P(\Omega \text{ மீப்பெருமம்}) = \left[ 2\Pi \left( \sum_1^K n_i s_i^2 \right) \right]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

இவ்விடத்து, $n = \sum_1^K n_i$

$H_0 : a_1 = a_2 \dots = a_k = a$ எனில்,

பின்னர்,

$$P(x\, H_0) = \prod_{i=1}^{K} (\sqrt{2\pi\sigma})^{-n_i} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{ n_i s_i^2 + n_i(\bar{x}_i - a)^2 \}}$$

$p$ ($\Omega$ மீப்பெருமம்)

$$= [2\pi \{ \Sigma n_i s_i^2 + \Sigma n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \} ]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}.$$

$$\text{நிகழ் தன்மை விகிதம் } \lambda_1 = \left[ \frac{\Sigma n_i s_i^2}{\Sigma n_i s_i^2 + \Sigma n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2} \right]^{\frac{n}{2}}$$

வரையற்ற பாகை '$r$' எனக் கொண்ட ஒரு $\chi^2$ பரவல் $\chi_r^2$ என்று குறிக்கப்பட்டால், $n_i s_i^2$ ஒரு $(\chi^2_{ni-1}, \sigma^2)$ என்றாகிறது. இப்பரவல், $\Sigma n_i (\bar{x} - \bar{x})^2$ என்ற பரவலிலிருந்தும் தனித்து விளங்குகிறது. $\Sigma n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$ என்ற அளவை, $H_0$ உண்மையாயின், $(\chi^2_{k-1}, \sigma^2)$ என அமைகிறது. $\lambda_1$-ன் மதிப்பு $\sigma$-வைச் சாராமல் அமைகின்றபடியால், $\sigma = 1$ எனக் கொள்வதால் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படுவதில்லை.

மறுபடியும்,

$$\frac{1}{(a+b)^t} = \frac{1}{\lceil t} \int_0^\infty \theta^{t-1} e^{-\theta(a+b)} . \; d\theta$$

$$E(\lambda_1^t) = c \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \frac{\chi^2_{n-k}}{\chi^2_{n-k} + \chi^2_{k-1}} \right]^{\frac{nt}{2}} (\chi^2_{n-k})^{\frac{n-k}{2} - 1}$$

$$\times \quad (\chi^2_{k-1})^{\frac{k-1}{2} - 1} e^{-\frac{1}{2}(\chi^2_{n-k} + \chi^2_{k-1})}$$

$$d\chi^2_{n-k} \; d\chi^2_{k-1}$$

$c$ என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

$$\frac{1}{(a+b)^t} = \frac{1}{\lceil t} \int_0^\infty \theta^{t-1} e^{-\theta(a+b)} \theta d$$ என்பதைக் கருத்தில் கொள்க.

$$E(\lambda_1^t) = \frac{C}{\lceil \frac{nt}{2}} \int_0^\infty \theta^{\frac{n-t}{2} - 1} .$$

$$d\theta \left[ \int_0^\infty (\chi^2_{n-k})^{\frac{n-k}{2} + \frac{nt}{2} - 1} \right.$$

$$\times \; e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{n-k}(1+2\theta)} d\chi^2_{n-k}$$

$$\times \int_0^\infty (\chi^2_{k-1})^{\frac{k-1}{2} - 1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{k-1}(1+c\theta)} d\chi^2_{k-1}$$

$$= \frac{C}{\left\lceil \frac{nt}{2} \right.} \left\lceil \frac{n-k}{2} + \frac{nt}{2} \right. \left\lceil \frac{k-1}{2} \right. \; 2^{\frac{n-1}{2} + \frac{nt}{2}}$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{\theta^{\frac{nt}{2}}}{(1+2\theta)^{\frac{n-1}{2}+\frac{nt}{2}}} \cdot d\theta.$$

$\theta = \frac{x}{2}$ என்று மாற்ற,

$$E(\lambda_1^t) = \frac{C_2^{\frac{n+k}{2}}}{\left\lceil \frac{nt}{2} \right.} \left\lceil \frac{n+k}{2} + \frac{nt}{2} \right. \left\lceil \frac{k-1}{2} \right.$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{nt}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{n-1}{2}-\frac{nt}{2}}} \cdot dx.$$

$$= C \frac{2^{\frac{n-k}{2}}}{\left\lceil \frac{nt}{2} \right.} \left\lceil \frac{n-k}{2} + \frac{nk}{2} \right. \left\lceil \frac{k-1}{2} \right. \; B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{nt}{2}\right)$$

$$= C \frac{2^{\frac{n-k}{2}} \left\lceil \frac{n-k}{2} + \frac{nt}{2} \right. \left\lceil \frac{k-1}{2} \right. \left\lceil \frac{n-1}{2} \right.}{\left\lceil \frac{n-1}{2} + \frac{nt}{2} \right.} \qquad \ldots (1)$$

$t = 0$ என்று மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$C = 2^{\frac{n-k}{2}} \left\lceil \frac{n-k}{2} \right. \left\lceil \frac{k-1}{2} \right.$$

இம் மதிப்பை, (1)-ல் பிரதியிட,

$$E(\lambda_1{}^t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2} + \frac{nt}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} \; \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \frac{nt}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}(t+1) - \frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}(t+1) - \frac{1}{2}\right)} \quad \ldots \quad (2)$$

ஆனால், $Z \to \infty$ எனில், $\frac{\Gamma Z + h}{\Gamma Z} \to Z^h$ என்றறிவோம்.

மேற்கண்ட முடிவை (2)-ல் பயன்படுத்த,

$$E\lambda_1{}^t \to \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{\frac{n}{2}(t+1)\right\}^{-K/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{-K/2} \left\{\frac{n}{2}(t+1)\right\}^{-\frac{1}{2}}} = (t+1)^{-\frac{K-1}{2}} \quad \ldots \quad (3)$$

$$E\left\{e^{-\frac{1}{2}\chi^2_f}\right\}^t = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma\frac{f}{1}} \int_0^\infty (x^2)^{\frac{f}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2_f(1+t)} dx^2_f = (t+1)^{-\frac{f}{2}} \quad \ldots \quad (4)$$

(3), (4) இவற்றை ஒப்பிட்டு நோக்க, $\lambda_1$ ஆனது $e^{-\frac{1}{2}x^2 f}$ என்ற பரவலாக $f = (k-1)$ எனக் கொண்டு அமைந்துள்ளது. எனவே, $-2 \log \lambda$, $(k-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $x^2$ எனத் தொடர்ந்து இணையாது அணுகிச் செல்லும் பரவலாக அமைகிறது.

(ii) நிகழ்தன்மை விகிதம்,

$$= \lambda_2 \frac{n^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{k} (n_i s_i^2)^{\frac{n_i}{2}}}{\prod_{i=1}^{k} (n_i)^{\frac{n_i}{2}} (\Sigma n_i s_i^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$E(\lambda_2^t) = \frac{n^{\frac{nt}{2}}}{\prod_{i=1}^{k} (n_i)^{\frac{n_i t}{2}}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\frac{n_i-1}{2} + \frac{n_i t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_i-1}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2} + \frac{nt}{2}\right)}$$

$n \to \infty$ எனில், $E(\lambda_2 t) \simeq \dfrac{1}{(1+t)^{-\frac{1}{2}(k-1)}}$ என அமைகிறது.

இம் மதிப்பு, $e^{-\frac{1}{2}\chi^2 F}$, $f = (k-1)$ என்பதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பாதலின், $-2\log \lambda_2$, $(k-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக, தொடர்ந்து அணுகிச் செல்லும் விதத்தில் அமைந்துள்ளது.

(iii) நிகழ்தன்மை விகிதம்

$$\lambda_3 = \frac{n^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{k} (n_i s_i^2)^{\frac{n_i}{2}}}{\prod_{i=1}^{k} n_i^{\frac{n_i}{2}} \{ n_i s_i^2 + \Sigma u_i (\bar{x}_i - x_i)^2 \}^{\frac{n_i}{2}}}$$

$$E\left(\lambda_3^t\right) = \frac{n^{\frac{nt}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\prod_{i=1}^{k} n_i^{\frac{t}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \frac{nt}{2}\right)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\frac{n_i-1}{2} + \frac{n_i t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_i-1}{2}\right)}$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் வலது பக்கம், $n \to \infty$ எனில், $(1+t)^{-(k-1)}$ஐ நோக்கிச் செல்கின்றபடியால் $-2 \log \lambda_8$ $2(k-1)$ வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$ பரவலாகத் தொடர்ந்து, அணுகிச் செல்லும் விதத்தில் அமைகின்றது.

## பயிற்சிகள்

1\. (a) $f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}, \quad 0 < x < \infty$

என்ற பரவலுக்கு $H_0 : \sigma = \sigma_0$ என்ற எடுகோளைச் சோதிக்க, ஒரு நடுநிலை மாறாத வகை $A$ சோதனையை அமைக்கவும்.

(b) சராசரி மாறுபாடு இவையிரண்டின் மதிப்புகளும் தெரியாத ஓர் இயல் நிலைப் பரவலுக்கு $H_0 : \sigma = \sigma_0$ $H_1 : \sigma > \sigma_0$ என்ற எடுகோள் சோதனைக்குச் சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை அமைந்துள்ளது என்று அச் சோதனையின் திறத்தையும் கண்டுபிடிக்க. சீரான மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை அமையாமைக்கு ஓர் எடுத்துக் காட்டு தருக.

ஓர் அளவை $t$ ஆனது, $\theta$ என்ற சுட்டுருப்பிற்கான போதுமான மதிப்பீடு எனில், $H_0 : \theta = \theta_0$ என்ற சூனிய எடுகோளை, $H_1 : \theta = \theta_1$ என்ற மாறெதிரான எடுகோளுடன் சோதிக்கையில் மிகச்சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி, $(B\,C\,R)$, $t$-ன் சார்பலனாக அமையும் என்று நிறுவுக.

3\. $H_0$, $H_1$ இரண்டும் எளிய எடுகோள் என்றும், அச் சோதனைக்கேற்ற மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி $(B\,C\,R)$ நேமன்-பியர்சன் கொள்கை அடிப்படையில் தீர்மானிக்கப்படுகின்றதென்றும் அமைந்திடின், அத்தீர்வு கட்டமான பகுதியை, இரண்டாம் வகைப் பிழையை ஒரு நிலை மதிப்பாகக் கொண்டு, முதல் வகைப்பிழையை மீச்சிறுமப்படுத்துவதன் மூலம் பெறலாம் என்று நிறுவுக.

4\. $$dF = \frac{dx}{\pi \lambda^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^2}{\lambda}\right)}, \quad -\infty < x < \infty$$

என்ற கோஷி பரவல் தொகுதி முழுமையானதன்று என்று காட்டுக.

5. n மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு கூறின் $i$-ஆவது மதிப்பு, கீழ்க்கண்ட பரவலைப் $\frac{1}{\Gamma\lambda_i} e^{-x_i} x_i^{\lambda_i} dx_i$, $0 < x_i < \infty$, $\lambda_i > 0$ பெறுகிறது எனில், $0 < \alpha < 1$ என்ற இடைவெளியில், ஒத்த அளவு $\alpha$ பகுதிக்கானது ஒன்றும் அமைவதில்லை என்று காட்டுக.

6. ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்படும் கூறின் கண் உள்ள மிகப் பெரிய மதிப்பாகிய $\frac{g(x)}{h(\theta)}$, $a < x < \theta$) என்பது முழுமையானது அல்ல என்று காட்டுக.

7. மாறுபாடு $\sigma^2$, குறிக்கப்படாத சராசரி '$a$' கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலுக்கு $H_0 : \sigma = \sigma_0$. $H_1\ \sigma = \sigma_1$ என்ற எடுகோள் சோதனைக்கான சீரான மிகத் திறம் வாய்ந்த சோதனையின் தீர்வுகட்டமான பகுதி,

$$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 < \text{ஒரு மாறிலி}, \ \sigma_1^2 > \sigma_0^2$$

$$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 < \text{ஒரு மாறிலி}. \ \sigma_1^2 < \sigma_0^2$$

என்று அமைகிறது என்பதை நிறுவுக.

8. இரு முழுமைத் தொகுதிகள் இயல் நிலைத்தன்மை வாய்ந்தன என்ற ஊகத்தில் அவற்றினின்று $m_1, m_2$ அளவுள்ள இருகூறுகளைக் கொண்டு, $(m_1 \neq m_2)$ $H_0$ " முழுமைத்தொகுதிகளின் மாறுபாடு சமம் " என்ற எடுகோளை $H_1$ : " முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாடு சமமன்று " என்ற மாற்று எடுகோளுடன் சோதிக்கையில். பரவலின் இரு கோடிகளில் அமைந்த சமப்பரப்பின் இணைவைத் தீர்வு கட்டமான பகுதி என்று கொள்ளும் $F$-சோதனை நடுநிலை மாறுதது என்று காட்டுக.

$$9.\ \ f(x) = e^{-\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)} \frac{dx}{\sigma}, \ 0 < x < \infty, \ \ \sigma > 0$$

என்ற பரவலில் $H_0 : \sigma = \sigma_0$ என்ற எடுகோளை $H_1 : \sigma = \sigma_1 (\neq \sigma_0)$ என்ற எடுகோளுடன் சோதிக்கையில், $UMPU$ சோதனையானது, $\Sigma X_i >$ ஒரு மாறிலி, $\Sigma X_i <$ மற்றொரு மாறிலி என்ற விதத்தில் அமைகிறது என்று காட்டுக.

10. $t$ என்பது $\theta$-க்கான போதுமான மதிப்பீடாகும். $t$-ஆனது முழுமையானதாகவும் அமையின், $t$ ஆனது, $\theta$-வைச் சாராத எந்த ஒரு பரவலையும் கொண்டமையும் எந்த ஓர் அளவை

யினின்றும் தனித்து, (சாராமல்) விளங்குகின்றன என்பதை நிறுவுக.

11. கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளை ஆராய்க : (i) *L.R.* சோதனைகள் நடுநிலை மாறுதவை, (ii) *L. R.* சோதனையின் தீர்வு கட்டமான பகுதி எப்போதும் கூறுவெளியை ஒத்தது.

12. $H_0$, $H_1$ இவ்விரண்டும் எளிய எடுகோள்கள் எனில், மிகச் சிறந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி (*BCR*) எப்போதும் நிகழ்தன்மை விகித முறையிலேயே பெறப்படலாம் என்று காட்டுக.

13. ''எடுகோள் $H_0$ எளியதாகவும், மாறெதிரான எடுகோள் $H_1$ கலவையானதாகவும், மேலும் எல்லா தரமான *BCR* களிலும், சீராக மிகத்திறம் வாய்ந்த தீர்வு கட்டமான பகுதி ஒன்று விளங்கினல், பின்னர் L. R. முறையானது, இத்தகைய தீர்வு கட்டமான பகுதியை நிர்ணயிக்கும்'' இக்கூற்றை ஆராய்க.

14. $N(a_1, \sigma_1^2)$, $N(a_2, \sigma_2^2)$ என்பன இரு இயல்நிலைத் தொகுதிகளாகும் $a_1 = a_2$ என்ற எடுகோளை $a_1 \neq a_2$ என்ற அமைக்க. ஒத்ததன்மை சோதனையில் நிகழ்தன்மை விகிதத்தை மறுக்கு எதிரேயானயைக் கருத்தில் கொண்டு அதற்கேற்ற தீர்வு கட்டமானபகுதியை விவரிக்கவும்.

15. $t$ என்ற அளவை $\theta$-க்கான போதுமான மதிப்பீடாகும். $u$ என்பது, $t$-யைச் சாராத வேறொரு அளவையெனில், $u$ஆனது $\theta$-வைச் சாராமல் விளங்குகிறது என்று நிறுவுக.

16. $$\frac{1}{\sigma}\, e^{-\left(\frac{x-\theta_1}{\sigma}\right)},\ \frac{1}{\sigma}\, e^{-\left(\frac{y-\theta_2}{\sigma}\right)}$$

என்பன இரு அடுக்குப் பரவல்கள் எனில், $\theta_1 = \theta_2$ என்ற எடுகோள் சோதனைக்கான நிகழ்தன்மை விகிதம்

$$\lambda = \left\{ \frac{\sum_1^{n_1}(x_i - x_1) + \sum_1^{n_2}(y_i - y_1)}{\sum_1^{n_1}(x_i - l) + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - l)} \right\}^{n_1 + n_2}$$

என்றமையும் என்பதை நிறுவுக. இவ்விடத்தில் (1) $x_1$ என்பது, முதல் தொகுதியிலிருந்து பெறப்படும் $n_1$ மதிப்புகளின் மிகச் சிறிய

தாகும். (2) $y_1$ என்பது இரண்டாவது தொகுதியிலிருந்து பெறப்படும் $n_2$ மதிப்புகளில் மிகச் சிறியதாகும். (3) $l$ என்பது இரண்டு கூறுகளும் ஒன்ருக்கப்படும்போது கிடைக்கும் $(n_1+n_2)$ மதிப்புகளில் மிகச் சிறியதாகும். மேலும் $\lambda$-வின் வாயிலாக அமைந்த இச் சோதனை முழுமையாக நடுநிலை மாருதது என்றும் நிறுவுக.

17. கூறுவெளியின் வாயிலாக ஓர் எளிய எடுகோள் ஒரு கலவை எடுகோள் இவற்றை விளக்குக. கலவை எடுகோள்களுக்கு, ஒத்த பகுதிகளை அமைப்பதற்கான பிரச்சினையை விளக்குக.

18. UMP சோதனையின் கொள்கையினை, அடிப்படைக் கோட்பாட்டை விளக்குக. இச்சோதனையை, ஸ்டுடண்ட் எடுகோளை, ஒரு புறத்த மாற்றுகளுக்கு எதிராகச் சோதிக்கையில் பெறுக. கூறுவெளியின் வாயிலாக, இச் சோதனையின் தீர்வு கட்டமான பகுதியை அமைக்க.

19. "கொள்கை மாருத சோதனை" என்பது யாது? ஓர் எடுத்துக்காட்டுடன், இத்தன்மையை விளக்குக.

20. சீராக மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை (UMPT) என்பது யாது? UMPT சோதனைக்கும், போதுமான அளவைக்கும் இடையேயான தொடர்பை வெளிப்படுத்துக.

$$dF(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad \theta > 0,\ 0 < x < \infty$$

என்ற பரவலுக்கு, $H_0 : \theta = \theta_0$ என்ற எடுகோளை, $H_1 : \theta < \theta_0$ என்ற எடுகோளுக்கு எதிராகச்சோதிக்கையில், UMPT சோதனை அமைகின்றதா என்று ஆராய்க.

21. ஒரு சுட்டுருப்பின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பைச் சோதிப்பதற்கு, நிகழ் தன்மை விகித முறையின் மூலம் எவ்வாறு தீர்வு கட்டமான பகுதி நிலையானதாக்கப்படலாம் என்று விளக்குக.

மேலும், ஓர் அலைவெண் பரவல் $\phi^1 = A + B\phi$ எனவும், $(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_2) > 0$ என்பது தீர்வு கட்டமான பகுதி என அமையும் வண்ணம், $\phi$-ன் மதிப்புகள் $\phi_1, \phi_2$ எனவும் அமைந்தால், பின்னர் தீர்வு கட்டமான பகுதி வட்டார எல்லைக்குட்பட்ட பகுதி வகை $A$ என்று காட்டுக.

22. $f(x, \theta) = \dfrac{\theta^{x} e^{-\theta}}{x!}$, $x = 0, 1, 2$

என்ற பியர்சன் பரவலில் $H_0 : \theta = \theta_0$; $H_1 : \theta = \theta_1\ (> \theta_0)$ என்ற சோதனையில் மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனையைப் பெறுக.

23. $N(0, \sigma^2)$ என்ற இயல் நிலைப்பரவலுக்கு $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : 0 < \sigma < \infty$ என்ற சோதனையில், வகை $A$ பகுதியை அடைய ஏதுவாகிறது என்று காட்டுக.

24. $x, y$ என்பது இரண்டு ஒன்றுடன் ஒன்று சம்பந்தமுள்ள இயல் நிலை மாறிகளாகும். n மதிப்புகள் $(x, y)$ கொண்ட ஒரு கூறிலிருந்து, $\sigma_x = \sigma_y$ என்ற எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கான L.R. சோதனையை அமைக்கவும்.

மேலும், இச்சோதனையானது $(x+y)$, $(x-y)$ இவற்றிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவைச் சோதித்தலுக்கு ஒப்பாகும் என்றும் காட்டுக.

25. கொள்கை மாறுத மற்றும் நடுநிலை மாறுத சோதனைகளை வரையறை செய்க. வகை $A$, வகை $A_1$ பகுதிகளை விளக்குக. வகை $A$ பகுதிகள் அமைவதற்கான தேவையான நிபந்தனைகளைத் தருக. எந்த வகையான பரவலுக்கு, வகை $A$, பகுதியானது, வகை $A_1$ எனவும் அமைகிறது.

# 9. சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகள்

## (Non-parametric Tests)

பரவற் சார்பலனைப் பற்றிய இயல்நிலைத்தன்மை அனுமானத்திற்குப் பதிலாகப் பொதுவான சில அனுமானங்களைக் கொண்டு தரமான புள்ளியியல் பிரச்சினைகளைத் தீர்வு காணும் முறைகளைச் "சுட்டுறுப்புகளைச் சாராத முறைகள்" என்று அழைக்கின்றோம். மாறிகள் பொதுவாக ஏதோ ஒரு தொடர்ச்சியான பரவலிலிருந்து கிடைப்பதாக இங்கு எடுத்துக் கொள்வோம். *k*. பியர்சனின் $\chi^2$-பொருத்தச் செம்மைச் சோதனைகள் (Tests of Goodness of Fit), வரிசை உடன் தொடர்புகள் (rank correlation), வரிசை முறையான புள்ளியியல் அளவைகளின் (order statistics) உபயோகம் இவற்றையும் சேர்த்த சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறைகள் இயல் நிலைத்தன்மை (Normality) அனுமானத்தை முழுக்க முழுக்கப் பயன்படுத்தவே இல்லை எனலாம்.

சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறைகளை வேறு ஒரு மாற்றுப் பெயராலும் பொதுவாக நாம் அழைக்கலாம். அதாவது, அவற்றைப் 'பரவலினின்றும் விடுபட்ட முறைகள்' (distribution-freem ethods) என்றும் அழைக்கிறோம். முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்து இருந்தால் புள்ளியியல் பிரச்சினையும் சுட்டுறுப்பைச்சார்ந்தவாறு இருக்கும். இப்பரவல் சுட்டுறுப்பைச் சாராமல் ஏதோ ஒரு தொடர்ச்சியான பரவலில் பொதுவாக அமைந்திருந்தால் அப்பிரச்சினையானது சுட்டுறுப்பைச் சாராத புள்ளியியல் பிரச்சினையாகின்றது. ஆனல் பிரச்சினையைத் தீர்க்க உதவும் முறையானது முழுமைத் தொகுதிப்பரவலின் வடிவத்தைச் சாராமலோ அல்லது அதன் சுட்டுறுப்புகளைச் சாராமலோ இருந்தால் அம் முறையைப் "பரவலினின்றும் விடுபட்ட முறை" (Distribution-free method) என்று கூறுகிறோம்.

நாம் இது வரை ஆய்ந்த எல்லா புள்ளியியல் சோதனைகளும் பெரும்பாலும் கீழ்கண்ட இரண்டு தனிற்சிறப்புகளை (features) பொதுவாகக் கொண்டுள்ளன.

(i) முழுமைத் தொகுதிக்கான பரவற் சார்பலன் தெரிந்த ஒரு சார்பலனாக உள்ளது. அத்தகைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தான் மாதிரி மாறி மதிப்புகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

(ii) அச்சோதனைகள் மேற்கூறிய பரவலின் சுட்டுறுப்பைக் குறித்த புள்ளியல் எடுகோளைச் சோதனை செய்வதற்கும் அல்லது அந்தச் சுட்டுறுப்புகளை மதிப்பீடு செய்வதற்கும் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

இத்தகைய முழுமைத் தொகுதியின் சுட்டுறுப்புகளைப்பற்றிய சோதனைகளைச் சுட்டுறுப்புக்கான சோதனைகள் (Parametric Tests) என்று கூறுகின்றோம். எனவே, ஒரு சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த புள்ளியியல் சோதனையானது, எந்த ஒரு முழுமைத் தொகுதி யிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றனவோ அந்த முழுமைத் தொகுதியின் சுட்டுறுப்புகளைப் பற்றிச் சில நிபந்தனைகளுடன் கூடிய ஒரு சோதனையாகும்.

ஆனால், ஒரு சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனை (Non-parametric Test) ஆனது எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றனவோ, அந்த முழுமைத் தொகுதிப்பரவலின் வடிவத்தைச் சாராத ஒரு சோதனையாகும். அதாவது சுட்டுறுப் பைச் சாராத சோதனை முழுமைத்தொகுதியின் வடிவத்தைப் பற்றி எந்த ஒரு அனுமானத்தையும் ஏற்படுத்திக் கொள்ளவில்லை. எனினும் சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகளை ஒட்டிய சில அனு மானங்களாவன :

(i) மாதிரி மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் தனித்தவை. (independent)

(ii) கவனத்தில் உள்ள மாறி ஒரு தொடர்ச்சி மாறி.

(iii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பலன்.

(iv) கீழ் வரிசைத் திருப்பு திறன்கள் (Lower order moments exist) இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

இந்த அனுமானங்கள், சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த சோதனை களுக்கான அனுமானங்களைவிடப் பலவீனமானவையேயாகும்.

பிரச்சினைகளைத் தீர்க்கும் முறையானது முழுமைத் தொகுதி யின் சுட்டுறுப்புகளைச் சாராமல் அதன் வடிவத்தைச் சார்ந்து

அமைந்தால் அதனைச் "சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறை (Non-parametric Method) என்று அழைக்கிறோம்.

எனவே, சுட்டுறுப்பைச் சாரும் பிரச்சினைகளும் சுட்டுறுப்பைச் சாராத பிரச்சினைகளும் இரண்டும் பரவலினின்றும் விடுபட்ட அல்லது பரவலினின்றும் விடுபடாதவையாக இருக்கக்கூடும். எனினும், ஆரம்பத்தில் சுட்டுறுப்பைச் சாராத' பிரச்சினைகளுக்குப் பரவலினின்றும் விடுபட்ட வழிமுறைகள் (Procedures) உண்டாக்கப்பட்டன. ஆகையால், இவ்விரண்டு பதங்களும் ஒன்றுக்கொன்று பரிமாற்றம் செய்யப்படும் வகையில் உபயோகிக்கப்படுகின்றன.

சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறைகளில் சில நன்மைகள் (அனுகூலங்கள்) காணப்படுகின்றன. அவையாவன :

(i) மிகக் குறைந்த அனுமானங்களே இம் முறைகளுக்குத் தேவைப்படுகின்றன.

(ii) கணிப்பதற்கு இம் முறை எளிதானதாகும்.

(iii) உண்மையான (சரியான) மதிப்புகள் கிடைக்க முடியாத போதும், புள்ளி விவரங்கள் வரிசைமுறைகளாக மட்டுமே (ranks) கிடைக்கும் சமயங்களில், இம் முறை பயன்படுகிறது.

(vi) எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரி கொடுக்கப்படுகின்றதோ அந்த முழுமைத் தொகுதியின் பரவலுக்கான வடிவத்தைப் பற்றிய எந்த அனுமானமும் இங்கு செய்யப்படுவதில்லை,

(v) உற்றறி பண்பாற்றல் முறை (Psychometry), சமுதாய வளர்ச்சி இயல், கல்விப் புள்ளியல் முதலிய துறைகளில் இம் முறை வெகுவாகப் பயன்படுகின்றது.

சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகளினால் ஏற்படும் தீங்குகள் :

1. மாறி மதிப்புகள் பெயரளவேயானாலும், அல்லது எண் வகையில் வரிசை முறையிலிருந்தாலும் (nominal or ordinal) மட்டுமே சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகள் உபயோகப்படுத்தப்படுகின்றன. இங்கும், ஒரு சுட்டுறுப்புக்கான சோதனை செய்ய முடியுமானால், அதுதான் சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனையை விடச் சிறந்ததாகும்.

2. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் (Analysis of variance), எதிர் எதிர் செயல் விளைவுகளைச் (interactions) சோதிக்க இது வரை எந்த ஒரு சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனையும் கிடையாது.

3. புள்ளியியல் எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கு மட்டும் தான் சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகள் அமைக்கப்பட்டுள்ளனவே தவிரச் சுட்டுறுப்புகளை மதிப்பீடு செய்வதற்கு இம்முறைகள் பயன் படுவதில்லை.

இந்தச் சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறைகள் வரிசைப் புள்ளியியல் கொள்கையை (Order statistics Theory) மூலமாகக் கொண்டு அமைகின்றன. $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பதை ஒரு வரிசை மாதிரி என்று நாம் கூறினால் $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$ என்று அர்த்தமாகிறது.

சமீப காலமாக நிறைய உத்தி முறைகள், சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகளில் விளக்கமாக விவரிக்கப்பட்டுள்ளன. கீழே குறிச் சோதனைகள், வில்காக்சன் குறியிடப்பட்ட அணி வரிசைச் சோதனைகள், இடைநிலைச் சோதனைகள், மான்-விட்னி U-சோதனைகள், வால்ட்-வில் ஃபோவிட்ஸ் ஓட்டகங்கள் சோதனைகள், கோல்மோ கிரோவ்-சிமிர்னவ் ஒரு மாதிரி, இரு மாதிரிகள் சோதனைகள், கிரஸ்கல்-வாலிஸ் சோதனைகள் மற்றும் பல வகையான சோதனைகளை விவரித்து விளக்கியுள்ளோம்.

நாம் முன்னர் அறிந்த சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த சோதனைகளான $t$-சோதனை, இயல்நிலைச் சோதனை, $F$-ன் சோதனை போன்றவற்றிலிருந்தும் மேற்கூறிய சோதனைகள் வேறுபட்டும் இருப்பதுடன், சுலபமாய்ச் செய்யக்கூடிய சோதனைகளாக இருக்கின்றன. கைவர்க்கச் சோதனை, சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த முறைகளுக்கும், சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறைகளுக்கும் பொருந்தக் கூடிய ஒரு சோதனையாக உள்ளது.

(மைய) இடத்துக்கான சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகள் (Non-parametric Tests for Location) : ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் (மைய) இடத்தைப் பற்றிய சுட்டுறுப்புக்கான (location parameter) சில சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனைகளை அல்லது இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளின் (மைய) இடங்களை ஒத்துப் பார்ப்பதற்கான சுட்டுறுப்பைச் சாராத சில சோதனைகளை நாம் இங்குக் கவனிப்போம். இச் சோதனைகளில் முழுமைத் தொகுதியினைப் பற்றிய வழக்கமான இயல்நிலைத் தன்மை அனுமானங்களைச் செய்யப் போவதில்லை.

**9·1** குறிச்சோதனை (Sign Test) : ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மைய இடத்துக்கான சுட்டுறுப்பு $\theta$-ஐப்பற்றிய சோதனை)

நாம் இப்போது $H_0 : \theta = \theta_0$ என்ற சூனிய எடுகோளை, $H_1 : \theta \neq \theta$ என்ற மாறெதிர் எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதிக்க விரும்புகின்றோம். (இங்கு $H_1$ என்பது $H_1 : \theta > \theta_0$ அல்லது $H_1 : \theta < \theta_0$ என்று இருக்கலாம்)

ஒரு தொடர்ச்சிப்பரவலுக்கு $P_r[X < \theta_0] = P_r[X > \theta_0]$ என்ற ஓர் அனுமானத்தைத்தான் நாம் இங்கு உண்டாக்குகிறோம். அதாவது, $\theta$ என்பதை முழுமைத் தொகுதியின் இடைநிலை என்று அனுமானிக்கின்றோம்.

இச் சோதனையைச் செய்வதற்கு, மாதிரி மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் அது $\theta^0$-க்கு அதிகமாக இருந்தால் (+) குறி மூலமாகவும் $\theta_0$-க்குக் குறைவாக இருந்தால் (−) குறி மூலமாகவும் மாற்றிக் குறிப்போம். $\theta_0$-க்குச் சமமான மாதிரி மதிப்புகளை நாம் ஏற்றுக்கொள்ளாமல் தவிர்த்து விடுகிறோம். நேர் குறியும் (+) குறி, எதிர்மறைக் குறியும் (− குறி), சுட்டுறுப்பு மதிப்பு 0·50ஐக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் அமைகிறது என்ற சரிசமமான சூனிய எடுகோளைச் சோதிப்பதன் மூலம் நாம் முன்னமே வரையறுத்த $H_0 : \theta = \theta_0$ என்ற சூனிய எடுகோளைச் சோதிக்க முடியும். தீர்வு கட்ட மதிப்பானது (critical value), நிகழ்தகவு $p = 0{\cdot}50$, $m =$ (+ குறிகளின் எண்ணிக்கை, − குறிகளின் எண்ணிக்கை இவற்றின் கூட்டல்) இவற்றைக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பெறுத்த மதிப்பாகும். ஈருறுப்புப் பரவல் தொடர்ச்சியற்ற பரவல் என்பதால், தீர்வு கட்ட மதிப்புகள், குறிக்கப்பட்ட மிகைத்தன்மை மட்டங்களுக்குச் சரியாக இருக்காது, ஆகவே தோராயமாகக் கணக்கிட வேண்டும். சிட்னி சீகல் (Sydney Siegel) என்பவரின் (Non-parametric Methods for Behavioual Sciences என்ற புத்தகத்திலிருந்து தகுந்த அட்டவணைகளின் மூலம் எல்லாச் சுட்டுறுப்பைச் சாராத எல்லா சோதனைகளுக்கும் அட்டவணை மதிப்பை அதாவது தீர்வு மட்ட மதிப்பைப் பெற்றுக்கொள்ளவும்; எல்லாச் சோதனைகளுக்கும் இக் குறிப்பு பொருந்தும்.

சிட்னி சீகல் புத்தகத்தில் ஒரு பக்கத்திறன் ஈகறுப்பு நிகழ்தகவுகள் (One sided cumulative binomial probabilities) தரப்பட்டுள்ளன. இரு பக்க நிகழ் தகவு வேண்டுமாயின், இந்த அட்டவணை மதிப்பை இரட்டிப்பாக்க வேண்டும்.

உதாரணம் : ஒரு வகைப்பட்ட கோதுமை முனை நுனியின் (ear-head) இடைநிலை நீளம் $\theta = \theta_0 = 9{\cdot}9$ சென்டி மீட்டர் என்ற சூனிய எடுகோளை $\theta \neq 9{\cdot}9$ என்ற மாறெதிர் எடுகோளுடன் $\alpha = 0.05$ என்ற மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் கீழ்க்கண்ட 20 கண்டறிந்த மதிப்புகளை வைத்துச் சோதிக்க நாம் விரும்புகின்றோம்.

20 முனை நுனி மதிப்புகள் (சென்டி மீட்டரில்)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9.3 | (−) | 11.2 | (+) |
| 6 8 | (−) | 9.0 | (−) |
| 10.7 | (+) | 9.8 | (−) |
| 11.5 | (+) | 9.3 | (−) |
| 8.2 | (−) | 9.9 | |
| 9.7 | (−) | 10.3 | (+) |
| 10.3 | (+) | 10.0 | (+) |
| 8·6 | (−) | 10.1 | (+) |
| 11.3 | (+) | 9.6 | (−) |
| 10.7 | (+) | 10.4 | (+) |

இப்போது குறிகளைத்தீர்மானிப்பதற்கு $H_0 : \theta_0 = 9.9$ என்ற சூனிய எடுகோளைப் பயன்படுத்தி +, − குறிகளை ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் போடுவோம், 9.9-க்கும் அதிகமான மதிப்புகளுக்கு +குறி தரப்படுகிறது. இக்குறிகள் மேலே காணும் மதிப்புகளுக்கு நேராகப் போடப்பட்டுள்ளன. ஒரே ஒரு மதிப்பு மட்டும் 9.9 என்று உள்ளதால், அதற்கு+குறியும் போடமுடியாது. −குறியும் போட முடியாது. எனவே, அம்மதிப்பைத் தவிர்த்து விட்டு 20-க்குப் பதில் 19 மதிப்புகளை நாம் ஆராய்வோம். + குறிகளின் மண்ணிக்கை = 10, −குறிகளின் எண்ணிக்கை = 9 ஆகிறது- இந்த இரண்டு எண்களிலும் குறைந்த எண்ணை நாம் வெற்றிகள் என்று கொண்டால் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை = மீச்சிறு (9, 10) = 9. ஆகிறது. $p = 0.5$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலிலிருந்து 19 முயற்சிகளில் 9 வெற்றிகள் நிகழுமா என்பதை சோதிக்க விரும்புகின்றோம். அதாவது, 9 (−) குறிகளும் $H_0 : \theta_0 = 9.9$ என்ற சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்ளும் வகையில் அமையில் அமைகின்றனவா என்பதனை மேற் கூறிய விதத்திலும் குறிக்கலாம்.

$r =$ — குறிகளின் எண்ணிக்கை என்றால், மேலும்

$$\sum_{k_{\frac{\alpha}{2}}}^{n} \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{0}^{k'_{\frac{\alpha}{2}}} \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\alpha}{2}$$

என்றவாறு $k_{\frac{\alpha}{2}}$ என்பது ஒரு மிகச் சிறிய எண்ணாகவும், $k'_{\frac{\alpha}{2}}$ என்பது மிகப் பெரிய எண்ணாகவும் இருந்தால்,

இருபக்கச் சோதனைக்கான தீர்வு கட்டப்பகுதி

$r < k_{\frac{\alpha}{2}}$ யும், $r < k'_{\frac{\alpha}{2}}$ யும், என்ற விதத்தில் அமையும்.

சிட்டி சீகல் புத்தக அட்டவணை மூலம் $n=19$ $p=0.5$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $\alpha = 0.05$ என்ற மதிப்புக்கு,

$k_{0\cdot 025} = 15$

$k'_{0\cdot 025} = 4$ என்று அறிகின்கிறோம்.

நமது உதாரணத்தில் $r = 9$ என்பதால், $H_0$ எனும் சூனிய எடுகோளை நிராகரிக்காமல் ஏற்றுக் கொள்கின்றோம்.

மேற்கூறிய உதாரணத்தில் $H_0 : \theta = 9.9$, என்றும், $H_1 : \theta > 9.9$ என்றும் இருந்தால் ஒரு பக்க சோதனைக்கான தீர்வுகட்டப் பகுதி கீழ்க்கண்டவாறு கண்டுபிடிக்கலாம் :

$\sum_{k_{\alpha}}^{19} \binom{19}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} \leqslant 0.05$ என்றவாறு $k_{\alpha}$ ஒரு சிறிய எண்ணானால் $r < k_{\alpha}$ என்பதன் மூலம் தீர்வு கட்டப்பகுதி கண்டு பிடிக்கப்படும். $n < 25$ என்றால், சோதனையை மேற்கொள்வதற்கு, ஈருறுப்புப்பரவலுக்கான இயல் நிலைத் தோராயத்தை (Normal approximation) உபயோகிப்போம்.

இங்கு $n$ முயற்சிகளில் $r$ அல்லது அதற்கும் குறைவான வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவு, சூனிய எடுகோளின்படி $\Phi(\tau)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலின் ஒரு பரப்பு மதிப்பாகிறது.

இங்கு $\tau = \dfrac{r - E(r)}{\sqrt{Var(r)}}$

ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு $p = 0{\cdot}50 = \frac{1}{2}$ எனும்போது

$$E(r) = np = \frac{n}{2}$$

$V(r) = npq = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \dfrac{n}{4}$ என்பதால்.

$$\tau = \frac{r - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$$

$$= \frac{2r - n}{\sqrt{n}}.$$

$n$ மிக அதிகமாகும்போது $(\sigma > 25,)$ $\tau$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியாகிறது.

அதாவது, $\tau = \dfrac{2r - n}{\sqrt{n}} \frown N(0, 1)$

இப்போது

$$P_r(r < r_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{\tau_0} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau. = \Phi(\tau_0)$$

என்ற இயல்நிலைப் பரப்பு மதிப்பு ஆகிறது.

இங்கு $\tau_0 = \dfrac{2r_0 - n}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

இப்போது $\alpha = 0.05$ என்றால். இருபக்கச் சோதனைக்கு, சுட்டுருப்புச் சோதனைக்குச் (Parametric Test) செய்தது போன்ற வாறு சோதித்து உய்த்துணர்வோம்.

## 9.2 குறிச்சோதனை (Sign Test) இணைக்கப்பட்ட மாதிரிச் சோதனை (Paired sample Test)

இணைக்கப்பட்ட மாதிரிகளில் சராசரிகளின் கண்டறிந்த வேறுபாடுகளின் பொருளுடைத் தன்மைக்கான (Significance) ஓர் இணைக்கப்பட்ட $t$-சோதனையானது, எல்லா இணைக்கப்பட்ட வேறுபாடுகளும் தனித்தவை என்றும், ஒரு பொதுவான மாறுபாட்டைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளது என்றும் ஆகிய அனுமானங்களுடன் செயல்படக்கூடிய சோதனையாகும். ஆனால், சில சமயங்களில் இயல்நிலைத் தன்மை, ஹோமோஸெடாஸ்டிசிடி (Homoscedasticity) இவற்றைப் பற்றிய அனுமானங்கள் மிக்க வலிவானவையாக உள்ளன. அவ் வகைகளுக்கு குறிச் சோதனையைப் பயன்படுத்த முடியும் (எல்லா வேறுபாடுகளுக்கும் முழுமைத் தொகுதிகள் ஒன்றாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லாதவாறு) முழுமைத் தொகுதி வேறுபாடுகளின் இடைநிலை $\theta$ என்று எடுத்துக்கொண்டு குறிச் சோதனையை உபயோகிக்கலாம்,

$H_0 : \theta = \delta$ என்ற சூனிய எடுகோளை, தகுந்த ஒரு பக்க அல்லது இருபக்க மாறெதிர் எடுகோளுக்கெதிராகச் சோதிக்க $X_{1i} - X_{2i} - \delta$ என்ற அளவுகளை அவற்றின் குறிகளின் (Signs வாயிலாக மாற்றி எழுதி $+$ குறிகள், $-$ குறிகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடித்து, முன்போல, ஒரு—மாதிரி குறிச் சோதனையைப்போல, உய்த்துணரலாம். இங்கு $i$ ஆவது ஜோடிக்கான இரு மாதிரி மதிப்புகள் முறையே $X_{1i}$, $X_{2i}$ ஆகும்.)

உதாரணம்: 10 பையன்களின் உடல் எடை மதிப்புகள், உணவு வகையில் மாற்றம் செய்யப்படும் முன்பும், மாற்றம் செய்யப்பட்டு 6 மாதங்கள் கழித்தும் எடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளாகக் தரப்பட்டுள்ளன.

| வரிசை எண் | எடை (பவுண்டில்) முன்பும் | பிறகு |
|---|---|---|
| 1 | 102 | 115 |
| 2 | 112 | 120 |
| 3 | 98 | 99 |
| 4 | 114 | 117 |
| 5 | 102 | 105 |
| 6 | 97 | 98 |
| 7 | 88 | 91 |
| 8 | 101 | 99 |
| 9 | 89 | 93 |
| 10 | 91 | 89 |

உணவு மாற்றத்தின் விளைவாக எடையில் ஏதாவது பொருளுடைய கூடுதல் காணப்படுகிறதா என்று சோதித்துணர்க.

தீர்வு : 10 பையன்களின் எடையில் ஏற்பட்ட கூடுதல் (gains) $d$ என்றால் அவை : 6, 8, 1, 3, 3, 1, 3, −2, 4, −2, ஆகும். கூடுதல் ஏதும் இல்லை; முன் போலவே உள்ளது என்ற சூனிய எடுகோளை $H_0 : \theta = 0$ என்றும், கூடுதல் உள்ளது என்ற மாறெதிர் எடுகோளை $H_1 : \theta > 0$ என்றும் கொள்வோம். இங்கு $\theta$ என்பது வேறுபாடுகளின் முழுமைத் தொகுதிக்கான இடை நிலையாகும். இந்த 10 மதிப்பு $d$-க்களில் இரண்டு − குறிகளும், 8 + குறிகளும் காணப்படுகின்றன. சூனிய எடுகோளின் படி 10 ஜதைகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் வேறுபாடுகளுக்கான + குறிகளும் − குறிகளும் சரிசமமாக இருக்க வேண்டும்; அதாவது + குறிகள், − குறிகள் ஒவ்வொன்றின் எதிர் பார்க்கும் அளவு = 5 ஆகும். − குறிகளின் எண்ணிக்கைக்கான மாதிரிப் பரவல், ஒரு − குறிக்கான நிகழ்தகவு = 0·5 என்றவாறான ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலாக உள்ளது. சிட்னி சீகல் புத்தக அட்டவணையிலிருந்து 2 அல்லது அதற்குக் குறைவான மைனஸ் குறிகளுக்கான நிகழ்தகவு = 0·0547 என்பதால், இந்த நிகழ்தகவு 0·05-க்கும் அதிகமாக இருப்பதால், 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம். எனவே, உணவு மாற்றத்தால் எடை கூடவில்லை என்று 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணர்கின்றோம். மிகப் பெரிய மாதிரி அளவுகளுக்கு, அதாவது $n < 25$ என்றால் ஈருறுப்புக்கான இயல்நிலைத் தோராயம் உபயோகிக்கப்படுகிறது.

உதாரணம் : ஒரு புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டு வரை படத்தில் 30 மாதிரி மதிப்புகளை, அவை மையக் கோட்டிற்கும் மேலே இருந்தால், $H$ என்றும் கீழே இருப்பின், ட என்றும் குறித்தால் கீழ்க்கண்ட தொடர் வரிசை ஏற்படுகின்றது. இங்கு ஓர் ஒழுங்கு முறை இருக்கிறதா என்று சோதிக்கவும்.

H ட ட ட H ட H H H ட ட ட ட H H ட HHH

ட ட H H ட H H H ட ட H.

தீர்வு : பொதுவாக $H$, ட இரண்டிலும் சமமான எண்ணிக்கை இருப்பதாக $H_0$ஐக் கொள்வோம்.

அதாவது $H_0$-ன் கீழ் $H_0$- = 15 ட = 15. நாம் $H$, ட-ன் மதிப்புகளைப் பிரச்சினையில் கூட்டி அறிந்தால் 16 $H$-ம், 14 ட-ம் இருக்கின்றன.

அதாவது, குறிச்சோதனையில் இப்பிரச்சினையை ஆராயும் போது, + குறிகளின் எண் = 16

— குறிகளின் எண் = 14

n = 30 > 25 என்பதால் இயல்நிலைத் தோராயத்தைப் பயன்படுத்தி

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{16 - 15}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2.74}$$

$= 0.36 < 1.96$ என்பதால்,

5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் $H_0$ஐ ஏற்றுக் கொள்கிறோம். அதாவது மையக் கோட்டிற்கு மேலேயும் கீழேயும் மதிப்புகள் சம மான எண்ணில் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். அதாவது, ஓர் ஒழுங்கு உள்ளது என்று முடிவு கட்டுகிறோம்.

### 9·3 வில்காக்சனின் குறியிட்ட அணி வரிசை சோதனை : (Wiicoxon's signed-Rank Test) ஜோடி சேர்த்த-மாதிரி சோதனை (Paired sample Test)

ஜோடியான மதிப்புகளுக்கான இந்தச் சோதனையானது முந்தைய இணைந்த மதிப்புகளுக்கான குறிச் சோதனையை விட வலிமையானது; ஏனென்றால், இச்சோதனையில் ஒரு ஜதையின் மதிப்புகளுதகிடையேயான வேறுபாடுகளின் அளவினை (magnitude) இங்கு நாம் எடுத்துக்கொள்கிறோம், குறிச் சோதனையின் அனுமானங்களையே நாம் இங்கும் அனுமானிக்கிறோம். $H_0 : \theta = \partial$ என்ற அதே சூன்ய எடுகோளை ஒரு பக்க அல்லது இரு பக்க மாறெதிர் எடுகோளைக்குச் சோதிக்கிறோம்.

$d_i = X_{1i} - X_{2i} - \partial$ என்ற கண்டறிந்த வேறுபாடுகளை முழுமை யான அளவில் (absolute magnitude) அதிகரிக்கும் வரிசையில் (increasing order), அணி வரிசைப்படுத்துகிறோம் (rank) இங்கு $X_{1i} = X_{2i}$ என்றால், அந்த $i$-ஜதையை நீக்கி விடுகிறோம்.

பிறகு அந்த அணி வரிசைகளுக்கு, அந்த வேறுபாடுகளுக் கான குறியினை எழுதுகிறோம். எனவே, இது ஒரு குறியிடப்பட்ட அணி வரிசையின் சோதனையாகும். வில்காக்சன் என்பவர் இச்

சோதனையைக் கண்டுபிடித்தாரானதால், அவரின் பெயரைக் கொண்டு இச்சோதனை விளங்குகிறது. இங்குச்சூன்ய எடுகோள் உண்மையாக இருக்கையில், நேர் அணி வரிசைகளின் கூட்டல் (sum of positive ranks) எதிர் மறை அணிவரிசைகளின் கூட்டலின் (sum of negative ranks)முழுமையான மதிப்பிற்குத் (absolute value) தோராயச் சமமாக இருக்க வேண்டும் என்று எதிர் பார்க்கின்றோம். இந்த இரண்டு முழுமையான அணிவரிசைக் கூடுதல்களில் எது குறைந்த கூடுதலோ அதை $T$ என்று அழைப்போம். இப்போது குறித்த n-மதிப்பிற்கு (n ஜதைகளுக்கு), தரப்பட்ட நிகழ் தகவிற்கான தீர்வு கட்ட அணிவரிசைக் கூடுதல் $T_0$ ஐ சிட்னி சீகல் புத்தகத்தின் தகுந்த அட்டவணையின் மூலம்தெரிந்து கொண்டு பிறகு $T$ ஐயும் $T_0$ ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும். ஒரு தரப்பட்ட மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் $T < T_0$ என்றால். $H_0$ஐ நிராகரிக்கின்றோம். $T<T_0$ என்றால், $H_0$ ஐ நிராகரிப்பதற்கு அல்லது சந்தேகிப்பதற்குப் போதுமான சான்றுகள் இல்லை என்று கூறிவிடுகிறோம். அதாவது, $H_0$ ஐப் பொதுவாக ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

n > 25 என்ற பெரிய அளவு மாதிரிகளுக்கு $H_0$ என்ற சூன்ய எடுகோளின் கீழ் $T$ ஒரு தோராய இயல் நிலைப்பரவலில்

$$E(T) = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\text{Var}(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$ என்றவாறு அமைகிறது என்பதால் இயல் நிலைத் தோராயச் சோதனை மூலம் உய்த்துணர்வு செய்ய முடிகிறது.

**உதாரணம் :** 10 பையன்களின் எடை அதிகரிப்புப் பிரச்சினையையே இங்கு எடுத்துக்கொள்வோம். உணவு மாற்றத்துக்கு முன்பும், பிறகுமான (6 மாதங்களுக்குப் பிறகு) எடை மதிப்புகள் தரப்பட்டபோது அவற்றின் [(ஒவ்வொரு பையனுக்குமான வேறுபாடுகளை அதாவது எடைக் கூடுதல்களை முன்போலவே பட்டியல்மூலம் கீழே எழுதுவோம்.

| வரிசை எண் | எடை (பவுண்டுகளில்) | | வேறுபாடு $d_i$ | குறியிடப்பட்ட அணி வரிசை |
|---|---|---|---|---|
| | முன்பு | பிறகு | | |
| 1 | 109 | 115 | 6 | 9 |
| 2 | 112 | 120 | 8 | 10 |
| 3 | 98 | 99 | 1 | 1.5 |
| 4 | 114 | 117 | 3 | 6 |
| 5 | 102 | 105 | 3 | 6 |
| 6 | 97 | 98 | 1 | 1.5 |
| 7 | 88 | 91 | 3 | 6 |
| 8 | 101 | 99 | −2 | −3.5 |
| 9 | 89 | 93 | 4 | 8 |
| 10 | 91 | 89 | −2 | −3 5 |

மேலே கண்ட பட்டியலில் கடைசி நிரலில் குறியிடப்பட்ட அணிவரிசை மதிப்புகளைக் காணலாம். இங்கு வேறுபாடுகளில் இரண்டு தடவை 1 என்றஇலக்கம் வருவதால் அணி வரிசைகள் $\frac{1+2}{2}$ = 1,2 இரண்டையும்1.5 என்று எழுதி ஒவ்வொரு வேறு பாடு 1-க்கும் அணிவரிசை 1.5 என்று எழுதிவிடுவோம். இதே போல எதிர் மறைக்குறியை விலக்கி விட்ட பின்னுனை அடுத்த பெரிய இலக்கம் 2, இரண்டு தடவை வருவதால் அணிவரிசைகள் 3, 4 இரண்டை $\frac{3+4}{2} = 3.5$ யும் தலாஎன்று கண்டுபிடித்து ஒவ்வொரு வேறுபாடு 2-க்கும் 3.5 என்று எழுதிவிட்டுப் பிறகு அந்தஅணிவரிசை மதிப்புகளுக்கு அந்த எதிர்மறைக் குறியையும் போட்டு வைப்போம். எனவே, கடைசி நிரலில் — 3·5, — 3·5 என்ற இரண்டு மதிப்புகள் இருப்பதைக் காண்கிறோம். அடுத்ததாக வேறுபாடு 3 என்ற எண் மூன்று தடவை வருகின்றதால், தொடர்ந்தாற் போன்ற அணி வரிசை எண்கள் 5, 6, 7 என்பனவற்றை மூன்று வேறுபாடுகளுக்கும்

தலா $\frac{5+6+7}{3}=6$ என்று எழுதுகின்றோம். அப்புறம் அணிவரிசை எண்கள் 8, 9, 10 என்பன முறையே வேறுபாடுகள் 4, 6, 8 என்ற மதிப்புகளுக்கெதிரே எழுதப்படுகின்றன. இங்கு இரண்டு வேறுபாடுகளில் எதிர்மறைக் குறிகள் இருந்ததால் குறியிடப்பட்ட அணி வரிசைகளிலும் இரண்டு எதிர்மறைக் குறிகள் உள்ளன.

இப்போது நேர் அணி வரிசைகளின் கூட்டல் = 48

எதிர்மறை அணிவரிசைகளின் கூட்டல் = −7

∴ எதிர்மறை அணிவரிசைகளின் முழுமையான கூட்டல் = 7
(absolute sum)

ஆகையால் $T=$ மீச்சிறு $(48, 7)=7$ ஆகின்றது. இப்போது $p=0{\cdot}025$ (ஒரு பக்க மதிப்பு), $n=10$ எனும்போது, சிட்னி புத்தகத்தின் தகுந்த அட்டவணையின் மூலம் $T_0=8$ என்று காண்கிறோம். இப்போது $T<T_0$ என்பதால், ஒரு பக்க 2·5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சூன்ய எடுகோள் நிராகரிக்கப்பட்டு, அதாவது உணவு மாற்றத்தின் மூலம் எந்த விளைவும் ஏற்படவில்லை என்ற சூன்ய எடுகோள் தள்ளப்பட்டு, உணவு மாற்றத்தின்மூலம் எடை கூடுதலாகிறது என்று 2.5%ன் ஒரு பக்க மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணர்கின்றோம்.

**9-4. மான்-விட்னியின் U-சோதனை (Mann-Whitney U-Test) இரண்டு தனித்த முழுமைத்தொகுதிகளின் (மைய) இடத்துக்கான சோதனை (Test for location of two Independent Populations) :**

மதிப்புகள், ஜதை சேர்க்கப்பட்டு, ஜதை ஜதையாகக் கவனிக்கப்படும்போது குறிச்சோதனையும், குறியிடப்பட்ட-அணி வரிசைச் சோதனையும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இரண்டு மாதிரிகளின் மதிப்புகள் ஜதையாகச் சேர்க்கப்படாதபோது அவை தனித்த மதிப்புகளாயிருக்கும்போது அவற்றின் (மைய) இட சுட்டுறுப்புகள் (location parameter's) ஒரேயளவுடையவை என்ற சூன்ய எடுகோளை, அதாவது $H_0 : \theta_1=\theta_2$ என்பதைச் சோதிக்கப் பயன்படும் ஒரு மிகவும் உபயோககரமான சோதனையே மான்-விட்னியின் U-சோதனையாகும். இதை மான்-விட்னி-வில்காக்சன் U-சோதனை என்றும் கூறுவதுண்டு.

இங்கு ஒரு சரியான ஏற்கத்தக்க சூன்ய எடுகோளானது, இரண்டு தனித்த மாதிரிகளும் முழுதும் ஒத்ததான (identical)

முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்பதாகும். மாறெதிர் எடுகோளானது, "ஒரு முழுமைத் தொகுதி மற்றதை விட வலது பக்கம் (அல்லது இடது பக்கம்) தள்ளியமைந்திருக்கிறது" அல்லது "இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் (மைய) இடத்தைப் பொறுத்தவரை விலகி இருக்கிறது" என்பதாகும்.

இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து $n_1$, $n_2$ என்ற அளவுகள் உடைய தனித்த மாதிரிகளை எடுத்துக் கொள்கிறோம். $n = n_1 + n_2$ என்ற கூட்டு மாதிரியை (இரு மாதிரிகளின் மதிப்புகளையும் ஒரு சேரக் கலந்ததால் கிடைப்பது கூட்டு மாதிரி) ஏறும் முகத்தில் அணி வரிசைப்படுத்துகிறோம். இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் முழுதும் ஒத்தவையாக (identical) இருந்தால் மாதிரிகளும் ஓர் ஒழுங்கான முறையில் இரண்டறக் கலந்து இருக்கும் என்று நாம் எதிர்பார்க்கலாம். ஆனால், இடச் சுட்டுறுப்புகளிடையே ஓர் அளவுடைய வேறுபாடு காணப்படின், ஒரு மாதிரியின் மதிப்புகள் நிறைய அளவு கீழ் அணி வரிசைகளையும், (lower ranks) மற்றொரு மாதிரியின் மதிப்புகள் நிறைய அளவு (மேல்) உயர் அணி வரிசைகளையும் (பிடித்துக்) கொண்டு இருக்கும், முதல் மாதிரியின் அளவு $n_2$ என்றும், $n = n_1 + n_2$ என்றும் இருந்தால், இந்த n மதிப்புகளையும் அணி வரிசைப்படுத்தினால் அணி வரிசைகளின் மொத்தம்

$$= 1 + 2 + \dots + n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது முதல் மாதிரி மதிப்புகளுக்கான அணி வரிசைகளின் கூட்டல் $R_1$ என்றும், இரண்டாவது மாதிரி மதிப்புகளுக்கான அணி வரிசையின் கூட்டல் $R_2$ என்றும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, $R_1 + R_2 = \frac{n(n+1)}{2}$ ஆகும்.

இச்சோதனைக்கான புள்ளியியல் அளவை $\cup$ என்றால்,

$$\cup = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

இதேபோல, மற்றொரு சமன்பாடு $R_2$-ன் மூலமாகக் கீழ்க்கண்டவாறு கிடைக்கிறது.

$$\text{அதாவது, } \cup' = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

$$= n_1 n_2 - \cup \text{ ஆகும்.}$$

$H_0$ என்ற சூன்ய எடுகோளின்படி, இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்றவை. எனவே, $R_1$ என்ற கூட்டலானது, முதல் $n$ நேர் எண்களிலிருந்து ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட $n_1$ நேர் எண்களுடைய கூட்டலாகும். எனவே, $H_0$-ன்படி,

$$E(R_1) = \frac{n_1(n+1)}{2} \text{ என்றும்,}$$

$$Var\,(R_1) = \frac{n_1 n_2\,(n+1)}{12} \text{ என்றும் அறிகிறோம்.}$$

இதைப் பயன்படுத்தி $\cup$-க்கான $E(\cup)$, $V(\cup)$ ஐக் கண்டுபிடித்தால்,

$$E(\cup) = \frac{n_1\,n_2}{2}$$

$$Var\,(\cup) = \frac{n_1\,n_2\,(n+1)}{12} \text{ ஆகிறது.}$$

ஆதலால், $H_0$-ன்படி $n_1, n_2$-ன் மதிப்புகள் ஓரளவுக்குப் பெரியவையாயிருந்தால், அதாவது 9 அல்லது அதற்கும் மேலே இருந்தால் $\cup$ மாறியானது $E(\cup) = \frac{n_1\,n_2}{2}$ சராசரி, மாறுபாடு $Var\,(\cup) = \frac{n_1\,n_2\,(n+1)}{12}$ என்ற சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தோராய இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றது. $n_1$, $n_2$-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு, அதாவது 8-ம் அதற்குக் கீழுமான மதிப்புகளுக்கு மான் (Mann), விட்னி (Whitney) இருவரும் ஓர் அட்டவணையில் சரியான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடித்துள்ளனர். சிட்னி-சீகல் புத்தகத்தில் காணப்படும் இந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, கண்டறிந்த $\cup$-ன் மதிப்பு, அட்டவணையிலுள்ள $\cup$-க்கான தீர்வு

---

குறிப்பு : உதாரணமாக $n = 5$ என்றும் $n_1 = 2$ என்றும்கொண்டால், (1, 2, 3, 4, 5) என்ற எண்களில் ஏதாவது இரண்டு எண்களுடைய கூட்டலுக்கானஎதிர்பார்த்த அளவு $= \frac{2(6)}{2} = 6$ ஆகிறது. எப்படியெனில், இந்த 10 வகையான கூட்டலுக்குமான எதிர்பார்த்த அளவு = சராசரி $= \frac{60}{10} = 6$ ஆகிறது.

எனவே, பொதுவாக $E\,(R_1) = \frac{n_1\,(n+1)}{2}$ ஆகும்.

$1+2=3$
$1+3=4$
$1+4=5$
$1+5=6$
$2+3=5$
$2+4=6$
$2+5=7$
$3+4=7$
$3+5=8$
$4+5=9$
———
60
———

கட்ட மதிப்பைவிடக் குறைவாகவோ அம் மதிப்புக்குச் சமமாகவோ இருந்தால், ஒரு, ஒருபக்கச் சோதனைக்கான தரப்பட்ட மிகைத் தன்மை மட்டத்தில், சூனிய எடுகோளை நாம் நிராகரிக்கிறோம். ஓர் இருபக்கச் சோதனைக்கு மிகைத் தன்மை மட்டத்தை நாம் இரட்டிப்பாக்கிக்கொள்ள வேண்டும்.

உதாரணம் : தொழிலாளி $A$, தொழிலாளி $B$ இருவரால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பழுதடைந்த பொருள்களின் எண்ணிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. முழுதும் ஒத்தவையான முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டன என்ற சூனிய எடுகோளைச் சோதிக்க $\alpha = 0.05$ உடன் கூடிய ஒரு U-சோதனையை உபயோகிக்க. இங்கு முழுமைத் தொகுதிகள் (மைய) இடத்தில் மட்டும் வேறுபடுகின்றன என்பதை மாற்றெதிர் எடுகோளாக எடுத்துக் கொள்ளவும்:

தொழிலாளி $A$ : 26, 27, 31, 26, 19, 21

தொழிலாளி $B$ : 23, 28, 24, 26, 22, 19.

இங்கு $n_1 = 6$, $n_2 = 6$, $n = n_1 + n_2 = 12$

இரண்டு மாதிரிகளையும் ஒன்றுசேரக் கலந்து மதிப்புகளை ஏறும் வரிசையில் எழுதினால்,

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மதிப்புகள் : | 19, | 19, | 21, | 22, | 23, | 24, | 26. | 26, | 26, | 27, | 20, | 31 |
| மாதிரி : | A | B | A | B | B | B | A | B | A | A | B | A |
| அணி வரிசை : | 1.5 | 1.5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 8 | 8 | 10 | 11 | 12 |

என்று கிடைக்கிறது. இவற்றுக்கான அணி வரிசை மதிப்புகளை நாம் எழுதினால் மேலே குறிப்பிட்டவாறு அமையும்.

முதல் இரு அணிவரிசை எண்களும் 1, 2 என்பதற்குப் பதில் 1.5, 1.5 என்று அமைகிறது. அதேபோல மூன்று 26 மதிப்புகள் உள்ளதால் அணிவரிசை எண்கள் 7, 8, 9 என்பதனைத் தலா $\frac{7+8+9}{3} = 8$ என்று எழுதியிருக்கிறோம்.

இப்போது முதல் மாதிரி மதிப்புகளின் அணி வரிசைகளின் கூட்டல்

$$= R_1 = 1.5 + 3 + 8 + 8 + 10 + 12 = 42.5$$

(A-க்களின் அணிவரிசைக் கூட்டல்)

$R_2$ = இரண்டாவது மாதிரி மதிப்புகளுக்கான அணிவரிசை எண்களின் கூட்டல்

$= 1.5 + 4 + 5 + 6 + 8 + 11$

($B$-க்களின் அணிவரிசைக் கூட்டல்)

$= 35.5.$

இங்கு $R_1$ அல்லது $R_2$ஐப் பயன்படுத்தி U-ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$R_1 = 42.5$ என்பதால்,

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$= 36 + \frac{6(7)}{2} - 42.5$$

$$= 36 + 21 - 42.5 = 57 - 42.5 = 14.5$$ ஆகும்.

இப்போது ஓர் ஒரு பக்கச் சோதனைக்கு, $H_0$-ன் கீழ், சிகல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி

$p(U < 14) = 0.294$

மேலும் $p(U < 15) = 0.350$ என்றும் அறிகின்றோம்.

எனவே, $p(U = 14.5)$-ன் மதிப்பு 0.30-க்கு மேல் உள்ளதாலும் 0.05ஐ விட அதிகமாக இருப்பதாலும், $H_0$ஐ ஏற்றுக் கொள்கின்றோம்.

ஓர் இருபக்கச் சோதனைக்கு, (இந்தச் சோதனைக்குகந்தது இங்கு ஓர் இரு பக்கச் சேதனையாகும்) அட்டவணையில் தரப்பட்ட $P$-ன் மதிப்பை இரட்டிப்புச் செய்ய வேண்டும். எனவே, இந்த நமது பிரச்சினைக்கு $H_0$ என்ற சூன்ய எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப் படுகிறது என்று உய்த்துணர்கிறோம்.

## 9.5 இடைநிலைச் சோதனை (MedianTest)

U-சோதனையைப் போலவே, இடைநிலைச் சோதனையும், இரண்டு தனித்த மாதிரிகளும் முழுதும் ஒத்தவாறுன முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்ற சூன்ய எடுகோளை அவை வெவ்வேறு இடச்சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்டவை என்ற மாறெதிர் எடுகோளுக்குச்சோதிக்கின்றது. இச்சோதனையானது (மைய) இடத்தில் வேறுபாடுகளுக்குக் கூருணர்வானது (sensitive) ஒரு சோதனையாகும். ஒப்பீடு செய்யக் கூடிய இரண்டு

முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து $n_1$, $n_2$ என்ற அளவுகளுடைய இரண்டு மாதிரிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இரு மாதிரிகளின் $n = (n_1 + n_2)$ மதிப்புகளையும் ஒன்றாய்ச் சேர்த்துப் பிறகு ஏறும் வரிசையில் (அல்லது இறங்கும் வரிசையில்) வரிசைப்படுத்திக் கூட்டு மாதிரியின் இடைநிலை $\hat{\theta}$-ஐத் தீர்மானிப்போம். பிறகு $\hat{\theta}$-க்குக் கீழே அமைகின்ற (விழுகின்ற) இரண்டு மாதிரிகளின் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், $\hat{\theta}$-க்குக் கீழே அமையாத (விழாத) அவற்றின் எண்ணிக்கையையும் கணக்கிடுவோம். அவற்றை ஒரு 2×2 இணைப்பட்டியலில் (contingency table) கீழ்க் கண்டவாறு குறிப்போம்.

| | மதிப்புகள் $<\hat{\theta}$ | மதிப்புகள் $>\hat{\theta}$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| மாதிரி 1 | $m_1$ | $n_1-m_1$ | $n_1$ |
| மாதிரி 2 | $m_2$ | $n_2-m_2$ | $n_2$ |
| மொத்தம் | $m_1+m_2$ | $n-m_1-m_2$ | $n$ |

$n_1$, $n_2$ இவற்றின் அளவு குறைவாயிருந்தால், இப் பட்டியல் அமைவதற்கான சரியான நிகழ்தகவினை நாம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

அதாவது,

$$P_r(m_1, m_2) = \frac{\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}}{\binom{n}{m_1+m_2}}$$

ஆனால், ஓரளவு பெரிய $n_1$, $n_2$ மதிப்புகளுக்கு, அதாவது ஒவ்வொன்றும் 10-க்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளுக்கு, 1 வரையற்ற பாகையைக் கொண்ட $\chi^2$-புள்ளியியல் மதிப்பைக் கீழ்க் கண்டவாறு உபயோகிப்போம்.

$$\chi^2 = \frac{n\,[m_1(n_2-m_2)-m_2(n_1-m_1)]^2}{n_1 n_2 \;(m_1+m_2)\;(n-m_1-m_2)}$$

ஒரு 2×2 இணைப்பட்டியல்

| வகுப்புகள் | $A$ | $\bar{A}$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| $B$ | $a$ | $b$ | $a+b$ |
| $\bar{B}$ | $c$ | $d$ | $c+d$ |
| மொத்தம் | $a+c$ | $b+d$ | $N$ |

$$N = a+b+c+d.$$

என்று இருந்தால், தற்சார்பற்ற அலைவெண்களிலிருந்து (independent frequencies) கண்டுபிடிக்கபட்ட $\chi^2$-ன் மதிப்பு

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2\ (a+b+c+d)}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$ ஆகும்

இதைப் பயன்படுத்தி, நமது இடைநிலைச் சோதனை உதாரணத்துக்கு

$$\chi^2 = \frac{n\,[m_1\,(\mathrm{n}_2 - m_2) - m_2\,(\mathrm{n}_1 - m_1)]^2}{\mathrm{n}_1\ \mathrm{n}_2 .\ (m_1+m_2)\,(\mathrm{n}-m_1-m_2)}$$

என்று அறிகின்றோம்

$\chi^2$-ன் அட்டவணை மதிப்பை ஒரு வரையற்ற பாகைக்கு 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் $\chi^2_0$ என்று கண்டுபிடித்து, பிறகு கண்டறிந்த $\chi^2$ ஐயும் $\chi^2_0$ ஐயும் ஒப்பிட்டு $\chi^2 > \chi^2_0$ என்றால், $H_0$ஐ நிராகரிப்போம். இது ஒரு சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த சோதனை போலாகிறது.

உதாரணம்: தொழிலாளி $A$, தொழிலாளி $B$ இவர்கள் உற்பத்தி செய்து பழுதடைந்த பொருள்களின் எண்ணிக்கை இடைநிலைச் சோதனை செய்து இரண்டு மாதிரிகளும் முழுதும் ஒத்த முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையா என்று உய்த்துணர்க.

தொழிலாளி $A$: 26 27 31 19 21 26

தொழிலாளி $B$: 19 24 23 22 28 26

தீர்வு : இரு மாதிரிகளின் மதிப்புகளையும் ஏறும் வரிசையில் ஒன்று சேர்த்தவாறு எழுதினால்,

| 19, | 19, | 21, | 22, | 23, | 24, | 26, | 26, | 26, | 27, | 28, | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *B* | *A* | *B* | *B* | *B* | *A* | *B* | *A* | *A* | *B* | *A* |

கூட்டு மாதிரியில் இடைநிலை $= \dfrac{24+26}{2} = 25$ ஆகிறது.

25-க்குக் கீழே உள்ள தொழிலாளி *A*-ன் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $= 2 = m_1$

25-க்குக் கீழே உள்ள தொழிலாளி *b*-ன் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $= 4 = m_2$

25-க்குக் கீழே விழாத தொழிலாளி *A*-ன் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $= 4 = n_1 - m_1$

25-க்குக் கீழே விழாத தொழிலாளி *B*-ன் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $= 2 = n_2 - m_2$

இங்கு $n_1 = 6$, $n_2 = 6$, $n = 12$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$.

இப்போது $2 \times 2$ இணைப்புப்பட்டியல் அமைக்கலாம்.

| | மதிப்புகள் | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| | <25 | >25 | |
| மாதிரி 1 | 2 | 4 | 6 |
| மாதிரி 2 | 4 | 2 | 6 |
| மொத்தம் | 6 | 6 | 12 |

$n_1, n_2$ இரண்டுமே 10-க்கும் குறைவாக உள்ளதால் சரியான நிகழ்தகவினைக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$P_r(m_1, m_2) = P_r[2, 4]$$

$$= \frac{\binom{6}{2}\binom{6}{4}}{\binom{12}{6}}$$

$$= \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}$$
$$= \frac{225}{924}.$$

$(m_1, m_2) = (2, 4)$ என்பதாலும், $m_1 + m_2$ என்பதாலும்
$(m_1, m_2) = (1, 5)$

$(m_1, m_2) = (0, 6)$ என்ற மேலும் இருவித விளைவுகளுக்கேற்ற நிகழ் தகவுகளைக் கண்டுபிடித்து $m_1 < 2$-க்கான மொத்த நிகழ்தகவு 0.05-க்கும் அதிகமாக இருந்தால் $H_0$ என்ற சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்ளலாம்.

எனவே, $(m_1, m_2) = (1, 5)$; $(m_1, m_2) = (0, 6)$ என்பவற்றுக்கான பட்டியல்களை முதலில் அமைத்துப் பின்னர் $P_r(1, 5)$, $P_r(0, 6)$ நிகழ்தகவுகளை நாம் இப்போது கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

| | மதிப்புகள் | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| | $<25$ | $>25$ | |
| A | 1 | 5 | 6 |
| B | 5 | 1 | 6 |
| மொத்தம் | 6 | 6 | 12 |

| | மதிப்புகள் | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| | $<25$ | $>25$ | |
| A | 0 | 6 | 6 |
| B | 6 | 0 | 6 |
| மொத்தம் | 6 | 6 | 12 |

$$P_r(1, 5) = \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{5}}{\binom{12}{6}} = \frac{6 \times 6 \times 12.11.10.9.8.7}{1,2.3.4.5.6}$$
$$= \frac{36}{924}$$

மேலும் $$P_r(0, 6) = \frac{\binom{6}{0}\binom{6}{6}}{\binom{12}{6}} = 1.1.\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}$$
$$= \frac{1}{924}$$

எனவே, அறிந்த $m_1 = 2$ மதிப்பை அல்லது அதற்குக் குறைவான மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான (ஒரு வழியில் (in one direction) அல்லது பாதையில்

$$\text{சரியான நிகழ்தகவு} = P_r(2, 4) + P_r(1, 5) + P_r(0, 6)$$

$$= \frac{225}{924} + \frac{36}{924} + \frac{1}{924}$$

$$= 0{\cdot}283$$

சரிச் சீரமைவின்படி (By Symmetry), ஒவ்வொரு வழிக்குமான, கண்டறிந்த பரவல் அல்லது குறைவான மதிப்புகளைப் பெறுவதற்

$$\text{கான சரியான நிகழ்தகவு} = 2\left[\frac{225}{924} + \frac{36}{924} + \frac{1}{36}\right]$$

$$= 0.566.$$

இப்போது $0.566 > 0.05$ என்பதால், இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் முழுதும் ஒத்தனவாக இருக்கின்றன என்ற சூன்ய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கின்றோம்.

இந்தச் சரியான நிகழ்தகவு முறையின் பெருத்த மறுப்பானது (chief objection), கணிப்பு முறையின் கடினம்தான். ஆனால், இங்கு முதல் நிகழ்தகவு $P_r(m_1, m_2) = P_r(2, 4) = \frac{225}{924} = 0{\cdot}2$ என்பதாலும் இதுவே $0{\cdot}05$ஐவிடக்கூட இருப்பதாலும் மற்ற நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக்க முற்படாமலேயே நமது முடிவினையும் உய்த்துணர்வினையும் எழுதிவிடலாம்.

இடைநிலைச் சோதனை ($k$-மாதிரிகளுக்கு) : இங்கு $k = 3$ மாதிரிகள் என எடுத்துக் கொள்ளவோம் $H_0$ : 3 மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதிளைக் யிலிருந்து கிடைத்கொள்கிறோம்

எல்லா மாதிரி மதிப்புகளையும் ஒரு சேரக் கலந்து அவற்றை ஏறு வரிசையில் எழுதி, அந்தக் கலப்பான தொகுப்புக்கு, ஒரு பொதுவான இடைநிலை $\hat{\theta}$யைக் கண்டு பிடிக்கின்றோம். இப்போது ஒரு $2 \times 3$ இணைப்புப் பட்டியலை கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கின்றோம்.

கண்டறிந்த விவரங்கள் $= (O_{ij})$

| மதிப்புகள் | மாதிரி I | மாதிரி II | மாதிரி III | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|
| $< \hat{\theta}$ | $O_{11}$ | $O_{12}$ | $O_{13}$ | $O_1$ |
| $> \hat{\theta}$ | $O_{21}$ | $O_{22}$ | $O_{23}$ | $O_2$ |
| மொத்தம் | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O ..$ |

எதிர்பார்த்த விவரங்கள் :

$$(AB)_e = \frac{(4)\ (B)}{N} = (E_{ij}).$$

| மதிப்புகள் | மாதிரி I | மாதிரி II | மாதிரி III | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|
| $< \hat{\theta}$ | $E_{11}$ | $E_{12}$ | $E_{13}$ | $E_1$ |
| $> \hat{\theta}$ | $E_{21}$ | $E_{22}$ | $E_{23}$ | $E_2$ |
| மொத்தம் | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E ..$ |

$O .. = E .. = N$ ஆகும்.

இப்போது $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \frown \chi^2$$

(2 – 1) (3 – 1) வரையற்ற பாகையுடன் என்பதால் இந்த $\chi^2$ஐக் கண்டுபிடித்து 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் (2 – 1) (3 – 1) $= 1 \times 2 = 2$ வரையற்ற பாகையுடன் கூடிய அட்டவணை $\chi^2$-உடன் ஒப்பிட்டுக் கண்டறிந்த $\chi^2 >$ அட்டவணை $\chi^2$ என்றால் சூன்ய எடுகோள் $H_0$ஐ 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் நிராகரிப்போம்.

**இரு தனித்த மாதிரிகளுக்கான ஒரு பொதுவான சுட்டுருப் பைச் சாராத சோதனை (A general Non-parametric Test for two Independent Samples) :** இப்போது இரண்டு தனித்த மாதிரிகள் முழுதும் ஒத்த முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்தும் எடுக்கப்பட்டன என்ற சூன்ய எடுகோளை, முழுமைத் தொகுதிகள் எந்த விதத்தில் வேண்டுமானாலும் வேறுபடலாம்; மைய இடத்தைப் (location) பொறுத்தவரை, சிதறலைப் (dispersion) பொறுத்த வரை, கோட்டத்தைப் பொறுத்த வரை (skewness) தட்டை அளவைப் (kurtosis) பொறுத்தவரை, ஆகவே மொத்தத்தில் எந்த விதத்தில் வேண்டுமானால் வேறுபடலாம் என்ற மாறெதிர் எடுகோளுக்குச் சோதிக்க ஒரு பொதுவான இரு-மாதிரிச் சோதனையை இங்கு நாம் கவனிக்கின்றோம்

இரு முழுமைத் தொகுதிகளும் (மைய) இடத்தில் மட்டும் வேறுபடுகிறதா அல்லது சிதறலில் மட்டும் வேறுபடுகிறதா என்பதைச் சோதிக்க விரும்பினால், அதற்கேற்றவாறு இடத்துக்கான சோதனை அல்லது சிதறலுக்கான ஒரு சோதனையை நாம் உபயோகிக்க வேண்டும். இங்கு கவனத்தில் கொண்டுள்ள சோதனையானது, எல்லாவித வேறுபாடுகளுக்குமான ஒரு சோதனையானதாலும், ஒரு குறிப்பிட்ட வகை வேறுபாடுக்கான சோதனையன்று என்பதாலும், இச்சோதனை ஒரு குறிப்பிட்ட வகை வேறுபாடுகளைக் கண்டறிவதில் குறைந்த வல்லமைதான் பெற்றுள்ளது.

**9·6 வால்ட்-வோல் ஃபோவிட்ஸ் ஓட்டச் சோதனை Wald-wolfowitz Run Test) :** இரண்டு தனித்த மாதிரிகள் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன என்ற சூன்ய எடுகோளை அந்த இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் (ஏதோ ஒரு வகையில்) வேறுபடுகின்றன என்ற மாறெதிர் எடுகோளுக்குச் சோதிக்க விரும்புகையில், இச்சோதனை பயன்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் தொடர்ச்சியானது என்று இச்சோதனை அனுமானிக்கின்றது. முதல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $n_1$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம். இம்மாதிரி மதிப்புகளை $x$-களால் குறிப்போம். இரண்டாம் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $n_2$ அளவுடைய ஒரு ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம். இம்மாதிரி மதிப்புகளால் குறிப்போம். பிறகு இரண்டு மாதிரி மதிப்புகளையும் ஒரு சேரக் கலந்து அவற்றை ஏறும் வரிசையில் (அல்லது) இறங்கும் வரிசையில் எழுதுவோம். உதாரணமாக, ஒன்று கலந்த கூட்டு மாதிரி மதிப்புகள்

$$y\ xxx\ yyyy\ xx\ y\ x\ y\ xxx \ldots\ldots$$

என்ற ஒரு தொகுதியில் (sequence) இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

ஒரே வகையின் மதிப்புகளின் ஒரு தொகுதியை ஓர் ஓட்டம் (run) என்கிறோம். இத் தொகுதி அடுத்த வகை மதிப்புகளால் கரை கட்டப்பட்டு அல்லது எல்லைக்குட்பட்டு அமைகின்றது. மேலே காணப்படும் தொகுதியில், ஒரு '$y$' கொண்ட ஓர் ஓட்டம், பிறகு அடுத்தாற்போல மூன்று '$x$' களைக் கொண்ட ஓர் ஓட்டம், பிறகு 4 $y$-க்களைக் கொண்ட ஓர் ஓட்டம், பிறகு இரண்டு $x$-களைக் கொண்ட ஓர் ஓட்டம், அதன் பின் ஒரு $y$ கொண்ட ஓர் ஓட்டம், அதற்கப்புறம் ஒரு $x$-க்கான ஓட்டம், பின்னர் ஒரு $y$க்கான ஓட்டம், பின்னர் 3 $x$-களைக் கொண்ட ஓட்டம் இவ்வாறாக அத் தொகுதி காணப்படுகிறது. மொத்தம் $n$ மதிப்புகளின் ஓட்டங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $r$ என்று கொள்வோம். இரு மாதிரி களும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையா னால், இரண்டு மாதிரிகளும் ஒன்று சேரக் கலந்து இருக்குமாறு எதிர்பார்க்கின்றோம்; ஆகவே, $r$-ன் மதிப்பும் பெரிதாக இருக்கும். முழுமைத்தொகுதிகள் ஒரே போன்று இல்லாமலிருந்தால், $r$-ன் மதிப்பும் கொஞ்சம் குறைந்தே காணப்படும். $r$-ன் மதிப்பு மிகவும் குறைவாக இருந்தால் $H_0$ எனும் சூன்ய எடுகோளை நாம் நிராகரிக்கின்றோம் அல்லது தள்ளுபடி செய்கிறோம்.

$r$-க்கான மாதிரிப் பரவலைக் கண்டுபிடிக்க, $n_1$ $x$-களுக்கும், $n_2$ $y$-களுக்கும் ஒரே கோட்டில் (in a line) இருக்கக்கூடிய பலவித நிகழத்தக்க ஏற்பாடுகள் (arrangements)

$$\binom{n_1+n_2}{n_1} = \binom{n_1+n_2}{n_2}$$ என்று இருக்கும்.

இந்த எல்லா ஏற்பாடுகளும் சரிசமவாய்ப்புள்ளவையாகும். மொத்தம் $r$ ஓட்டங்களைத் தரக்கூடிய $n_1$ $x$-கள், $n_2$ $y$-கள் இவற்றின் ஏற்பாடுகளின் எண்ணிக்கையை நாம் அடுத்தபடி யாகக் கண்டுபிடிக்கிறோம். $r = 2d$ (இரட்டைப்படை எண்)ஆக இருக்கட்டும். எனவே, $x$-களில் $d$ ஓட்டங்களும், $y$-களில் $d$ ஓட்டங்களும் இருக்க வேண்டும். $x$-களில் $d$ ஓட்டங்கள் பெறுவதற்கு $n_1$ $x$-களை $d$ தொகுப்புகளில் வகுக்க வேண்டும்; $n_1$ மதிப்புகளில் எல்லாவித வரிசைப்படுத்தப்பட்ட $d$-பிரிவுப் பகுதியினங்களைக் (d-part partitions) கண்டுபிடிக்க வேண்டும். உருவாக்கும் சார்பலனின் (generating function) மூலமாக இது கீழ்க்கண்டவாறு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

$n_1$ மதிப்புகளின் $d$-பிரிவு பகுதியினங்களுக்கான தேவையான எண்ணிக்கை (required number)

$$= (t+t^2+t^3+\ldots)^d \text{-ல் } t^{n_1}\text{-ன் கெழு (coefficient)}$$

$$= t^d (1-t)^{-d}\text{-ல் } t^{n_1}\text{-ன் கெழு}$$

$$= t^d \sum_{i=0}^{\infty} \binom{d-1+i}{d-1} t^i\text{-ல் } t^{n_1}\text{-ன் கெழுவாகும்.}$$

$$= \binom{n_1-1}{d-1} \text{ ஆகிறது.}$$

இதேபோல $n_2$ $y$-களின் $d$-பிரிவு பகுதியினங்களுக்கான தேவையான எண்ணிக்கை $= \binom{n_2-1}{d-1}$ ஆகும்.

$x$-களின் $d$ ஓட்டங்களும் $y$-களின் $d$ ஓட்டங்களும் இரு விதங்களில் சேர்க்கப்பட்டு $r=2d$ஐக் கொடுக்குமாதலால்,

$r=2d$ ஓட்டங்களுள் கிடைப்பதற்கான மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 2\binom{n_1-1}{d-1}\cdot\binom{n_2-1}{d-1}$ ஆகும்.

$$\text{எனவே, } P(r=2d) = 2\,\frac{\binom{n_1-1}{d-1}\binom{n_2-1}{d-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

இதேபோன்ற வாதத்தின் (argument) மூலம், ஒற்றைப் படை $r$ ஓட்டங்களுக்கு

$$P(r=2d+1) = \frac{\binom{n_1-1}{d}\binom{n_2-1}{d-1}+\binom{n_1-1}{d-1}\binom{n_2-1}{d}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

இப்போது $\alpha$-மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சூன்ய எடுகோளை சோதிப்பதற்கு $p[r<r_0]=\alpha$ என்றவாறு $r_0$-ன் மதிப்பை (முடிந்தவரை சரியான $r_0$ மதிப்பை) நாம் கண்டுபிடுத்துக் கண்டறிந்த $r$ மதிப்பு $r_0$ஐத் தாண்டாவிட்டால் $H_0$ஐ நிராகரிக்கிறோம். $r$-ன்

தீர்வு கட்ட மதிப்புகள் சீகலின் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அட்டவணை மதிப்பை விடச்சிறிய அல்லது அதற்குச் சமமான கண்டறிந்த எந்த ஒரு $r$ மதிப்பும் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் பொருளுடையதாகிறது (significant).

$n_1, n_2$ இவற்றின் பெரிய அளவுகளுக்கு, $r$-ன் மாதிரிப்பரவல், $H_0$-ன் கீழ்,

$$\text{சராசரி } E(r) = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

$$\text{மாறுபாடு Var}(r) = \frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}.$$

இவற்றைக் கொண்ட ஒரு தோராய இயல் நிலைப்பரவலாக அமைகின்றது.

(i) $n_1, n_2$ இரண்டும் 10-க்கு மேல் இருந்தாலோ

(ii) $n_1$ அல்லது $n_2$ 20-க்கும் மேல் இருந்தாலோ இந்தத் தோராயச் சோதனையை மேற்கொள்ளலாம்.

இங்குப் பரவல் தொடர்ச்சியானதொன்றாக நாம் அனுமானித்ததால், ஒத்தவை (Ties) ஏதும் இருக்கக் கூடாது. ஆனால் நடைமுறையில், ஒத்தவை ஏற்படலாம் ஒரே மாதிரியில் ஒத்தவை வந்தால், நமக்கு ஏதும் பிரச்சினை இல்லை; ஏனெனில் இது ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கையைப் பாதிக்காது. இரு மாதிரிகளிலிருந்தும் வரும் மதிப்புகளில்ஒத்தவை ஏற்பட்டால், $r$-க்கான ஒரேமதிப்பை நாம் பெறமுடியாது. இச்சமயத்தில், எல்லா முடிந்த வழிகளிலும் ஒத்தவையை உடைத்து அதற்கேற்ற $r$-ன் மதிப்புகளைப் பெறுகின்றோம். இந்த எல்லா வேறுவித $r$ மதிப்புகளும், $\alpha$ மிகைத் தன்மைமட்டத்தில் ஒரே முடிவைத்தந்தால் ஒத்தவையால் ஏதொரு பிரச்சினையும் இல்லை.

எனினும், வெவ்வேறு வழிகளில் ஒத்தவையை உடைத்து எறிவதன் மூலம் கிடைக்கும் வெவ்வேறு $r$ மதிப்புகள், வெவ்வேறு முடிவுகளுக்கு வழிகோலுகின்றன. இரு மாதிரிகளின் மதிப்புகளில் ஏற்படும் ஒத்தனவைகளின் எண்ணிக்கை (மிக) அதிகமானால், இந்த ஓட்டங்கள்—சோதனை இலாயக்கற்ற சோதனையாகும்.

**உதாரணம் :** 6 தலைமைச் செயலக எழுத்தர்கள், 7 இயக்குநரக எழுத்தர்கள் அடங்கிய ஒரு தொகுப்பிற்கு ஓர் எழுத்தாய

ரைச் சார்ந்த (நாட்டம்) தகுதிச் சோதனையில் கிடைத்த கணிப்பு எண்கள் கீழ்வருமாறு :

| | |
|---|---|
| தலைமைச் செயலக எழுத்தர்களது கணிப்பெண்கள் | 40 35 52 60 46 55 |
| இயக்குநரக எழுத்தர்களது கணிப்பெண்கள் | 47 56 42 57 50 57 62 |

இருவகையான எழுத்தர்களின் தொகுப்பும் முழுமைத் தொகுதியில் ஒரே கணிப்பெண் பரவலைச் சார்ந்துள்ளதா என்பதைச் சோதித்து ஆய்க.

தலைமைச் செயலக எழுத்தர் மதிப்புகளை $S$ என்றவாறும், இயக்குநரக எழுத்தர் மதிப்புகளை $D$ என்றவாறு குறிப்போம். இப்போது இருமாதிரிக் கணிப்பெண்களையும் ஒருங்கே சேர்த்து ஏறுவரிசையில் எழுதினால் கீழ்க் கண்டவாறு கிடைக்கிறது.

| 35 | 40 | 42 | 46 | 47 | 50 | 52 | 55 | 56 | 57 | 57 | 60 | 62 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | D | S | D | D | S | S | D | D | D | S | D |
| 1 | | 2 | 3 | 4 | | 5 | | 6 | | | 7 | 8 |

இங்கு $n_1 = 6$, $n_2 = 7$; $n = n_1 + n_2 = 6 + 7 = 13$

$S$-களுக்கு ஓட்டங்கள் எண்ணிக்கை $= 4$

$D$ ,, ,, ,, $= 4$.

எனவே, $r =$ மொத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை $= 8$.

புத்தகத்தின் தகுந்த சிகல்—அட்டவணை மூலம் 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் தீர்வுகட்ட $r$-ன் மதிப்பு $= 3$.

கண்டறிந்த $r$-ன் மதிப்பு (8) என்பது, தீர்வுகட்ட $r$-ன் மதிப்பை (3) விட அதிகமானதால், 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் $H_0$=சூனிய எடுகோளை நாம் ஏற்றுக்கொள்கின்றோம்.

அதாவது, இருவகையான எழுத்தர்களின் மதிப்பெண்களும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியைச் சார்ந்ததாக உள்ளது.

உதாரணம்: ஒரு விளையாட்டுப் போட்டியில் 12 ஆண்களின் 12 பெண்களின் வலுச் சண்டைக் கணிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன:

| ஆண்கள் | பெண்கள் |
|---|---|
| 88 | 55 |
| 69 | 40 |
| 72 | 22 |
| 65 | 58 |
| 113 | 16 |
| 65 | 7 |
| 118 | 9 |
| 45 | 16 |
| 141 | 26 |
| 104 | 36 |
| 41 | 20 |
| 50 | 15 |

வலுச் சண்டையின் தன்மையில் ஆண்—பெண் இன வேறுபாடுகள் காணப்படுகின்றனவா என்பதை ஆராய்ந்து உணர்க.

இங்கு $H_0$ : இரு பாலாருக்கும் வலுச் சண்டையின் வேகம் ஒரேயளவாக உள்ளது.

$H_1$ : வலுச் சண்டை வேகத்தில் வேறுபாடுகள் உள்ளன.

இங்கு இரு தனித்த தொகுதிகளின் வலுச் சண்டைக் கணிப்பெண்களிடையே எந்தவித வித்தியாசங்களையும் நாம் எடுத்துக் கொள்ளலாம் என்பதால், வால்ட்-வோல்ஃபோவிட் ஓட்டச் சோதனையை மேற் கொள்கிறோம்.

$$n_1 = 12, \quad n_2 = 12.$$

இரண்டு மாதிரி மதிப்புகளையும் ஒன்றுசேரக் கலந்த ஏறுமுக வரிசைப்படுத்தினால்,

| 7 | 9 | 15 | 16 | 16 | 20 | 22 | 26 | 36 | 40 | 41 | 45 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G | G | G | G | G | G | G | G | G | G | B | B | B |
| | | | | (1) | | | | | | | (2) | |

| 55 | 58 | 65 | 65 | 69 | 72 | 88 | 104 | 113 | 118 | 141 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G | G | B | B | B | B | B | B | B | B | B |
| (3) | | | | | | (4) | | | | |

$B$ = Boys = ஆண்கள்,

$G$ = Girls = பெண்கள்.

$r$ = ஓட்டங்களின் எண் = 4.

தீர்வுகட்ட $r$-ன் மதிப்பு = 7 ($n_1=12, n_2=12, \alpha=0.05$) கண்டறிந்த $r=4<7$ என்பதால் $H_0$ஐ நிராகரிக்கிறோம்.

எனவே, வலுச் சண்டையின் வேகம் இருபாலாரிடையே வேறுபடுகின்றது என்று முடிவு கட்டுகிறோம்.

உதாரணம் : $E$, $C$ என்ற இரு வகை எலிகளினுல் அறியக் கூடிய முயற்சிகள் இரு மாதிரிகளின் மதிப்புகளாக கீழே தரப் பட்டுள்ளன. அவை அறிந்து கொள்ளும் வீதங்களில் இந்த இரு வகை எலிகளும் பொருளுடைய தன்மையில் வேறுபடுகின்றனவா என்று சோதிக்கவும்.

அறிந்துகொள்ளகூடிய முயற்சிகள் (மதிப்புகள்)

| $E$ எலிகள் | $C$ எலிகள் |
|---|---|
| 20 | 28 |
| 55 | 8 |
| 29 | 24 |
| 24 | 51 |
| 75 | 8 |
| 56 | 6 |
| 31 | 15 |
| 45 | 15 |
| | 21 |
| | 23 |
| | 16 |
| | 15 |
| | 24 |
| | 15 |
| | 21 |
| | 15 |
| | 18 |
| | 14 |
| | 22 |
| | 15 |
| | 14 |

இங்கு $n_1=8$, $n_2=21$, $r=6$ என்று அறிகின்றோம். $n_2>2($ என்பதால், இயல்நிலைத் தோராயத்தைப் பயன்படுத்தி,

$$z = \frac{r - E(r)}{\sigma_r}$$

$$= \frac{6 - \left(\frac{2 \times 8 \times 21}{29} + 1\right)}{\sqrt{\frac{2 \times 8 \times 21(2 \cdot 8 \cdot 21 - 8 - 21)}{(29)^2 \; (8 + 21 - 1)}}}$$

$= 2{\cdot}92 > 2{\cdot}58$. அதாவது 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் எனவே, சூன்ய எடுகோளை நிராகரிக்கிறோம். இருவகை எலிகளின் தொகுதிகளும் அறிந்துகொள்ளும் வீதத்தில் பொருளுடைய தன்மையில் வேறுபடுகின்றன.

உதாரணம் : பம்பாய் பங்குச்சந்தை (share market) விபரங்கள் பல வருடங்களுக்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

| வருடம் | பங்கு | வருடம் | பங்கு | வருடம் | பங்கு |
|---|---|---|---|---|---|
| 1920 | 81·5 | 1937 | 79·8 | 1954 | 79·8 |
| 1921 | 81·6 | 1938 | 79·6 | 1955 | 79·0 |
| 1922 | 81·8 | 1939 | 78·5 | 1956 | 80·2 |
| 1923 | 81·1 | 1940 | 78·5 | 1957 | 81·5 |
| 1924 | 80·5 | 1941 | 79·6 | 1958 | 80·8 |
| 1925 | 80·0 | 1942 | 80·6 | 1959 | 81·0 |
| 1926 | 80·7 | 1943 | 82·3 | 1960 | 80·9 |
| 1927 | 81·2 | 1944 | 81·2 | 1961 | 81·1 |
| 1928 | 80·7 | 1945 | 79·1 | 1962 | 80·8 |
| 1929 | 80·0 | 1946 | 78·6 | 1963 | 79·7 |
| 1930 | 81·1 | 1947 | 78·7 | 1964 | 80·0 |
| 1931 | 81·9 | 1948 | 78·0 | 1965 | 81·6 |
| 1932 | 81·9 | 1949 | 78·6 | 1966 | 82·7 |
| 1933 | 81·3 | 1950 | 78·7 | 1967 | 82·1 |
| 1934 | 81·0 | 1951 | 78·6 | 1968 | 81·7 |
| 1935 | 80·5 | 1952 | 79·7 | 1969 | 81·5 |
| 1936 | 80·6 | 1953 | 80·0 | | |

(a) 81-க்கும் அதிகமான (High) மதிப்புகளை $H$ என்றும், மற்றவைகளை (Low) $L$ என்றும் குறித்தவாறு ஓட்டங்கள் சோதனை செய்து வருடாந்திர பங்கு மாற்றங்களில் ஏதேனும் ஓர் ஒழுங்கு உள்ளதா என்று சோதிக்கவும்.

(b) 82-க்கும் அதிகமான மதிப்புகளை $H$ என்றும் 80-க்குக் குறைவான மதிப்புகளை $L$ (Low) என்றும், மற்றவைகளை $M$ (Median) என்றும் குறித்துக்கொண்டு ஓட்டங்கள் சோதனை மூலம் வருடாந்திரப் பங்கு மாற்றங்களில் ஒழுங்கு உள்ளதா என்று சோதித்து உணர்க.

**தீர்வு :**

(a) $H_0$ : வருடாந்திரப் பங்குகள் மாற்றத்தில் எந்தவித ஒழுங்கும் இல்லை என்று கொள்க.

பங்கு மதிப்புகள் $X$ என்றால்,

$X > 81$ என்ற மதிப்புகளை $H$ என்றும்

$X < 81$ என்ற மதிப்புகளை $L$ என்றும்

குறித்தவாறு ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கையை நாம் இப்போது கணக்கிடுவோம்.

| மதிப்புகள் | ஓட்டம் |
|---|---|
| 81.5, 81.6, 81.8, 81.1 | 1 |
| 80.5, 80.0, 80.7 | 2 |
| 81.3 | 3 |
| 80.7, 80.0 | 4 |
| 81.1, 81.9, 81.9, 81.3 | 5 |
| 81.0, 80.5, 80.6, 79.8, 79.6, 78.5, 78.5, 79.6, 80.6 | 6 |
| 82.3, 81.2 | 7 |
| 79.2, 78.6, 78.7, 78.0, 78.6, 78.7, 78.4, 79.7, 80.0, 79.3, 79.0, 80.2 | 8 |
| 81.5 | 9 |
| 80.8, 81.0, 80.9 | 10 |
| 81.1 | 11 |
| 80.8, 79.7, 80.0 | 12 |
| 81.6, 82.7, 82.1, 81.7, 81.5 | 13 |

இங்கு $n=50$.

$H$-களின் எண்ணிக்கை $= n_1 = 19$

$L$-களின் எண்ணிக்கை $= n_2 = 31$

ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை $= r = 13$.

$n_1$ அல்லது $n_2 > 20$ என்றால், இயல் நிலைத் தோராயச் சோதனையை உபயோகிக்கவேண்டும்.

$$z = \frac{r - E(r)}{\sigma_r}$$

$$E(r) = \frac{2 n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

$$= \frac{2 \cdot 19 \cdot 31}{19 + 31} + 1 = 24{\cdot}56.$$

$$\sigma r^2 = \frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 2)}$$

$$= \frac{1178\,(1178 - 50)}{50^2 \cdot 48} = 10{\cdot}92.$$

$$\therefore \quad \sigma r = \sqrt{10{\cdot}92} = 3{\cdot}305.$$

ஆகையால்,

$$z = \frac{r - E(r)}{\sigma r} = \frac{13 - 24{\cdot}56}{3{\cdot}305} = -3{\cdot}5 \text{ ஆகிறது.}$$

ஒரு பக்க $0{\cdot}5\%$ மிகைத்தன்மை மட்டத்தில், அல்லது இரு பக்க $1\%$ மிகைத் தன்மைமட்டத்தில்.

$z = -3{\cdot}5 < -2{\cdot}58$ என்பதால், $H_0$ எனும் சூன்ய எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே, பங்கு மாற்றங்களில் எந்தவித ராண்டம் தன்மையும் இல்லை என்று தீர்மானிக்கின்றோம்.

(b) இங்கு $X > 82$ என்றால், $H$ என்றும்

$X < 80$ என்றால், $L$ என்றும்

$80 < X < 82$ என்றால், $M$ என்றும் வரையறுக்கின்றோம். இந்த ஆய்வின் மூலம் $H$-ன் எண் $= 3$

$L$-ன் எண் $= 16$

$M$-ன் எண் $= 31$ ஆகிறது.

$M$ = இடைநிலை மதிப்புகளானதால் அவற்றை அந்த எல்லா 31 மதிப்புகளையும் நீக்கிவிட்டு, மீதமுள்ள 19 மதிப்புகளுக்கு $H_0$: High (+), Low (—) மதிப்புகள் ராண்டம் முறையில் நிகழ்கின்றன என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு, $n_1 = 3$

$n_2 = 16$

$r = 6$ என்று காண்கிறோம்.

$r$-ன் தீர்வு கட்ட மதிப்பு = 3 சீகல் அட்டவணை என்பதாலும் கண்டறிந்த $r > 3$ என்பதாலும் $H_0$ஐ ஏற்றுக்கொள்கின்றோம். அதாவது, இம்முறையில் அதிக (H), குறைந்த (—) பங்கு மாற்றங்கள் ராண்டம் முறையில் நிகழ்கின்றன என்று உய்த்துணர்கின்றோம்.

## 9·7 ராண்டம் தன்மைக்கான ஒரு மாதிரிச்சோதனை (One sample Test for Randomness) :

ஒரு மாதிரியைக் கொண்டு, ஒரு முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய சில முடிவினை நாம் ஏற்படுத்திக் கொள்வதால் நாம் ஒரு ராண்டம் மாதிரியை விரும்புகின்றோம். ஒரு மாதிரியானது ராண்டம் மாதிரி என்ற சூன்ய எடுகோளைச் சோதித்தறிவதற்கு மூலமுதலாக ஆரம்பத்தில் மாதிரிக்கான மதிப்புகள் கிடைக்கப் பெறுகின்ற வரிசையினை (order) நாம் இங்குப் பயன்படுத்துகின்றோம். இங்கு உபயோகப்படுத்தும் உத்தி முறையானது ஓட்டங்களின் கொள்கையைப் (Theory of Runs) பின்பற்றியதாகும். உதாரணமாக, மாதிரிக் கண்காணிப்பில் (sampling inspection), பழுதான பொருள்களின், பழுதற்ற பொருள்களின் ஓட்டங்கள் கவனிக்கப்படுகின்றன. அதேபோல ஒரு காசைச் சுண்டும் சோதனையில் தலைகளின் ஓட்டங்களும், பூக்களின் ஓட்டங்களும் கிடைக்கின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுடைய ஒரு மாதிரியில் ஓட்டங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையானது ஒரு மாதிரி ராண்டமாக இருக்கிறதா இல்லையா என்பதைக் காட்டுகிறது. மிகக் குறைந்த அல்லது மிக அதிக ஓட்டங்கள் மதிப்புகளில் ஒரு காலப்போக்கினை (time trend) அல்லது ஓர் ஒழுங்கான குறுகிய கால சுழற்சி ஏற்றவிறக்கத்தினைக் (a systematic short-term cyclical fluctuations) காட்டுகிறது.

மாதிரியில் $n$ மதிப்புகளின் தொகுதியில் ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை $r$ஐ நாம் கண்டுபிடிக்கிறோம். கண்டறிந்த மதிப்பு

களாவன ஒரு காசு சுண்டும் சோதனையில் தலைகள் அல்லது பூக்களாக இருக்கலாம்; அல்லது ஒரு பொருளின் பெரிய குவியலில் இருந்து பொருள்களின் மாதிரிக் கண்காணிப்புச் சோதனையில் நல்ல பொருள்கள், அல்லது மோசமான பொருள்கள் ஆகவும் இருக்கலாம்; அல்லது மாதிரி இடைநிலைக்கும் குறைவான மதிப்பு அளவுகள் (—), மாதிரி இடைநிலைக்கும் அதிகமான மதிப்பு அளவு களாகவும் (+) இருக்கலாம். ராண்டம் மாதிரி முறையிலிருந்து $r$-ன் மாதிரிப்பரவலைப் பயன்படுத்தி, ராண்டம் மாதிரி முறையின் கீழ், ஒரு தரப்பட்ட மாதிரி அதிக அல்லது குறைந்த ஓட்டங்களைக் கொண்டுள்ளதா என்று நாம் தீர்மானிக்கின்றோம்.

உதாரணம் : ஒரு பல்கலைக் கழகத்தில் சேர்வதற்கு நிற்கும் ஒரு வரிசையில் இருக்கும் 15 மாணவர்களின் பால்வேறு பாட்டினைக் (sex) கீழ்க்கண்டவாறு குறித்து அறிந்தால், பால் வேறுபாடுகளின் ஓர் ஏற்பாடு, ராண்டம் முறையைச் சேர்ந்த ஒன்று அல்லவா என்பதை நிச்சயப்படுத்துக. வரிசையில் இருக்கும் 15 பேர்களில் ஆண்களை ($M$), பெண்களை ($F$) என்று குறிப்பிட்டால், அவ்வரிசையானது :

$$\underbrace{M}_{1}\quad \underbrace{F}_{2}\quad \underbrace{MMM}_{3}\quad \underbrace{FF}_{4}\quad \underbrace{MMMM}_{5}\quad \underbrace{F}_{6}\quad \underbrace{M}_{7}\quad \underbrace{FF}_{8}$$

இங்கு $n_1$ = ஆண்களின் எண்ணிக்கை = 9.

$n_2$ = பெண்களின் எண்ணிக்கை = 6.

$n = n_1 + n_2 = 9 + 6 = 15.$

ஆண்களுக்கான ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை = 4

பெண்களுக்கான ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை = 4

ஆக மொத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை $r = 4 + 4 = 8.$

சீகலின் அட்டவணையிலிருந்து $n_1 = 9$, $n_2 = 6$ $\alpha = 0{\cdot}05$க்கான $r$-ன் தீர்வு கட்ட மதிப்பு = 4 என்பதால், கண்டறிந்த மதிப்பு தீர்வு கட்ட மதிப்பைவிட அதிகமானதால், சூன்ய எடுகோளை நாம் ஏற்றுக் கொள்கின்றோம். அதாவது, வரிசையில் ஆண், பெண் பால்களின் வரிசையானது ஒரு ராண்டம் வரிசை என்று முடிவு கட்டுகிறோம்.

## 9.8 ஒரு கூட்டுறுப்பைச் சாராத அளவையும் கூட்டுறவுக்கான சோதனையும் (A non-parametric Measure and Test of Association)

ஸ்ஃபியர்மேனின் அணிவரிசை உடன் தொடர்புக்கெழு வானது, அணிவரிசைகளைப் பொறுத்த ஒரு கூட்டுறவின் அளவையாகும். $X$, $Y$ என்ற இருமாறிகள் தனித்தவையா எனச் சோதிக்க அது உதவுகிறது. $X$, $Y$-ன் பரவல்களைப்பற்றி நாம் எந்த அனுமானமும் கொள்ளவில்லை. பியர்சனின் பெருக்குத் திருப்புத்திறன் (product moment) உடன் தொடர்புக்கெழுவைப் போல இதுவும் $(-1, +1)$ இடைவெளியில் உள்ள மதிப்பாகும். அணிவரிசைகளின் இரண்டு தொடர்களுக்கிடையேயுள்ள பூரண உடன்பாட்டை $+1$ என்ற மதிப்பும், இவற்றுக்கிடையேயுள்ள பூரண உடன்பாடின்மையை $-1$ என்ற மதிப்பும் குறிக்கிறது.

ஸ்ஃபியர்மன் உடன் தொடர்புக்கெழு

$$P = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $d_i = X$, $Y$ இரண்டு மதிப்புகளின் அணிவரிசைகளுக்கான வேறுபாடு.

இது எவ்வாறு கிடைக்கிறது என்பதைக் கீழே விளக்குவோம்.

$X$ மாறி $1, 2, 3, \ldots n$ மதிப்புகளையும், $Y$ மாறி இதே மதிப்புகளை வெவ்வேறு மாறுபட்ட இடங்களில் கொண்டிருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $\bar{X} = \dfrac{n(n+1)}{n \cdot 2} = \bar{Y}$.

அதாவது, $\bar{X} = \bar{Y} = \dfrac{n+1}{2}$.

$$X\text{-ன் மாறுபாடு} = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \Sigma X^2 - \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

ஏனெனில், $\Sigma X^2$ = முதல் $n$-இயற்கை எண்களின் இருபடிக் கூடுதல்

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ஆகும்.}$$

இதேபோல $Y$-ன் மாறுபாடு $= \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \Sigma Y^2 - \bar{Y}^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{5} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n^2-1}{12} \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது, $X_i - Y_i = d_i$ என்றால்,

$$\frac{1}{n} \Sigma d_i^2 = \frac{1}{n} \Sigma [(X_i - \bar{x}) - (Y_i - \bar{Y})]^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \Sigma (Y_i - Y)^2 - 2 . \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \operatorname{cor}(X, Y)$$

$$\therefore \quad 2 \operatorname{cor}(X, Y) = 2 . \frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{n} \Sigma d_i^2$$

$$\operatorname{cor}(X, Y) = \frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{2n} \Sigma d_i^2 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $(X, Y)$ அணி வரிசையின் உடன் தொடர்புக் கெழு

$$\rho = \frac{\operatorname{cor}(X, Y)}{\sqrt{\sigma x^2 \, \sigma y^2}}$$

$$= \frac{\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{2n} \Sigma d_i^2}{\sqrt{\frac{n^2-1}{12} \cdot \frac{n^2-1}{12}}}$$

$$= \frac{\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{2n} \Sigma d_i^2}{\left(\frac{n^2-1}{12}\right)}$$

$$= 1 - \frac{12}{2n} \Sigma d_i^2 . \frac{1}{(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \cdot \Sigma d_i^2}{n (n^2 - 1)}$$

இங்கு $d_i$ $X_i - Y_i$ எல்லா $i$-க்கும் ஆகும்.

இப்போது, அணி வரிசையாக்கப்பட்ட மதிப்புகள், ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப் பட்டவை என்ற அனுமானத்தின்படி, $X$, $Y$ என்ற இருமாறிகளும் முழுமைத் தொகுதியில் எந்த விதத்திலும் ஒட்டுறவு கொண்ட தில்லை என்ற சூன்ய எடுகோளை நாம் சோதிக்கின்றோம். சூன்ய எடுகோள் உண்மையானல், ஒரு தரப்பட்ட $Y$ மதிப்புகளின் $X$ மதிப்புகளின் அணிவரிசைக்கு $X$ மதிப்புகளின் ($Y$ மதிப்புகளின்) எல்லா விதமான அணி வரிசைகளும் சரிசம வாய்ப்புடன் நிகழக் கூடியவையாகும். $n$ மதிப்புகளுக்கு $X$ மதிப்புகளின் $n!$ நிகழத் தக்க அணி வரிசைகள் (rankings) இருக்கக்கூடும். அவையாவும் சரிசம வாய்ப்புள்ளவையாதலால் $X$-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட அணி வரிசை நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $Y$ மதிப்புகளின் ஒரு தரப்பட்ட அணி வரிசைக்கு, $\frac{1}{n!}$ ஆக இருக்கும்.

$H_0$-ன் படி $\rho$-ன் எந்த ஒரு தரப்பட்ட மதிப்பு நிகழக்கூடிய நிகழ்தகவு, அந்த $\rho$ மதிப்பைத் தரவல்ல $X$ மதிப்புகளின் வரிசை மாற்றங்களின் (permutations) எண்ணிக்கைக்கு விகிதசமமாக (proportional) இருக்கும்; ஏனென்றால், $y$-மதிப்புகளின் ஒவ்வொரு அணி வரிசைக்கும் ஒரு $\rho$ மதிப்பு ஏற்றதாக உள்ளது.

$n = 2$ எனும்போது, $+1$, $-1$, என்ற இரண்டு $\rho$ மதிப்புகள் மட்டுமே சாத்தியமானவை. $H_0$-ன் கீழ், ஒவ்வொன்றும் ஏற் படக்கூடிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$ ஆகும்.

$n = 3$ என்றால், $\rho$-ன் நிகழத்தக்க மதிப்புகள், $-1$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $+1$ என்ற மதிப்புகளை, $H_0$-ன் கீழ், முறையே $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$, என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுத்துக்கொண்டதாய்க் காணப்படுகின்றன. இதே போன்ற முறையைப் பயன்படுத்தி $n = 4$ முதல் $n = 30$ வரையிலுமான $\rho$-ன் தீர்வு கட்ட மதிப்புகள் கண்டு பிடிக்கப்பட்டு சிட்னி சீகலின் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளன. கண்டறிந்த $\rho$-ன் மதிப்பு தீர்வுகட்ட (அட்டவணை) மதிப்பைவிடக் கூடியிருந்தாலும் அதற்குச் சமமாயிருந்தாலும், ஓர் ஒரு பக்கச்

சோதனைக்கு, தரப்பட்ட மிகைத்தன்மை மட்டத்தில், ρ-ன் மதிப்பு பொருளுடையதாகின்றது.

இந்த அட்டவணையை இரு பக்கச் சோதனைகளுக்கும் பயன் படுத்தலாம். இங்குச் சார்பற்ற தன்மை (independence) என்ற சூன்ய எடுகோள்; $|\rho| >$ அட்டவணை மதிப்பு எனும்போது எல்லாம் நிராகரிக்கப்படுகிறது. அதற்கான மிகைத் தன்மை மட்டமும் அட்டவணையில் தரப்பட்ட மதிப்பின் இரு மடங்கா கின்றது.

$n > 10$ என்றால், "கெண்டால்" (kendall) எனும் பேராசிரியர் புள்ளியல் அளவை $t = \dfrac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$ மாறியானது $(n-2)$ வரையற்ற பாகையைக் கொண்ட ஒரு ஸ்டூடன்ட்டின் $t$-மாறியாக உள்ளது எனக் காட்டியுள்ளார்.

எனவே. $n > 10$ மதிப்புகளுக்கு, ρ மதிப்பைக் கண்டபின் $t$-ன் மதிப்பைக் கண்டறிந்து, $(n-2)$ வரையற்ற பாகைக்கான அட்ட வணை $t$-ன் மதிப்பை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் பார்த்து இரண்டு $t$-களையும் ஒப்பிட்டுச் சுட்டுருப்பைச் சார்ந்த சோதனைக்கு உய்த்துணர்வது போல உய்த்துணர வேண்டும்.

உதாரணம் : ஒரு கையெழுத்துப் போட்டியில் 10 கை யெழுத்துகளை இரண்டு நீதிபதிகள் கீழ்க்கண்டவாறு அணி வரிசைப்படுத்துகின்றனர். அந்த இரண்டு நீதிபதிகளின் அணி வரிசைப்படுத்திய முறைகள் சார்பற்றவையா சார்புடையவையா என்பதை ஆராய்க.

| | கையெழுத்து | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
| நீதிபதி I | 3 | 8 | 5 | 4 | 7 | 10 | 1 | 2 | 6 | 9 |
| நீதிபதி II | 6 | 4 | 7 | 5 | 10 | 3 | 2 | 1 | 9 | 8 |
| $d$ = I-II மதிப்புகள் | −3 | 4 | −2 | −1 | −3 | 7 | −1 | 1 | −3 | 1 |

இங்கு வேறுபாடு $d=$ நீதிபதி I, நீதிபதி II இவர்களின் அணி வரிசைகளின் வேறுபாடு ஸ்பியர்மேன் அணிவரிசை உடன் தொடர்புக்கெழு $\rho$ என்றால்

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 100}{10\,(99)} = 0.394 \text{ ஆகிறது.}$$

சீகல் புத்தக அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $n = 10$, $\alpha = 0.05$-க்கு ஏற்ற $\rho$-ன் தீர்வுகட்ட மதிப்பு $= 0.564$ எனக் காண்கின்றோம். கண்டறிந்த $\rho$-ன் மதிப்பு, அட்டவணை $\rho$-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாக உள்ளதால் 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சார்பற்ற தன்மை என்ற எடுகோளை நாம் நிராகரிக்க வில்லை. அதாவது, இரு நீதிபதிகளும் சார்பற்ற முறையில் கையெழுத்துகளை அணிவரிசைப்படுத்தியுள்ளனர் என முடிவு கட்டுகிறோம்.

## 9.9 கொண்டால் அணிவரிசை உடன் தொடர்புக்கெழுச் சோதனை (Kendall's Rank Correlation Coefficient Test)

இங்கு முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்புக்கெழு = 0 என்பது நம் சூன்ய எடுகோளாகும்.

உதாரணமாக, $X$, $Y$ என்ற இரு நீதிபதிகள் 4 கட்டுரைகளைக் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் அணிவரிசைப் படுத்துவதாகக் கொள்வோம்.

| கட்டுரை | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| நீதிபதி X | 3 | 4 | 2 | 1 |
| நீதிபதி Y | 3 | 1 | 4 | 2 |

$X$-ன் அணிவரிசைகள் இயல்பான முறை வரிசையில் (natural order) வருமாறு கட்டுரைகளின் வரிசைகளை மாற்றியமைத்தால்,

| கட்டுரை | D | C | A | B |
|---|---|---|---|---|
| நீதிபதி X | 1 | 2 | 3 | 4 |
| நீதிபதி Y | 2 | 4 | 3 | 1 |

என்றாகும்.

இப்போது $X$, $Y$-களின் தீர்ப்புகளுக்கிடையேயான (judgements) ஒத்திசைவின் அளவினைத் (degree of correspondence) தீர்மானிக்கிறோம்.

$X$-ன் அணிவரிசை ஓர் இயல்பான வரிசையில், அதாவது 1, 2, 3 .. என்ற வரிசையில் இருப்பதால், $Y$-ன் தொகுப்பில் அணிவரிசைகளில் எத்தனை ஜோடிகள் (ஜதைகள்) ஒன்றுக்கொன்று ஓர் இயல்பான வரிசையில் இருக்கின்றன என்று கண்டுபிடிப்போம்.

$y$-ன் முதல் ஜதை (2, 4) ஓர் இயல்பான ஜதை வரிசையாகும்.

எனவே, இதற்கு "+1" என்ற மதிப்பெண் கொடுப்போம்.

அடுத்து (2, 3) ஜதையும் இயல்பானது. இதன் மதிப்பெண் +1 ஆகும்.

(2, 1) ஜதை இயல்பான வரிசை அன்று. எனவே, இதன் மதிப்பு $-1$ ஆகும்.

இதேபோல (4, 3) என்ற ஜதைக்கு $-1$ மதிப்பும், (4, 1) ஜதைக்கு $-1$ மதிப்பும் கடைசியாக (3, 1) ஜதைக்கு $-1$ மதிப்பும் கடைசியாக (3, 1) ஜதைக்கு $-1$ மதிப்பும் கிடைக்கின்றன.

எனவே, நாம் கொடுத்த மதிப்புகளின்படி மொத்த மதிப்புகள் $= 1+1-1-1-1-1=-2$ ஆகிறது,

இப்போது நிகழத்தக்க மதிப்பு மொத்தங்களின் மீப்பெருமம் $=\binom{4}{2}$ ஆகும்.

ஏனெனில், 4 பொருள்களில் ஏதேனும் இரண்டிரண்டாக எடுத்துக்கொள்ளக்கூடிய எண்ணிக்கை $=\binom{4}{2}$ என்பதால்.

இப்போது

$$\tau = \frac{\text{சரியான மொத்த மதிப்பு எண்}}{\text{மீப்பெரு மொத்த மதிப்பெண்}} = \frac{-2}{\binom{4}{2}} = \frac{-2}{6}$$

$$= -0.33$$

$S$ என்பது சரியான மதிப்பெண் (actual score), $N$ என்பது $X$, $Y$ இருவரும் அணிவரிசைப்படுத்தக்கூடிய மொத்தப் பிரஜைகள்

(அல்லது மொத்தக் கட்டுரைகளின் எண்ணிக்கை இங்கு) என்றால் பேராசிரியர் கெண்டாலின் அணிவரிசை உடன் தொடர்புக்கெழு

$$\tau = \frac{S}{\binom{N}{2}}$$ ஆகும்.

$N < 10$ என்றால், சிட்னி சீகல் புத்தகத்தில் காணப்பட்ட தகுந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தித் தரப்பட்ட $H_0$-ன்படி, ஒரு கண்டறிந்த $S$ மதிப்பையொத்த ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டுபிடித்து ஒப்பிட்டு உய்த்துணரலாம்.

உதாரணமாக, $N = 8$ $S = 10$ என்றால்,

$S > 10$-க்கும் $N = 8$-க்கும் ஏற்ற $p$-ன் மதிப்பு $= 0.138$.
(அட்டவணை மூலம்)

$N > 10$ என்றால், தோராய-இயல்நிலைச் சோதனையைக் கீழ்க் கண்டவாறு பயன்படுத்தலாம்.

$$z = \frac{\tau - \mu_\tau}{\sigma_\tau}$$

இங்கு $\mu_\tau = 0$

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{2(2N+5)}{9N(N-1)}}$$ ஆகும்,

குறிப்பு: இங்கு $X, Y$ மதிப்புகளின் அணி வரிசைகளில் ஒத்தவை ஏற்பட்டால் $\tau$-ன் மதிப்பினை வேறுவிதமாகக் காண வேண்டும். $X$ மாறியில் ஒத்தவைத் தொகுதி ஒவ்வொன்றிலும் ஒத்த மதிப்புகளின் எண் $t$ என்றால் $T_x = \frac{1}{2} \Sigma\, t\,(t-1)$ ஆகும்.

இதேபோல $T_y = \frac{1}{2} \Sigma\, t\,(t-1)$; இங்கு $t$ என்பது $Y$ மாறியில் ஒத்தவைத் தொகுதி ஒவ்வொன்றிலும் ஒத்த மதிப்புகளின் எண் ஆகும்.

எனவே, ஒத்தவை இருந்தால் $\tau$-ன் மதிப்பு

$$\tau = \frac{S}{\sqrt{\frac{1}{2}\, N(N-1) - T_x}\;\; \sqrt{\frac{1}{2}\, N(N-1) - T_y}}$$ ஆகிறது.

உதாரணம்: கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து 12 மாணவர்களின் ஆட்சியாதிக்கக் கொள்கைக்கும் $(X)$ (authoritarianism) சமுதாய நிலை நாட்டப் போட்டிக்கும் $(Y)$ (Social

status strivings) இடையே ஏதோர் உடன் தொடர்பும் இல்லை என்ற எடுகோளைச் சோதிக்கக் கெண்டாலின் அணி வரிசை உடன் தொடர்புக்கெழுவைக் கண்டுபிடித்து அதனை உபயோகிக்கவும்.

| மாணவர் | | (X) ஆட்சியாதிக்கக் கொள்கைக்கான கணிப்பெண்கள் | X அணி வரிசை | | (Y) சமுதாய நிலைநாட்டப் போட்டிக்கான கணிப்பெண்களும் | Y அணி வரிசை |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ... ... | 82 | 2 | ... ... | 42 | 3 |
| B | ... ... | 98 | 6 | ... ... | 46 | 4 |
| C | ... ... | 87 | 5 | ... ... | 39 | 2 |
| D | ... ... | 40 | 1 | ... ... | 37 | 1 |
| E | ... ... | 116 | 10 | ... ... | 65 | 8 |
| F | ... ... | 113 | 9 | ... ... | 88 | 11 |
| G | ... ... | 111 | 8 | ... ... | 86 | 10 |
| H | ... ... | 83 | 3 | ... ... | 56 | 6 |
| I | ... ... | 85 | 4 | ... ... | 62 | 7 |
| J | ... ... | 126 | 12 | ... ... | 92 | 12 |
| K | ... ... | 106 | 7 | ... ... | 54 | 5 |
| L | ... ... | 117 | 11 | ... ... | 81 | 9 |

சமுதாய நிலை நாட்டப் போட்டியின் அணி வரிசைகளை ஓர் இயல்பான முறைவரிசையில் எழுதி அதற்குத் தக்கவாறு ஆட்சியாதிக்கக் கொள்கைக்கான அணி வரிசைகளைத் திருத்தி அமைக்கலாம்.

| மாணவர்கள் | D | C | A | B | K | H | I | E | L | G | F | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| சமுதாய நிலை நாட்டப் போட்டி அணி வரிசை | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| ஆட்சியாதிக்கக் கொள்கை அணிவரிசை | 1 | 5 | 2 | 6 | 7 | 3 | 4 | 10 | 11 | 8 | 9 | 12 |

$$\text{இப்போது } S = (11-0)+(7-3)+(9-0)+(6-2) + (5-2)+(6-0)+(5-0)+(2-2)+(1-2) + (2-0)+(1-0)$$

$$= 44.$$

$$\tau = \frac{S}{\binom{N}{2}} = \frac{44}{\binom{12}{2}} = \frac{44\times1\times2}{12\times11} = \frac{2}{3} = 0.67.$$

$N = 12 > 10$ என்பதால், தோராய இயல்நிலைச் சோதனையை இங்குச் செய்கின்றோம்.

$$\mu_\tau = 0$$

$$\sigma\tau = \sqrt{\frac{2(2N+5)}{9N(N-1)}} = \sqrt{\frac{2\times29}{11\times108}}$$

$$z = \frac{\tau-0}{\sigma\tau} = 3{\cdot}030 > 2.58 \text{ என்பதால்,}$$

1% மிகைத் தன்மை மட்டத்திலேயே நாம் $H_0$ஐ நிராகரிக்கின்றோம் அதாவது, இந்த இரண்டு மாறிகளும், எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இந்த மாதிரி எடுக்கப்பட்டதோ, அந்த முழுமைத் தொகுதியில் ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன என்று முடிவு கட்டுகின்றோம்.

உதாரணம் : (ஒத்தனவான மதிப்புகள் இருப்பின்) சமுதாய நிலைநாட்டப் போட்டி (Social Status Striving) இணங்குதல் (Yielding) இவற்றுக்கான கீழே தரப்பட்ட மதிப்பெண்களுக்கு τ கண்டுபிடித்து முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்பு உண்டா என்று சோதித்து உணர்க.

(Y) (X)

இணங்குதலுக்கும் சமுதாய நிலைநாட்டப் போட்டிக்குமான மதிப்பெண்களும் அணிவரிசைகளும்.

| மாணவர் | Y | X | Y-ன் அணி வரிசை | X-ன் அணி வரிசை | மாணவர் | Y | X | Y-ன் அணி வரிசை | X-ன் வரிசை |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 42 | 1.5 | 3 | G | 5 | 86 | 7 | 10 |
| B | 0 | 46 | 1.5 | 4 | H | 6 | 56 | 8 | 6 |
| C | 1 | 39 | 3.5 | 2 | I | 7 | 62 | 9 | 7 |
| D | 1 | 37 | 3.5 | 1 | J | 8 | 92 | 10 5 | 12 |
| E | 3 | 65 | 5 | 8 | K | 8 | 54 | 10.5 | 5 |
| F | 4 | 88 | 6 | 11 | L | 12 | 81 | 12 | 9 |

சமுதாய நிலைநாட்டப் போட்டி (Social Status Striving S.S.S) (X,-க்கான அணி வரிசைகளை ஓர் இயல்பான முறையில் எழுதி மற்றதை அதற்குத் தக்கபடி மாற்றி எழுதியமைத்தால்,

| மாணவர் | D | C | A | B | K | H | I | E | L | G | F | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S S.S. சமுதாய... போட்டி | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| இணங்குதல் | 3·5 | 3·5 | 1·5 | 1·5 | 10·5 | 8 | 9 | 5 | 12 | 7 | 6 | 10·5 |

என்று ஆகின்றது.

இப்போது $S = (8-2)+(8-2)+(8-0)+(8-0)+(1-5)$
$+(3-3)+(2-3)+(4-0)+(0-3)$
$+(1-1)+(1-0)$
$= 25.$

எனவே, $$\tau = \frac{S}{\sqrt{(\frac{1}{2}N(N-1)-T_x)\quad(\frac{1}{2}N(N-1)-T_y)}}$$

இங்கு $T_x = 0$. ஏனெனில், X-ன் அணி வரிசைகளில் ஒத்தன ஏதும் இல்லை. Y மதிப்புகளில் 3 இடங்களில் ஒத்தவை காணப் படுகின்றன. ஒவ்வோர் இடத்தில் ஒத்தன இரண்டு தடவை வருகின்றன.

$$\therefore \quad T_y = \tfrac{1}{2} \Sigma\, t(t-1)$$
$$= \tfrac{1}{2}[2(2-1)+2(2-1)+2(2-1)]$$
$$= 3.$$

$N = 12;\ T_y = 3,\ \ T_x = 0,\ \ S = 25$ என்பதால்,

$$\tau = \frac{25}{\sqrt{[\frac{1}{2}(12)(12-1)-0]\,[\frac{1}{2}(12)(12-1)-3]}}$$
$$= 0{\cdot}39.$$

[ஒத்தவைக்குச் சரி செய்யாமல் அப்படியே $\tau$ கண்டு பிடித்தால் $\tau = 0{\cdot}38$ என்று வருகிறது. எனவே ஓத்தவை இருப்பதால் சிறிய அளவு விளைவே ஏற்படுகிறது].

$N > 10$ என்பதால், தோராய இயல்நிலைச் சோதனையை இங்குச் செய்கின்றோம்.

$H_0$ : முழுமைத் தொகுதியில் உடன்தொடர்பு இல்லை என்பதாம்.

$$z = \frac{\tau - 0}{\sigma_\tau} = \frac{0{\cdot}39}{\sqrt{\dfrac{2(29)}{108 \times 11}}} = \frac{0{\cdot}39}{0{\cdot}22}$$
$$= 1{\cdot}773 < 1{\cdot}96.$$

என்பதால், 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சூன்ய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கின்றோம். ஆதலால், இரண்டு மாறிகளும் முழுமைத் தொகுதியில் எந்தவிதத்திலும் எட்டுறவுடன் இருக்கவில்லை என்று தீர்மானிக்கிறோம். அதாவது, முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்பே கிடையாது என முடிவு கட்டுகிறோம்.

## 9·10 கிரஸ்கல்-வால்லிஸ் சோதனை ($k$-மாதிரிகளுக்கு) (Kruscal-Wallis test)

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுச்சோதனை : இச் சோதனையானது $k$ மாதிரிகளின் அணி வரிசைகளுக்கான ஒரு–வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுக்கான சோதனையாகும். $k = 3$ என்று உதாரணமாக நாம் எடுத்துக் கொள்வோம். முதல் மாதிரியின் அளவு $= n_1$, இரண்டாம் மாதிரியின் அளவு $= n_2$, மூன்றும் மாதிரியின் அளவு $= n_3$ என்றால், இந்த மூன்று மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சூன்ய எடுகோள் $H_0$ஐச் சோதிக்க, இம்

மூன்று மாதிரிகளையும் ஒருசேரக் கலந்து அவற்றை ஓர் ஏறுமுக முறை வரிசையில் அமைத்துப் பிறகு அவற்றுக்கு அணி வரிசை எண்களைக் கொடுக்கலாம்.

இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட தொடரில்,

முதல் மாதிரி மதிப்புகளின் அணி வரிசைகளின் கூட்டல் $= R_1$ என்றும்

இரண்டாம் மாதிரி மதிப்புகளின் அணி வரிசைகளின் கூட்டல் $= R_2$ என்றும்

மூன்றும் மாதிரி மதிப்புகளின் அணி வரிசைகளின் கூட்டல் $= R_3$ என்றும் கொள்க.

இப்போது $\sum_{i=1}^{3} R_i = \frac{n(n+1)}{2}$ ஆகும். இங்கு $n = \Sigma n_i$

ஏனெனில், $\Sigma R_i = 1+2+3+ \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ என்று அறிகின்றோம். சோதனைக்கான மாதிரி அளவை (statistic)யானது.

($k$ மாதிரிகளுக்கு)

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{R_i^2}{n_i} - \frac{n(n+1)^2}{4}\right] \Big/ \frac{n(n+1)}{12}$$ என்ற மாறியானது $(k-1)$

வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட ஒரு $\chi^2$-மாறியாகும். தரப்பட்ட $k$-மாதிரி மதிப்புகளிலிருந்து $\chi^2$ ஐக் கண்டறிந்து பிறகு $\chi^2$ அட்டவணை மூலம் $(k-1)$ வரையற்ற பாகைகளுக்கான 5% மிகைத் தன்மை மட்ட $\chi^2$-ன் மதிப்புடன் ஒப்பிட்டு உய்த்துணருகின்றோம். இது ஒரு சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த சோதனையைப் போலச் செய்யப்பட வேண்டிய ஒன்றும். இச்சோதனையைக் கிரஸ்கல்-வால்லிஸ் சோதனை என்று நாம் அழைக்கின்றோம்.

உதாரணம்: மூன்று வகைப்பட்ட கல்வியாளர்களுக்கான ஆட்சியாதிக்க மதிப்பெண்களின் விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. கிரஸ்கல்-வாலிஸ் சோதனையைச் செய்து இம் மூன்று வகைகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினத்தைச் சேர்ந்தவையா என்று உய்த்துணர்க.

ஆட்சியாதிக்க மதிப்பெண்கள் (Authoritarianism Scores)

| கற்பிக்கும் முறை பயின்ற ஆசிரியர்கள் (Teaching-oriented Teachers) | ஆட்சிமுறை பயின்ற ஆசிரியர்கள் (Administration-oriented Teachers) | செயலாட்சி யாளர்கள் (Administrators) |
|---|---|---|
| 96 | 82 | 115 |
| 128 | 124 | 149 |
| 83 | 132 | 166 |
| 61 | 135 | 147 |
| 101 | 109 | |

இங்கு $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$ என்ற அளவுகள் கொண்ட 3 மாதிரிகளைக் காண்கின்றோம்.

$n = \sum n_i = 14$ ஆகிறது.

$H_0$ : இம் மூன்று மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியி லிருந்தும் எடுக்கப்பட்டவை எனக் கொள்கின்றோம்.

மூன்று மாதிரிகளின் மதிப்புகளையும் ஒன்றுசேர்த்து ஏறுமுக வரிசையில் எழுதி அணிவரிசைகளை எழுதினால்,

| I மாதிரி | | II மாதிரி | | III மாதிரி | |
|---|---|---|---|---|---|
| மதிப்புகள் | அணிவரிசை | மதிப்பு | அணிவரிசை | மதிப்பு | அணிவரிசை |
| 96 | 4 | 82 | 2 | 115 | 7 |
| 128 | 9 | 124 | 8 | 149 | 13 |
| 83 | 3 | 132 | 10 | 166 | 14 |
| 61 | 1 | 135 | 11 | 147 | 12 |
| 101 | 5 | 109 | 6 | | |

$R_1 = 22 \qquad R_2 = 37 \qquad R_3 = 46$

$R_1 = 4 + 9 + 3 + 1 + 5 = 22$. இதேபோல $R_2$, $R_3$ காணப் பெறுகின்றன.

இப்போது $\chi^2 = \sum \left[ \frac{R_j^2}{n_j} - \frac{n(n+1)^2}{12} \right] \Big/ \frac{n(n+1)}{12}$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$\chi^2 = \left[ \frac{22^2}{5} + \frac{37^2}{5} + \frac{46^2}{4} - \frac{14(15\times15)}{4} \right] \Big/ \frac{14\cdot15}{12}.$$

$$= \left[ \frac{484+1369}{5} - \frac{2116}{4} - \frac{1575}{2} \right] \Big/ \left( \frac{35}{2} \right)$$

$$= (370\cdot6 + 529 - 787\cdot5)\,\frac{2}{35}$$

$$= \frac{224\cdot2}{35}$$

$= 6\cdot4$ ஆகும்.

$\chi^2$-ன் அட்டவணை மதிப்பு = 2 வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு 5% மிகைத் தன்மைக் கான $\chi^2$-ன் (அட்டவணை) மதிப்பு

= 5·99.

$\chi^2_{(கண்ட)}$ $\chi^2_{(அட்டவணை)}$ மதிப்பு என்பதால், 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் $H_0$ சூனிய எடுகோளை நிராகரிக்கின்றோம்.

எனவே, கல்வியாளர்களின் (ஆசிரியர்களின்) 3 வகைகளும் 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் ஆட்சியாதிக்கக் கொள்கையில் பொருளுடைய வகையில் வேறுபடுகிறது என்று உய்த்துணருகின்றோம்.

**9·11 $X^2$ பொருத்தச் செம்மைச் சோதனை ($\chi^2$-test of Goodness of Fit) :**

உதாரணம் : கீழே தரப்பட்ட விவரங்கள், ஒரு தொழிற்சாலையில் 4 இனங்களைச் சேர்ந்த தொழிலாளிகளின் அலைவெண்களைக் குறிக்கிறது.

| இனங்கள் | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| அலைவெண்கள் | 102 | 17 | 36 | 5 |

இந்த 4 இனங்களில் கண்டறிந்த அலைவெண்கள் அந்த இடம், சுற்றுப்புற சூழ்நிலைகளில் 9 : 3 : 3 : 1 என்ற எதிர்பார்த்த வீதங்களில் உள்ளனவா என்று சோதித்து ஆராய்க.

இந்த உதாரணத்தை கொண்டு $\chi^2$-சோதனையை நாம் இங்கு விளக்க முற்படுகின்றோம்.

$H_0$ : சூன்ய எடுகோள் : "கண்டறிந்த அலைவெண்கள், 9 : 3 : 3 : 1 என்ற எதிர்பார்த்த வீதங்களில் உள்ளன" என்று கொள்கிறோம்.

மொத்த அலைவெண் $= N = 102 + 17 + 36 + 5 = 160$ என்றால்,

$$\text{எதிர்பார்த்த அலைவெண்கள் } E_1 = 160 \times \frac{9}{16} = 90$$

$$(E_i = Np_i. \text{ ஆகும்}) \; E_2 = 160 \times \frac{3}{16} = 30$$

$$E_3 = 160 \times \frac{3}{16} = 30$$

$$E_4 = 160 \times \frac{1}{16} = 10.$$

$$\text{மொத்தம்} = \Sigma E_i = N = 160.$$

கண்டறிந்த அலைவெண்கள் : $O_1 = 102$; $O_2 = 17$; $O_3 = 36$; $O_4 = 5$. இப்போது சூன்ய எடுகோளின்படி, $\chi^2$ஐ வரையறுத்தால்,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{O_i^2}{E_i} - N = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \frown \chi^2 \text{ வரையற்ற பாகை}$$

யும். $O_i$, $E_i$ மதிப்புகளைப் போட்டு $\chi^2$-ன் மதிப்பைக் கண்டால் $\chi^2 = 10.93$ ஆகிறது.

5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் 3 வரையற்ற பாகை கொண்ட $\chi^2$-ன் அட்டவணை மதிப்பு = 7.82.

$\chi^2_{(\text{கண்ட})} > \chi^2_{(\text{அட்ட})}$ என்பதால் $H_0$ஐ நிராகரிக்கிறோம்.

எனவே, அலைவெண்கள் 9 : 3 ; 3 : 1 என்ற வீதங்களில் இல்லை என்று முடிவுகட்டுகின்றோம். (5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில்).

## பயிற்சிகள்

(1) ஒரு சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த பிரச்சினைக்கும் சுட்டுறுப்பைச் சாராத பிரச்சினைக்கும் இடையேயான வேறுபாட்டினை விளக்கமாகக் குறிக்கவும்.

(2) சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறைகள், பரவலினின்றும் விடுபட்ட முறைகள் இவற்றிற்குள்ள வேறுபாடுகள் யாவை?

(3) ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் (மைய) இடத்துக்கான சுட்டுறுப்புக்கேற்ற குறிச் சோதனையை விளக்கி வரைக. ஜோடி சேர்க்கப்பட்ட (இணைக்கப்பட்ட) மாதிரிகளின் வகைக்கு இச் சோதனையை எவ்வாறு செய்வது என்று காட்டுக.

(4) இணைக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு (i) குறிச் சோதனை (ii) வில்காக்ஸன் குறியிடப்பட்ட — அணிவரிசைச் சோதனை இவ்விரண்டு·சோதனைகளில் எது மிகவும் சக்தி வாய்ந்தது? ஏன் என்பதையும் விளக்கவும்.

(5) இரு தனித்த மாதிரிகளுக்கு மான்—விட்னியின் U-சோதனையை எவ்விதம் செய்கிறோம் என்று குறிப்பிடுக. இச் சோதனைக்கான பெரிய—மாதிரித் தோராயத்தினை (large sample Approximation) விளக்குக.

(6) சுட்டுறுப்பைச் சாராத சோதனையின் விவாதத்தில் (discussion) அறிமுறைப்படி ஒத்தவை ஏதும் வரக்கூடாது என்று ஏன் கூறுகிறோம்? நடைமுறையில் ஒத்தவை ஏன் நிகழ்கின்றன? இவற்றை நாம் எவ்விதத்தில் சமாளிப்பது? என்பவற்றை விவரமாக விளக்கவும்.

(7) கிரஸ்கல்-வால்லிஸ் சோதனை என்பது என்ன? மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுக்கான சோதனையாக இதை நாம் ஏன் கொள்கின்றோம்?

(8) வால்ட்-வோல்ஃபோவிட்ஸ் ஓட்டச் சோதனையை விவரிக்க. ஒரு மாதிரியின் ராண்டம் தன்மையினைச் சோதிக்க ஓட்டங்களைப்பற்றிய அறிமுறை எவ்விதத்தில் பயன்படுகிறது?

(9) ஸ்பியர்மேனின் அணிவரிசை உடன் தொடர்புக் கெழுச் சோதனையை ஓர் ஒட்டுறவுச் சோதனையைப்போல (test of

association) எவ்வாறு உபயோகப்படுத்தலாம்? இச் சோதனையில் பெரிய மாதிரித் தோராயம் என்ன? அதாவது, இயல்நிலைத் தோராயச் சோதனையை எழுதிடுக.

(10) ஒருவித 'டிரக்' வகையின் ஓடும் கல்தொலையளவு களைத் (mileage) தீர்மானிக்க, 6 டிரக்குகளை எடுத்து ஓடவிட்டு, ஒரு காலன் கேஸோலினுக்கான (Gasoline) ஒவ்வொன்றின் கல் தொலையளவுகள் கீழே கண்டவாறு 21, 19, 22, 18, 20, 24 எனத் தரப்பட்டால் குறிச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி இவ் வகை டிரக்குகளுக்கான ஒரு காலன் கேஸோலினுடன் ஓடக் கூடிய சராசரி மைல்களின் எண்ணிக்கை = 20 என்ற சூன்ய எடுகோளை அது 20-க்கும் மேலே இருக்கும் என்ற மாறெதிர் எதிர்கோளுடன் சோதிக்கவும்.

(11) ஒரு மின் விளக்கு உற்பத்தியாளர் விளக்குகளின் சராசரித் திறத்தினை அதிகரிக்கக்கூடிய ஒரு புதிய உற்பத்திச் செயற் பாங்கினைக் கண்டுபிடித்திருப்பதாகக் கூறுகிறார். தற் போதைய சராசரித் திறம் 9 03 என்ற ஏதோ ஒரு தகுந்த அலகு மூலம் குறித்தால், இச் சராசரித் திறமானது புதிய செயற் பாங்கு மூலம் கூடுகிறது. புதிய செயற்பாங்குடன் 15 மின் விளக்கு களைச் சோதித்துக் கீழ்க்கண்ட விளைவுகளைக் காண்கிறோம். இம் மதிப்புகளைக் கொண்டு திறன்கூடி இருக்கிறதா என்று நம்புவ தற்கு ஏற்ற காரணங்கள் உண்டா என ஆராய்க.

| | | |
|---|---|---|
| 9.29 | 9.76 | 8.93 |
| 10.15 | 12 05 | 9.02 |
| 8.69 | 12.38 | 10 57 |
| 11.25 | 9.08 | 10.00 |
| 11.47 | 10.25 | 11.56 |

(12) ஒரு கல்லூரிச் சோதனையிலும், பின்னர் பொதுப் பரீட்சையிலும் ஒரு பாடத்தில் 20 மாணவர்களின் ஒரு தொகுதி வாங்கிய மதிப்பெண்களின் விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. (i) குறிச் சோதனையை (ii) வில்காக்ஸனின் குறியிடப்பட்ட அணிவரிசைச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி கல்லூரிச் சோதனைக் கப்புறம் பொதுப் பரீட்சையில் இந்த 20 மாணவர் தொகுதி, தனது சராசரி மதிப்பெண்களை அதிகப்படுத்தியுள்ளதா என் பதனை 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் ஆராய்க.

| வரிசை எண் | பெற்ற மதிப்பெண்கள் | | வரிசை எண் | பெற்ற மதிப்பெண்கள் | |
|---|---|---|---|---|---|
| | கல்லூரிச் சோதனை | பொதுப் பரீட்சை | | கல்லூரிச் சோதனை | பொதுப் பரீட்சை |
| 1 | 183 | 133 | 11 | 125 | 119 |
| 2 | 175 | 193 | 12 | 164 | 182 |
| 3 | 134 | 170 | 13 | 144 | 161 |
| 4 | 170 | 164 | 14 | 165 | 162 |
| 5 | 183 | 199 | 15 | 109 | 155 |
| 6 | 187 | 173 | 16 | 144 | 146 |
| 7 | 126 | 162 | 17 | 133 | 126 |
| 8 | 175 | 158 | 18 | 175 | 103 |
| 9 | 120 | 168 | 19 | 121 | 141 |
| 10 | 167 | 160 | 20 | 128 | 126 |

(13) ஒரு கம்பெனியானது, துணிகள் துவைக்கக்கூடிய ஒரு தானியங்கும் சலவை இயந்திரத்தை உண்டாக்கித் தற்சமயம் சந்தையில் உள்ள பிரபலமான சலவை இயந்திரத்தைவிடச் சிறந்த முறையில் அழுக்கை அகற்றுகிறது என்று தன்னை விளம்பரப்படுத்திக் கொள்கிறது. இதனை நிலைநாட்டும்பொருட்டு, ஒரு 14 சம அளவுடைய சம அழுக்குடைய துணிச் சுமைகளை எடுத்து ஒவ்வொரு சலவை இயந்திரத்தின் மூலமும் 7 சுமைகள் சுத்தம் செய்யப்பட்டு, அழுக்கு அகற்றப்பட்ட விவரம் ஒரு தகுந்த அலகில் தரப்பட்டால், அக்கம்பெனியின் வாதம் சரியானது என்று நம்புவதற்குக் காரணங்கள் உண்டா?

(இங்கு இடைநிலைச் சோதனை, மான்-விட்னி சோதனை இரண்டையும் பயன்படுத்துக.)

| அகற்றப்பட்ட அழுக்கு | |
|---|---|
| முன்பு பிரபலமான சலவை இயந்திரம் | புதிய இயந்திரம் |
| 13 | 10 |
| 10 | 11 |
| 9 | 12 |
| 12 | 13 |
| 11 | 9 |
| 10 | 14 |
| 8 | 12 |

(14) புதிதாகச் சேர்க்கப்பட்ட 12 மாணவர்களடங்கிய ஒரு வகுப்பில், சேர்க்கப்பட்ட மாணவர்களின் தந்தை உயிருடன் இருக்கிருரா $L$ (Living) இறந்து விட்டாரா $D$ (Dead) என்பதைச் சேர்க்கப்பட்ட ஒழுங்கு வரிசையில் எழுதினுல்

$L\ L\ D\ L\ L\ L\ D\ D\ L\ D\ L\ L$ என்று கிடைக்கிறது. மேலே காணப்படும் முறையானது, இரு வகையான மாணவர்களின் முறைகளின் ராண்டம் தன்மையைச் சந்தேகிக்க ஏதுவாகிறதா?

(15) இரு நீதிபதிகள் ஒரு கலைப்போட்டியில் போட்டியாளர்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு அணி வரிசைப்படுத்தியுள்ளனர்.

| | கலைப் போட்டியாளர் | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| நீதிபதி $A$ | 5 | 1 | 4 | 2 | 7 | 3 | 6 | 8 | 10 | 9 | 11 | 12 |
| நீதிபதி $B$ | 10 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 6 | 8 | 11 | 9 | 12 |

ஸ்பியர்மானின் அணி வரிசை உடன் தொடர்பாட்டினைப் பயன் படுத்தி இரு நீதிபதிகளின் தீர்ப்புகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக்காக சோதித்து உய்த்துணர்க.

(16) பத்து செயலாட்சியாளர்களின் தொழில் நுட்பத் திறமை ($X$), ஆட்சித்திறமை ($Y$)-க்கான கணிப் பெண்கள் கீழ்க் கண்டவாறு உள்ளன.

$(X, Y) =$ (20, 33), (23, 39), (24, 56), (14, 23),
(25, 31), (26, 50), (36, 17), (29, 70),
(40, 75), (45, 40)

என்றால், ஸ்ஃபியர்மேன், கெண்டால் இருவரது அணி வரிசை உடன் தொடர்புக்கெழுக்களைக் கண்டு பிடித்துத் தொழில் நுட்ப, ஆட்சித் திறமைகளுக்கிடையே எவ்வித உடன் தொடர்பும் இல்லை என்ற எடுகோளை ஆராய, அவற்றின் பொருளுடைய தன்மைக்குச் சோதித்து உணர்க.

(17) அதே வருடத்தில் வாங்கிய செவர்லட் $C$, போர்டு $F$, பிளைமௌத் $P$ என்ற மூன்று வெவ்வேறுகார்களுக்குமான ஒரு மைலுக்கான இயக்கச் செலவு (operating cost per mile) விவரமாக கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. வாங்கிய மறுவருடத்தில் அச் செலவுகள் விவரம் எடுக்கப்பட்டதாகும். முதல் இரண்டு வகைகளான கார்களுக்கு

(i) வால்ட்-வோல்ஃபோவிட்ஸ் ஓட்டச் சோதனை

(ii) மான்-விட்னி U-சோதனை

(iii) இடைநிலைச் சோதனை இவற்றைச் செய்து இரு வகையான கார்களுக்கிடையே எவ்வித பொருளுடைய வேறுபாடுகளும் இல்லை என்பதைச் சோதித்து ஆராய்க. (இயக்கச் செலவைப் பொறுத்த மட்டிலும்)

| I<br>செவர்லெட்<br>(C) | II<br>ஃபோர்டு<br>(F) | III<br>பிளைமவுத்<br>(P) |
|---|---|---|
| 3 93 | 4·70 | 2 43 |
| 3·45 | 4·15 | 2·93 |
| 2·00 | 4·55 | 3·04 |
| 2·28 | 3 31 | 4·94 |
| 3·49 | 2·13 | 3·15 |
| 4 25 | 4·69 | 2·46 |
| 2·37 | 2 68 | 3·34 |
| 3·02 | | 2·38 |
| | | 2·27 |

(18) மேலே கண்ட பயிற்சி எண் 17-ல், மூன்று வகைகளுக்குமிடையே இயக்கச் செலவுகளில் உண்மையான வேறுபாடுகள் காணப்படுகின்றனவா என்பதை

(i) கிரஸ்கல்-வாலிஸ் சோதனை மூலமும்

(ii) இடைநிலைச் சோதனை மூலமும் ஆராய்க.

# 10. தொடர் அடுக்குச் சோதனைகள்

## (Sequential Tests)

**10.1 எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கான தொடர் வரிசை முறையின் விளக்கம்** (Deseription of sequential method of testing hypothesis)

தொடர் அடுக்கு முறையிலும், நேமன்-பியர்சன் முறையிலும் எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கான முக்கியமான வேறுபாடு என்னவென்றால், தொடர் அடுக்கு முறையில் மாதிரி அளவானது; (முழுமை தொகுதியிலிருந்தும் பெறப்படும்) மதிப்புகளைச் சார்ந்து விளங்குமாறு அமைக்கப்படுகிறது.

கீழ்க் கண்டவாறு நமது முறை அமைகிறது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரே ஒரு தனி மதிப்பைப் பெறுகிறோம். பின்னர் கீழ்க்கண்ட மூன்று தீர்மானங்களில் ஏதேனும் ஒன்றைச் செய்வதற்கு ஒரு விதி முறை (rule) கொடுக்கப்படுகிறது. எடுகோள் $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளல்" "எடுகோள் $H_0$ நிராகரித்தல்" அல்லது "மேலும் பல மதிப்புகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்றுச் சோதனையைத் தொடர்ந்து மேற்கொள்ளல் ;' எனபனவே அம் மூன்று தீர்மானங்களாகும். முதல் இரண்டு முடிவுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை மேற்கொண்டால். இரண்டாவது மதிப்பை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறுகிறோம். இம் மதிப்பை நிலைக்களனாகக் கொண்டு முன்பு கோடிட்டுக் காட்டிய மூன்று தீர்மானங்களையும் மறுபடியும் கருத்தில் கொள்கிறோம். இப்போது மாதிரியின் அளவு '2' ஆகும். இப்போதும், மூன்றாவது தீர்மானத்தையே மேற்கொள்கிறோம் எனில். முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மேலும் ஒரு மதிப்பு பெறப்பட்டு மாதிரி அளவு 3 என்று கொண்டு மீண்டும் மூன்று தீர்மானங்களையும் கருத்தில் கொள்கிறோம். முதலாவது அல்லது இரண்டாவது தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படும் போதே, சோதனையின் செயற்பாங்கு முடிவுறுகிறது. இதன் மூலம் தொடர் அடுக்கு முறையானது மாதிரி அளவையினை (sample space) மூன்று பிரிவுகளாகப் பகுப்பதனால் விளக்கப்படுகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

$R_m{}^R$ = எடுகோள் நிராகரிக்கப்படும் பகுதி,

$R_m{}^A$ = எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் பகுதி,

$R_m{}^I$ = எவ்வித தீர்மானத்திற்கும் சாதகமற்ற பகுதி என $m = 1, 2, 3$ ...க்கு அமைகிறது. இவ்விடத்து, சோதனைத் திட்டவரை, தொடர் அகுக்கு முறையில் மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

$\{x_1\ x_2 \dots x_m';\ x_n'{}_{+1} \dots x_m\}$ என்ற வகையில் அமையும் மாதிரியானது நமது சோதனைத் திட்டவரையில் அமைய முடியாது. இவ்விடத்து $\{x_1\ x_2 \dots x_m'\}$ என்பது $R_m{}^A$ அல்லது $R_m{}^R$ யில் அமைகிறது. எனவே. ஒரு தொடர் அடுக்குச் சோதனையின் திட்ட வரையில், "பயனளியா மாதிரிகளை" (Ineffective sampling) உட்படுத்துவதில்லை.

## 10·2 இயங்கும் குணப்பண்புச் சார்பலன் (Operating characteristic function) :

சுட்டுறுப்பு θ-வின் மதிப்பு நிலையற்றதாய் விளங்கும்படியான முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் $f(x, \theta)$வைக் கருத்தில் கொள்க. ஒரு குறிப்பிட்ட திட்ட வரையானது வகுக்கப்பட்டு விட்டபடியால், அத்திட்டவரை, எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படும் என்ற தீர்மானத்துடன் முடிவு பெறுவதற்கான நிகழ்தகவானது, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்படும் தனி மதிப்புகளைக் கொண்டு அமைகிறது. எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் அடர்த்தி $f(x,\theta)$ வைக் கொண்டு அமைகிறது. இந் நிகழ்தகவானது θ-வின் சார்பலனாகையால் " இயங்கும் குணப்பண்புச் சார்பலன்" (Openating characteristic function) என்றழைக்கப்படும் $L(\theta)$ என்றும் குறிக்கப்படும். ஆனால் ஒரு திட்டவரை முடிவு பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 1 என்று இருக்கவேண்டும் என்று விரும்புகிறோம். எனவே, $1-L(\theta)$ என்பது, எடுகோள் நிராகரிக்கப்படும் என்ற தீர்மானத்துடன் திட்டவரை முடிவு பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு எனப் பெறப்படுகிறது.

எந்த ஒரு 'θ' மதிப்பிற்கும் " இயங்கும் குணப் பண்புச் சார்பலன்", ஒரு சரியான தீர்மானத்தை மேற்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு அமைகிறது. எனவே, θ-வின் மதிப்பு எடுகோளில் அடங்கியிருக்குமாயின், $H$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் என்ற சரியான தீர்மானத்திற்கான நிகழ்தகவு $L(\theta)$ என்றமைகிறது. $\theta \notin H$ எனில், $H$ நிராகரிக்கப்படும் என்ற சரியான தீமானத்திற்கான

நிகழ்தகவு $1-L(\theta)$ என்றுகிறது. எனவே, பெரும்பாலான கட்டங்களில் சரியான தீர்மானத்தை அளிக்கவல்ல, தொடரடுக்கு திட்டவரை மிகவும் உகந்ததாகும் ஆகையால். "இயங்கும் குணப் பண்புச் சார்பலன்" பல்வேறுன தொடரடுக்குத் திட்டவரைகளின் ஒப்பீட்டுக்கு அடித்தளமாக அமைகிறது. சோதனைத் திட்டவரை $S$ எனக் குறிக்கப்பட்டால் இயங்கும் குணப் பண்புச் சார்பலன் சோதனையுடன் சார்ந்து அமைகிறது என்பதைக் குறிக்கவேண்டி, $L(\theta/S)$ என்று எழுதுகிறோம்.

சராசரி மாதிரி அளவு சார்பலன் ASN சார்பலன் (Average Sample Number function) : ஓர் எடுகோள் சோதனைக்கு, தொடர் அடுக்குத் திட்டவரை $S$ பயன்படுத்தப்படுங்கால், மாதிரி அளவு $\eta$, எடுக்கப்பட்டவுடன் ஒரு தீர்மானத்தை அடைய ஏதுவாகிறது என்று கொள்க. இந்நிலையில், அதே முழுமைத் தொகுதிக்கு, சோதனைகளை மேற்கொண்டால் ஒரு தீர்மானத்தை அடைவதற்குத் தேவையான மாதிரி அளவு அதே $\eta$, என அமையவேண்டும் என்பது அவசியமில்லை. உண்மையில், மாதிரி அளவானது, தனி மதிப்புகளின் தன்மையைப் பொறுத்து அமைகிறது. எனவே, மாதிரி அளவானது, ஒரு ராண்டம் மாறியாக, அதன் பரவல் $f(x, \theta)$-வைச் சார்ந்து அமையும் விதத்தில் அமைகிறது. இந்த ராண்டம மாறியின் "முதல் திருப்பு திறன்" (First moment) நமது ஆய்வுக்கு உட்பட்டதாகும். இம் முதல் திருப்பு திறன், ஒரு குறிப்பிட்ட திட்டவரையைப் பின்பற்றுகையில், ஒரு தீர்மானத்தை அடையத் தேவைப்படும் சராசரி மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையாக அமைகிறது. இதனை $E_{\theta}(\eta/s)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். இம் மதிப்பே சராசரி மாதிரி அளவு சார்பலன் என்றழைக்கப்படுகிறது.

இரண்டு சோதனைகளில், எந்த ஒரு சோதனைக்குக் குறைந்த எண்ணிக்கையிலான மதிப்புகள் தேவைப்படுகின்றனவோ, அந்த சோதனையே விரும்பப்படும். எனவே, ஒரு சரியான தீர்மானத்தை மேற்கொள்ள வேண்டும் என்ற கோட்பாட்டைத் தொடரடுக்கு முறையின் திட்டவரை எவ்வாறு எய்துகிறது என்பதையும், சராசரி மாதிரி அளவு சார்பலன் (ASN சார்பலன்), திட்டவரையால் தேவைப்படும் மாதிரி மாதிரிகளின் எண்ணிக்கையின் வாயிலாக நாம் கொடுக்கவேண்டியுள்ள விலையையும், இயங்கும் குணப் பண்புச் சார்பலன் தெளிவுபடுத்துகிறது.

**10·3 சுட்டுறுப்பு வெளியின் பாகுபாடு** (Division of Parameter Space)

இயங்குர் குணப்பண்புச் சார்பலன், *A. S. N.* சார்பலன் இவற்றின் முக்கியத்துவத்தை மேலும் நன்முக அறிந்து கொள்ள, சுட்டுறுப்பு வெளியானது கீழ்க்கண்டவாறு பாகுபாடுபடுத்தப்படுவதை "வால்ட்" (Wald) விளக்கினுர்.

(i) $\theta \in \omega$ என்பது சூனிய எடுகோளைக் குறிக்கட்டும்.

(ii) $\theta \in \omega$ என்பது மாறெதிரான எடுகோளைக் குறிக்கட்டும்

(iii) ω மற்றும் $\overline{\omega}$ க்கான எல்லையை $\Lambda$ குறிக்கட்டும். எனவே, ஒரு புள்ளி ω-ல் அமைவதோடு மட்டுமன்றி, $\Lambda$-க்கும் வெகு அருகில் அமைந்தால், எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுவது மிகத் தீவிரமான தவருகக் கருதப்படமாட்டாது. இதே போன்று, ஒரு புள்ளி ω-ல் அமைவதோடு மட்டுமன்றி, $\Lambda$-க்கும் அருகில் அமையின், எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவது ஒரு பெரிய தவருகக் கருதப்படமாட்டாது. எனவே, எடுகோள் நிராகரிக்கப்பட்டாலும் சரி, ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டாலும் சரி, மேற்குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் ஏதேனும் ஒன்று சுட்டுறுப்பின் உண்மை மதிப்பாக விளங்கினுலும், அதனுல் புள்ளியியல் நிபுணர் பெரிதும் பாதிக்கப்படுவதில்லை. அவரது நிலை பாராமுகம் என்று குறிக்கப்படுவது போன்றே அமையும். எனவே, சுட்டுறுப்பு வெளி, மூன்று பரவுகளாகப் பிரிக்கப்படுவதற்குத் தகுந்த காரணத்தை ஏற்படுத்துகிறது.

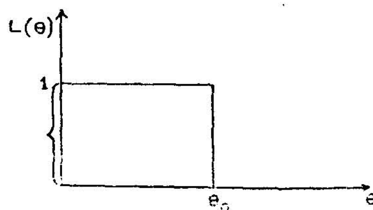
(1) $Z_A$ என்று குறிக்கப்படும், எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவதற்கு மிக மிகச் சாதகமான, அனுசரிப்பு விருப்புப் பகுதி". இப்பகுதியில் எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுவது பெறும் பிழையாகக் கருதப்படும். (இதை Acceptance Preference Region என்கிருேம்)

(2) $Z_R$ என்று குறிக்கப்படும், எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுவதற்கு மிக மிக வாய்ப்புள்ள பகுதி "நிராகரிப்பு விருப்புப் பகுதி" (Rejection Preference Region) ஆகும். இப்பகுதியில் புள்ளி அமையுங்கால், எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவது மிகப் பெரிய பிழையாகக் கருதப்படும்.

(3) எடுகோள் ஏற்றுகொள்ளப்படுவதோ அல்லது நிராகரிக்கப்படுவதோ இரண்டிற்குமோ உகந்ததாக அமையாத பகுதி $Z_I$

**10·4 தொடர் அடுக்கு திட்ட வரைகளின் ஒப்பீடு :** ஒரு கொடுக்கப்பட்ட எடுகோட்டுக் கேற்ப, சுட்டுறுப்பு வெளியானது $Z_A$ , $Z_R$ , $Z_I$ என்ற மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என்று ஊகம் செய்து கொள்க. $\theta \in Z_A$ என்று அமையும் போதெல்லாம், எந்த ஒரு சோதனையானது எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறதோ, $\theta \in Z_R$ என்று அமையும் எடுகோளை நிராகரிக்கிறதோ, அச்சோதனைக்கு பொருத்தமான முன் மாதிரியான சோதனையாகும். இயங்கும் குணப்பண்பின் சார்பலன் இத்தகைய பொருத்மான முன் மாதிரியான சோதனைக்கு ஏற்ற சமன்பாடுகள்

$$L(\theta) = 1. \quad \theta \in Z_A \text{ -எனில்,}$$
$$= 0, \quad \theta \in Z_R \text{ -எனில் என்றமையும்.}$$




படம் 23

ஒரு முன் மாதிரிமான இயங்கும் குணப்பண்புச் சார்பலனின் உதாரணம் : முழுமைபெருத விவரத்தையே அளிக்கும் மாதிரியினைக் கொண்டு முன் மாதிரியான இயங்கும் குணப் பண்புச் சார்பலன்களைப் பெற இயலாது. எனினும், போதுமான பெரிய மாதிரியினை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்று ஆய்கையில், இச் சார்பலனை ஓரளவு தோராயமாக அடைய ஏதுவாகிறது. மேலும், தேவைப்படும் மாதிரி மதிப்புகளின் சராசரி எண்ணிக்கை குறைவாகக் குறைவாகவும் முன்மாதிரியான சார்பலன், இயங்கும் குணப்பண்புச் சார்பலனுக்கு நெருக்கமாக நெருக்கமாகவும், தொடர் அடுக்குச் சோதனையினை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான வாய்ப்பும் அதிகரிக்கிறது. ஆயினும், தொடர் அடுக்குச் சோதனை உகந்ததாக அமைவதற்கெனக் குறிக்கப்படும் இரண்டு நிபந்தனைகளும் ஒன்றுக்கொன்று முரண்பட்டவை. ஏனெனில், முன்மாதிரிச் சார்பலன், இயங்கும் குணப்பண்புச் சார்பலனை ஒத்திருக்க வேண்டுமானுல், மாதிரி அளவு பெரிதாக அமைய வேண்டுவது அவசியமாகும். மாதிரி அளவு பெரிதாகப் பெரிதாக, முன்மாதிரியான சார்பலனும், இயங்கும் குணப்பண்புச் சார்பலனுக்கு நெருக்கமாக, நெருக்கமாக அமையும். எனவே,

வேண்டிய முடிவுகளைப் பெற, நம் முன்னுள்ள ஒரே வழி, இயங்கும் குணப் பண்புச் சார்பலன், A. S. N. சார்பலன் இவற்றின் ஏதேனும் ஒன்றன்மீது சில வேண்டப்படும் முன் தேவைகளை விதித்து, எல்லாத் திட்டவரைகளிலும், எத் திட்டவரையினால் இத்தகைய முன் தேவைகள் மிகச் சிறந்த முறையில் பூர்த்தி செய்யப்படுகின்றனவோ அச் சோதனையையே தேர்ந்தெடுத்த லாகும். எனவே, இயங்கும் குணப் பண்புச் சார்பின்மீது பொருத்தமான, தகுந்த முன் தேவைகளை விதிக்கிறோம்.

இயங்கும் குணப்பண்புச் சார்பின்மீது விதிக்கப்படும் முன் தேவைகள் :

(i) சுட்டுறுப்பு வெளியானது, தனித்தனியான $Z_A$, $Z_R$, $Z_I$ என்ற பகுதிகளாகப் பகுக்கப்படலாம்.

(ii) ஒவ்வொன்றும் 1ஐக் காட்டிலும் குறைவான இரண்டு தேரெண்கள் $\alpha$. $\beta$-வைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும்.

(iii) $Z_A : H_0 : \theta < \theta_0$

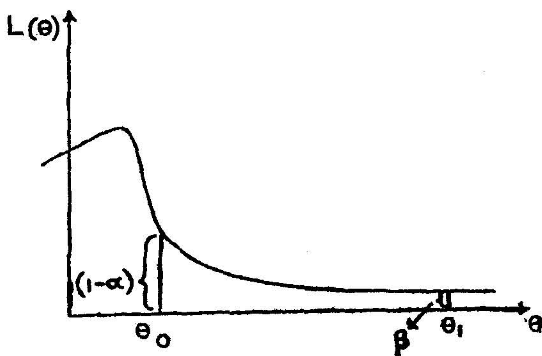
$Z_R : \theta > \theta_1 \ (> \theta_0)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

பின்னர் முன்தேவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கப்படு கின்றன.

(a) $1 - L(\theta) < \alpha$ அல்லது $L(\theta) > (1-\alpha)$,

$\theta \in Z_A$ அதாவது $\theta < \theta_1$

(b) $L(\theta) < \beta$, $\theta \in Z_R$, $\theta > \theta_1$




படம் 24.

இவ்விரண்டு சமமின்மைகளும் முதல் வகை மற்று இரண்டாம் வகைப் பிழைகளின் மதிப்பு $\alpha$, $\beta$-வைத் தாண்டுவதில்லை என்று

விளக்குகின்றன. மேற்கண்ட சமமின்மைகளைப் பூர்த்திசெய்யும் எந்த ஒரு திட்டவரையும், "அனுமதிக்கத்தக்க தொடர் அடுக்குத் திட்டவரை" (An admissible Sequential Procedure) என்று அழைக்கப்படும்.

ஓர் எடுத்துக்காட்டான (முன் மாதிரியான) இயங்கு குணப் பண்புச் சார்பலன் எல்லா அனுமதிக்கத்தக்க தொடர் அடுக்குத் திட்டவரைகளிலும் எந்த ஒரு திட்டவரை மிகக் குறைந்த சராசரி மதிப்புகளை வேண்டியுள்ளதோ அத் திட்டவரையே மிகவும் உகந்ததாகும். எனவே, அனுமதிக்கத்தக்க தொடர் அடுக்கு திட்டவரை $S^*$ என்பது, மிகப் பெரிதுமுகளிததாக அமைய வேண்டுமாயின், $E_\theta(n/S^*) < E_\theta(n/S)$ என்று எல்லா $\theta$ மதிப்புகளுக்கும் அனுமதிக்கத்தக்க $S$-க்கும் அமையவேண்டும். ஒரு மிகப் பெரிதுமுகந்த சோதனை அமைவதற்கான முறைமை எவ்வித முன்னேற்றத்தையும் பெருமல் பல ஆண்டுகளாகவே, முதலில் எவ்வாறு அமைந்ததோ அதேபோன்று விளங்கி வருகிறது, என்றாலும், வால்ட்டின் 'SPRT' எனப்படும் "தொடர் அடுக்கு நிகழ்தகவு விகிதச் சோதனை" (Sequential Probaisbty Ratio tests), ஓர் எளிய எடுகோள், ஓர் எளிய மாறெதிரான எடுகோளுக்கு எதிராகச் சோதிக்கப்படும்போது, மிகப் பெரிதும் உகந்த சோதனையை ஒட்டி, மிக நெருக்கமாக அமைகிறது.

## 10·5 SPRT-ன் வரைமுறை (Definition of SPRT) :

நமது கருத்திலுள்ள $x$ என்னும் ராண்டம் மாறியின் பரவலாக $f(x, \theta)$ அமையட்டும் $H_0$ என்பது $\theta = \theta_0$ எனவும், $H_1 : \theta = \theta_1$ எனவும் கொள்க. பின்னர் $x$-ன் பரவல் $f(x, \theta_0)$ என்று ($H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது) $f(x, \theta_1)$ என்று ($H_1$ உண்மையாயிருக்கும்போதும்) அளிக்கப்படுகிறது.

எந்த ஒரு நேரான முழு எண் மதிப்பு $m$-க்கும், $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_m)$ என்ற மாதிரி பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_{1m} = f(x_1;\ \theta_1)\ f(x_2;\ \theta_1) \ldots f(x_m;\ \theta_{\ })$$

($H_1$ உண்மையெனில்)

$$P_{0m} = f(x_1;\ \theta_0)\ f(x_2;\ \theta) \ldots f(x_m;\ \theta_0)$$

($H_0$ உண்மையெனில்)

என்று பெறப்படுகிறது.

$H_0$ஐ $H_1$-க்கு எதிராகச் சோதிப்பதற்கான SPRT கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது. $B < A$ என்றமையும் விதம்

$A$ மற்றும் $B$ என்ற இரண்டு நேரெண்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. சோதனையின் ஒவ்வொரு படியிலும், $\frac{P_{1m}}{P_{0m}}$ என்ற நிகழ்தகவு விகிதம் கணக்கிடப்படுகிறது. $B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} < A$ எனில், சோதனையானது மேலும் பல மதிப்புகளைப் பெறுவதன்மூலம் தொடரப்படுகிறது.

$A < \frac{P_{1m}}{P_{0m}}$ எனில், $H_0$ நிராகரிக்கப்பட்டு, சோதனை முடிவு பெறுகிறது.

$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} < B$ எனில், $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டு, சோதனை முடிவு பெறுகிறது.

குறிப்பு : $A, B$ மதிப்புகளை எவ்வாறு நிர்ணயிக்கின்றோம் என்பதை பக்கம் 455-ல் 10.6 பகுதியில் விளக்கிக் காட்டியுள்ளோம்."

இரண்டு மாறிலிகள் $A, B$ என்பன சோதனை $(\alpha, \beta)$ என்ற குறிக்கப்பட்டுள்ள வலிமை கொண்டவையாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட மாதிரிக்கு $\frac{P_{1m}}{P_{0m}}$ என்பது $\frac{0}{0}$ என்று அமையின், அவ் விகிதத்தை 1 எனக் கொள்கிறோம். ஏதேனும் ஒரு மாதிரிக்கு $P_{1m} > 0$ ஆனால், $P_{0m} = 0$ எனில், $\frac{P_{1m}}{P_{0m}} < A$ என்பது பூர்த்தி செய்யப்படுவதாகக் கொண்டு $H_0$ஐ நிராகரிக்கிறோம்.

கணக்கீடுகளைப் பொறுத்தமட்டில், மடக்கையைப் (logarithm) பயன்படுத்திச் சோதனையின் திட்டவரையைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைகிறோம்.

$$Z_i = \log \left[\frac{f(Xt;\ \theta_1)}{f(Xi;\ \theta_1)}\right]$$ என்று கொள்க,

$\log B < Z_1 + Z_2 + Z_3 \ldots Z_m < \log A$ என்ற முடிவானது, சோதனையைத் தொடர்ந்து மேற்கொள்ள வேண்டும் என்பதைக் காட்டுகிறது.

$Z_1+Z_2+ \dots Z_m > \log A$ (எடுகோள் நிராகரிப்பு)

$Z_1+Z_2+ \dots Z_m < \log B$, (எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப் படுதல்)

ஈறுருப்டப் பரவல் : (SPRT)

தொடர் அடுக்கு நிகழ்தகவு விகிதச் சோதனை, SPRT யானது

$$T = \frac{P_{1m}}{P^0_m} = \frac{\prod_1^m f(x_i, \theta_1)}{\prod_1^m f(x_i, \theta_0)}$$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = 1$, பொருள் குறைபாடானது எனில், நிகழ்தகவு $P = \theta$. பொருள் குறைபாடற்றது எனில், நிகழ்தகவு $(1-P)$

$x$–ன் அடர்த்திச் சார்பு $= P^x(1-P)^{1-x}$

SPRT ஒன்றுக்கான மூன்று பகுதிகள்

$T > A$ என்றால், $H_0$ நிராகரிக்கப்படும். இங்கு $A > 1$

$T < B$ என்றால், $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.

இங்கு $O < B < 1$

$B < T < A$ என்றால், மேலும் ஒரு மாதிரியைப் பெற்றுச் சோதனையைத் தொடருக.

$A$ மற்றும் $B$ கீழ்க்கண்ட வாறு அமைகின்றன.

$$A = \frac{\text{ஒரு குறைபாடான குவியலை நிராகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு}}{\text{ஒரு குறைபாடற்ற குவியலை நிராகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு}}$$

$$= \frac{1-\beta}{\alpha}$$

$$B = \frac{\text{ஒரு குறைபாடான குவியலை ஏற்றுக்கொள்வதற்கான நிகழ் தகவு}}{\text{ஒரு குறைபாடற்ற குவியலை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு}}$$

$$= \frac{\beta}{(1-\alpha)} < 1$$

$$T = \frac{P_{1m}}{P_{0m}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} P_1^{x_i} (1-P_1)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{m} P_0^{x_i} (1-P_0)^{1-x_i}}$$

$$= \frac{P_1^d (1-P_1)^{m-d}}{P_0^d (1-P_0)^{m-d}}, \quad d = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\log T = d \log \left(\frac{P_1}{P^0}\right) + (m-d) \log \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)$$

$$= d \left[\log \left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_s}\right)\right] + m \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)$$

$\log T > \log A$ எனில், $H_0$ஐ நிராகரிக்கிறோம்.

அதாவது,

$$d \left[\log \left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)\right] + m \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right) > \log A$$

அதாவது, $d > h_2 + b_m = R_m$ என்று கொள்க.

இவ்விடத்து,

$$h_2 = \frac{\log A}{\left[\log \left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)\right]}$$

$$b = \frac{-\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)}{\left[\log \left(\frac{P_1}{P_s}\right) - \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)\right]}$$

$\log T < \log B$ எனில், $H_0$ஐ ஏற்றுக்கொள்ளவும்.

அதாவது,

$$d \left(\log \left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right) + m \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right) < \log B\right.$$

எனில், $d < h_1 + b_m = A_m$ என்று கொள்.

இவ்விடத்து,

$$h_1 = \frac{\log B}{\left[\log \frac{P_1}{P_0} - \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_2}\right)\right]}$$

$$b = \frac{-\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)}{\left[\log \frac{P_1}{P_2} - \log\frac{1-P_1}{1-P_0}\right]}$$

எனவே, அனுசரிப்புப் பகுதியானது, $A_m = h_1 + b_m$ என்பதற்குக் கீழாகவும் நிராகரிப்புப்பகுதி $R_m = h_2 + b_m$ என்பதற்கு மேலாகவும் அமைகிறது. இதற்கிடையில் எவ்விதத் தீர்மானத்திற்கும் ஏதுவாக இல்லாத பகுதி அமைகின்றது.

படத்தின் மூலம் இதனை விளக்க ஓர் உதாரணத்தைக் கீழே கண்டவாறு விவரிப்போம்.

உதாரணம் : $\alpha = 0{\cdot}08$
$\beta = 0{\cdot}03$
$p_0 = 0{\cdot}05$
$p_1 = 0{\cdot}10$ என்றால்,

நிராகரிப்பு எண், அனுசரிப்பு எண் இவற்றைக் கண்டுபிடித்து நிராகரிப்புப் பகுதியையும் அனுசரிப்புப் பகுதியையும் படத்தில் வரைந்து காட்டுக :

$$\log A = \log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$$

$$= \log\left(\frac{0{\cdot}97}{0{\cdot}08}\right)$$

$$= 1{\cdot}0837.$$

$$\log B = \log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$

$$= \log\left(\frac{0{\cdot}03}{0{\cdot}92}\right) = \log\left(\frac{3}{92}\right)$$

$$= -1{\cdot}4867.$$

$$\log \frac{p_1}{p_0} = \log \frac{0{\cdot}10}{0{\cdot}05}$$

$$= \log 2 = 0{\cdot}3010$$

$$\log \quad \frac{1-p_1}{1-p_0} = \log \left(\frac{0{\cdot}90}{0{\cdot}95}\right)$$

$$= -\,0{\cdot}0235.$$

இம்மதிப்புகளைக் கொண்டு $A_m = h_1 + b_m$

$R_m = h_2 + b_m$ இவற்றைக் காணலாம்.

எளிய விளக்கங்கள் உதாரணம் 1 : ராண்டம் மாறி $X$ஆனது 0 மற்றும் 1 என்ற இரண்டு மதிப்புகளையே பெற இயலும்.

$P_r[x=1] = P$ [தெரியாத மதிப்பு]

$X$-ன் பரவல் $f(X, P)$ என்ற பரவலால் அமைக்கப்படுகிறது. இப்பரவலின் மதிப்பு 0, 1 என்ற இரண்டு புள்ளிகளிலேயே வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது.

$f(1, P) = P$

$f(0, P) = (1-P)$

$H_0 : P = P_0$

$H_1 : P = P_1 \quad (P_1 \neq P_0)$

$$Z_i = \log \frac{f(X_i\ P_1)}{f(X_i\ P_0)} = \log \left(\frac{P_1}{P_0}\right), \ x_i = 1 \text{ எனில்}$$

$$= \log \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right), \quad x_i = 0 \text{ எனில்}$$

எனவே $Z_1 + Z_2 \ldots Z_m = m^* \log \frac{P_1}{P_0} + (m - m^*)$

$$\log \frac{1-P_1}{1-P_0} \quad \ldots \ (1)$$

$m^*$ என்பது முதல் '$m$' மதிப்புகளின் தொடர் வரிசையில்,

$$R_m = \frac{\log A - m.\ \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)}{\log \frac{P_1}{P_0} - \log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)}$$

$$= \frac{1.0837 + m(0.0285)}{0.3010+0.0285}$$

$$= 3.340 + 0.072\,m.$$

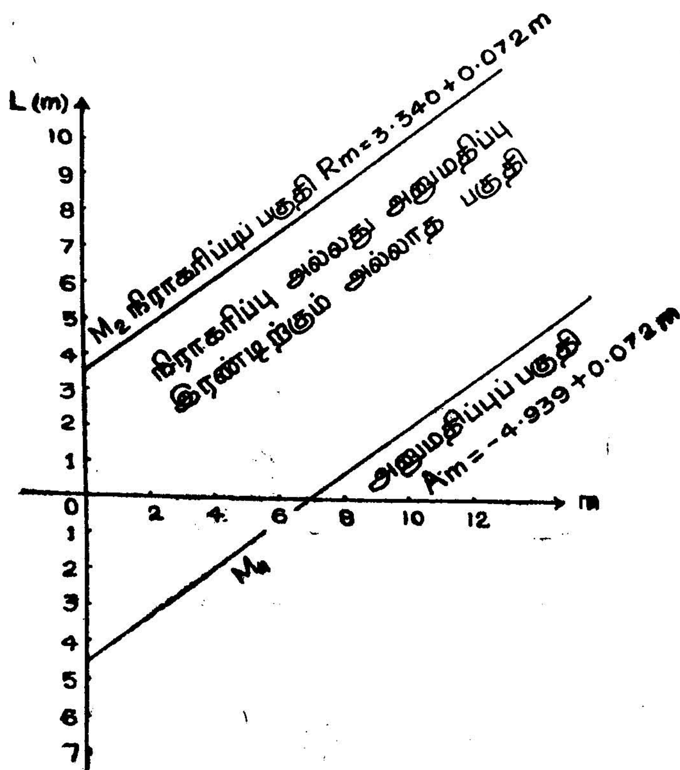
இதைபோல

$$A_m = \frac{\log B - m \log \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)}{\log \left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \log \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)}$$

$$= \frac{-1.4867 + m(0.0285)}{0.3010 + 0.0285}$$

$$= -4.939 + 0.072\,m$$

இப்போது $m_1, m_2$ என்ற இரண்டு இணை கோடுகளை வரைந்து $A_m$-க்குக் கீழே உள்ள பகுதியை அனுமதிப்புப் பகுதி எனவும், $R_m$-க்கு மேலே உள்ள பகுதியை நிராகரிப்புப் பகுதி எனவும் குறிக்கிறோம்.




படம் 25

உள்ள 1-களின் எண்ணுக்கையைக் குறிக்கிறது.

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = m^* \log \frac{P_1}{P_0} + (m - m^*) \log \frac{1-P_1}{1-P_0} < \log B$$

எனில், $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படும்.

$$\sum_{i=1}^{m} Z_i > \log A$$ எனில், $H_0$ நிராகரிக்கப்படும்

($H_1$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படும்.)

$\log B < \Sigma Z_i < \log A$ எனில், மேலும் ஒரு மதிப்பை பரவ லிருந்து பெற்றுச் சோதனையைத் தொடர்க. (1) என்ற சமன் பாட்டைத் தொடர்ச்சியானதாகப் பெறலாம். ஒரு மதிப்பானது 1 எனில், $\log\left(\frac{P_1}{P^0}\right)$ என்ற மாறிலியானது (1)-ன் முந்தைய மதிப் புடன் கூட்டப்பட்டுப் புதிய மதிப்புப் பெறப்படுகிறது. ஒரு மதிப் பானது '$\cup$' எனில், $\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)$ என்ற மாறிலியானது கூட்டப் படும் மதிப்பாகும்.

உதாரணம் 2: $x \rightarrow N(\theta, 1)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலில், சராசரி பற்றிய எடுகோள் சோதனைக்கான பிரச்சினையைக் கருத்தில் கொள்க.

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

$$f(x, \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_0)^2}$$

$$f(x, \theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_1)^2}$$

$$Z_i = \log\left[\frac{f(x_i\,\theta_1)}{f(x_i\,\theta_0)}\right] = \log\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta_0)^2}}\right]$$

$$\begin{aligned} Z_i &= -\tfrac{1}{2}(x_i-\theta_1)^2 + \tfrac{1}{2}(x_i-\theta_0)^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}[x_i^2 - 2\theta_1 x_i + \theta_1^2] + \tfrac{1}{2}[x_i^2 - 2\theta^0 x_i + \theta_0^2] \\ &= (\theta_1 - \theta_0)x_i + \tfrac{1}{2}(\theta_0^2 - \theta_1^2) \end{aligned}$$

$$\log\frac{P_{1m}}{P_{0m}} = \sum_{i=1}^{m} Z_i = (\theta_1 - \theta_0)\sum_{i}^{m} X_i + \frac{m}{2}(\theta_0^2 - \theta_1^2)$$

$(\theta_1-\theta_0)\Sigma X_i + \frac{n}{2}(\theta_0^2-\theta_1^2) > \log A$ எனில்,

$H_0$ நிராகரிக்கப்பட்டுச் சோதனை முடிவு பெறுகிறது.

$\log B < (\theta_1-\theta_0)\Sigma X_i + \frac{m}{2}(\theta_0^2-\theta_1^2) < \log A$ எனில், மேலும் ஒரு மதிப்பின் மூலம் சோதனை தொடரப்படுகிறது.

$\log\frac{P_{1m}}{P_{0m}}$ என்பது தொடர்ச்சியானதாகக் கணக்கிடப்படலாம். ஒவ்வொரு மதிப்பு $X_i$-க்கும் பின்னரும், $(\theta_1-\theta_0)x_i+\frac{1}{2}(\theta_0^2-\theta_1^2)$ என்ற மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, $\log\left(\frac{P_{1m}}{P_{0m}}\right)$-ன் முந்தைய மதிப்புடன், அம் மதிப்பைக் கூட்டுகிறோம்.

தேற்றம் : "தொடர் அடுக்கு நிகழ்தகவு விகிதச் சோதனை" $S.P.R.T.$ முடிவு பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு '1' ஆகும்.

நிரூபணம் : சோதனை முடிவுறவில்லையாயின்,

$\log B < Z_1+Z_2 \ldots Z_m < \log A.$

$Z_1, Z_2 \ldots$ என்ற தொடர்விலா அடுக்கு வரிசை, $r$ உறுப்புகள் கொண்ட குழுக்களாக, $(Z_1\ Z_2\ \ldots\ Z_r)\ Z_{r+1}\ Z_{r+2}\ \ldots\ Z_{2r})$ $(Z_{2r+1} \ldots Z_{3r}) \ldots (Z_{(k-1)r+1}, Z_{(k-1)r+2} \ldots Z_{kr}) \ldots$ என்று பிரிக்கப்படுகிறது.

$$S_k = Z_{(k-1)r+1} + Z_{(k-1)r+2} \ldots Z_{(k-1)r+r}$$

$= Z_{(k-1)r+1} \cdots Z_{kr}$ என்பது $k^{th}$ குழுவிலுள்ள $Z$-களின் கூடுதலாகும்.

$C = |\log A| + |\log B|$ என்று கொள்க.

சோதனைத் திட்டவரை முடிவடையவில்லையாயின், எல்லா $k$-களுக்கும்

$|S_k| < 2_c$ என்று நிறுவுவோம்.

$$Z_1+Z_2 \ldots Z_n<\log A< |\log A| < |\log A| \log B| = C$$

$$Z_1+Z_2 \ldots Z_n>\log B> -|\log B| > -|\log B| - \log A| = -c$$

$|Z_1+Z_2 \ldots Z_n| < c$, எல்லா '$n$' களுக்கும்

$$\begin{aligned} |S_k| &= |Z_{(k-1)r+1} + Z_{(k-1)r+2} \ldots Z_{kr}| \\ &= |[Z_1+Z_2 \ldots Z_{kr}] - [Z_1+Z_2 \quad Z_{(k-1)r}]| \\ &< |Z_1+Z_2 \ldots Z_{kr}| + |Z_1+Z^2 \ldots Z_{(k-1)^r}| \\ &< 2c \end{aligned}$$

$S_k^2 < 4c^2$ என்று, சோதனையின் திட்டவரை முடிவடையவில்லையாயின், எல்லா $k$-களுக்கும் அமைகிறது.

$P_l = P_r[S_l^2 < 4c^2]$ என்று கொள்க.

எந்த ஒரு $i$-க்கும், $S_i$ என்பது ஒரே மாதிரியாக அமைந்த $r$ மாறிகளின் பரவல்களின் கூடுதல் ஆதலின், $P_i$ என்பது $i$ஐச் சாராமல் அமைகிறது.

எனவே, $P_r[S_i < 4c^2] = P$ (எல்லா $i$-க்கும்)

$$P_r[S_i^2 < 4c^2,\ i=1,2 \ldots k] = P^k$$

$P[S_i^2 < 4c^2,\ i = 1, 2 \ldots k] = \underset{K \to \infty}{Lt}\ P^k$ என்றமைவதால்,

$P < 1$ என்று நிறுவினுல் போதுமானது.

பின்னர், $P_r[S_i^2 < 4c^2$, எல்லா $i$-க்கும் அதாவது $SPRT$ முடிவடைவதில்லை. $= 0$.

$P = 1$ என்று கொள்க.

அதாவது, $S_i^2 < 4c^2$ என்று நிகழ்தகவு '1' எனக் கொண்டு அமைகிறது. $\therefore\ E(S_i^2) < 4c^2$

$\int S^2 \chi . dx < 4_c^2 \quad \int \chi . dx = 4c^2$

மாறுபாடு $(S_i) < E(S_i^2) < 4c^2$

$Z$-ன் மாறுபாடு நிச்சயமாக அமைகிறது என்றுகொள்வோம்.

மாறுபாடு $(S_i) = r.$ மாறுபாடு $(z)$

($S_i^2 < 4c^2$ எனில், பின்னர் $P < 1$ என்பது தெளிவு)

எனவே, $r$-ன் மதிப்பைப் போதுமான அளவு பெரிதாகத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம், $E(S_i^2)$ மதிப்பைப் பெரிதாக்க முடியும். ஏனெனில், $Z_i$-ன் மாறுபாடு நேரெண்ணாக அமையும் என்றனுமானம் செய்து கொள்ளப்படுகிறது.

$E(S_i^2)$ என்பது $> 4c^2$ என அமையும் அல்லது, $r$ மாறுபாடு $(Z) > 4c^2$

$\therefore \; p \neq 1$ அல்லது $p < 1$

$p > 1$ ஆதலின், $SPRT$, முடிவு பெறுதது என்பதற்கான நிகழ்தகவு '0' ஆகிறது.

அதாவது, $P_r[S_i^2 < 4c^2] = 0$

எனவே, $SPRT$ முடிவு பெறுகிறது என்பதற்கான நிகழ்தகவு 1

எனவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

**10.6 மாறிலிகள் $A$ மற்றும் $B$ மதிப்புகளை நிர்ணயித்தல்**

$P_{in} = f(x_1; \theta_i)\, f(x_2; \theta_i \dots f(x_n; \theta_i)$ என்று கொள்க.

எடுகோள் : $\theta = \theta_0$, மாற்று எடுகோள் : $\theta = \theta_1$

$B < \frac{P_{1n}}{P_{0n}} < A$ எனில், சோதனை தொடரும்.

$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} > A$ எனில், எடுகோள் $\theta = \theta_0$ நிராகரிக்கப்படும்.

$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} < B$ எனில், எடுகோள் $\theta = \theta_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படும்.

$\alpha, \beta$ என்பன முறையே முதல் வகை மற்றும் இரண்டாம் வகை நிகழ்தகவுகளாக அமையட்டும்

$B < \frac{P_{1m}}{P_{om}} < A$ எனில், மாதிரி $(x, x_2 \dots x_n)$ என்பது வகை '0' என்று வரையறை செய்யப்படும்.

மற்றும் $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} > A$ ... (1)

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \int_I P_{0n}\, dx < \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{\infty} \int_I P_{1n}\, dx = \frac{1-\beta}{A}$$

$I$ = தொகையீட்டுப் பகுதி

அல்லது $A = 1 - \beta/\alpha = a(\alpha, \beta)$

$(x_1\; x_2 \dots x_n)$ என்ற மாதிரி (கூறு) வகை 1 என அமையவேண்டுமாயின்,

$$B < \frac{P_{1n}}{P_{0n}} < A, \; m = 1, 2 \ldots (n - 1)$$

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} < B$$

என்றமைதல் வேண்டும்.

$$B \sum_{n=1}^{\infty} = \int_{I'} P_{1n} \, dx < B \sum_{1}^{\infty} \int P_{0n} \, dx = B(1-\alpha)$$

$I'$-தொகையீட்டுப் பகுதி

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha} = b(\alpha \beta)$$

$$\frac{1}{b} \; \frac{1}{B} \quad\text{————————}\quad \frac{1}{A} \; \frac{1}{a}$$

$(A, B)$ என்ற இடத்தில் $(a, b)$-ஐக்கொண்டு சோதனை நடத்தப் படட்டும். முதல் மற்றும் இரண்டாம் வகைப் பிழைக்கான நிகழ் தகவுகளை $\alpha'$, $\beta'$ என்று குறிக்க. பின்னர்

$$a < \frac{1-\beta'}{\alpha}$$

$$b > \frac{\beta'}{1-\alpha'}$$

$$\frac{1-\beta}{\alpha} < \frac{1-\beta'}{\alpha'}$$

$$\frac{\beta'}{1-\alpha'} < \frac{\beta}{1-\alpha}$$

கூட்ட $\alpha'(1-\beta)+\beta'(1-\alpha) < \alpha(1-\beta')+\beta(1-\alpha')$

அல்லது $\alpha'+\beta' < \alpha+\beta$

இப்பொழுது $\dfrac{\alpha'}{1-\beta'} < \dfrac{\alpha}{1-\beta}$

அல்லது $\alpha' = \dfrac{\alpha(1-\beta')}{(1-\beta)}$

$(x_1, x_2 \ldots x_n)$ என்ற மாதிரி, வகை '0' என்று வரையறுக்கப் பட வேண்டுமாயின்,

$$B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} < A, \quad m = 1, 2 \ldots (n-1)$$

மற்றும் $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} < B$ என்றமைய வேண்டும்.

இதே போன்று $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ என்ற மாதிரி, வகை 1 என வரையறுக்கப்பட வேண்டுமாயின்,

$$B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} < A, m = 1, 2 \ldots (n-1)$$

மற்றும் $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} > A$

என்றிருக்க வேண்டும்.

எனவே, வகை '0' என்றமைந்த மாதிரியானது $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவதற்கு ஏதுவாய் அமைகிறது. வகை 1 என்றமைந்த மாதிரியானது. $H_1$ நிராகரிப்பதற்கு ஏதுவாய் அமைகிறது. $H_1$-ன் கீழ், எந்த ஒரு கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி வகை 1-க்கும், அத்தகைய ஒரு மாதிரியைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு, $H_0$-ன் கீழ் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைப் போன்று $A$ மடங்காக அமையும். எனவே, வகை 1 என்றமைந்த எல்லா மாதிரிகளின் மொத்தத்தின் நிகழ் தகவு அளவானது, $H_1$-ன் கீழ் $H_0$ஐப் போல் $A$ மடங்கு என அமைகிறது. வகை 1 என்றமைந்த எல்லா மாதிரிகளின் மொத்தத்தின் நிகழ்தகவு அளவானது, $H_0$ஐ நிராகரிப்பதின் மூலம் தொடர் அடுக்கின் திட்டவரை முடியும் என்பதற்கான நிகழ்தகவை ஒத்தாகும். $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்போது மேற் காணப்படும் இரண்டாவது நிகழ்தகவு $\alpha$ எனவும், $H_1$ உண்மையாயிருக்கும்போது $(1-\beta)$ எனவும் அமைகிறது.

எனவே, $(1-\beta) > A.\alpha$

$$A < \frac{1-\beta}{\alpha} \quad \ldots (1)$$

$\frac{1-\beta}{\alpha}$ என்பது $A$-ன் உச்சகட்டஎல்லையாகும் இதேபோன்றே $B$-க்கான கீழ்க்கட்ட எல்லையையும் பெறலாம். $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ எனப்படும் வகை '0' என்ற கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிக்கும், $H_1$-ன் கீழ், அத்தகைய மாதிரியைப் பெறுவதற்காக நிகழ்தகவு $H_0$-ன் கீழ் அத்தகையதொரு மாதிரியைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைப் போன்று $B$ மடங்காக அமைகிறது. எனவே, $H_0$ ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவதற்கான நிகழ்தகவானது, $H_0$ உண்மையாயிருக்கும்

போது, அமையும் நிகழ்தகவைக் காட்டிலும், $B$ மடங்கு $H_1$ உண்மையாயிருக்கும்போது அமைகிறது. $H_1$ உண்மையாயிருக்கும்போது, $H_0$, ஏற்றுக் கொள்ளப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு, $H_0$ உண்மையாயிருக்கும் போது $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைப் போன்று அதிககட்டம் $B$ மடங்காக விளங்குகிறது. $H_0$ உண்மையாயிருக்கும் போது, $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $(1-\alpha)$ $H_1$ உண்மையாயிருக்கும் போது, $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படுவதற்கான நிகழ் தகவு $\beta$.

$$\therefore \quad \beta < (1-\alpha)\, \beta$$

$$\beta > \frac{\beta}{1-\alpha} \qquad \ldots \quad (2)$$

$\frac{\beta}{1-\alpha}$ என்பது $\beta$-க்கான கீழ்க்கட்ட எல்லையாகும்.

(1), (2) இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{\alpha}{1-\beta} < \frac{1}{A} \qquad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{\beta}{(1-\alpha)} < \beta \qquad \ldots \quad (4)$$

மேற்கண்ட சமமின்மைகளிலிருந்து $\alpha < \frac{1}{A}$

$$\beta < B$$

என்பது தெளிவாகிறது. மேற்கண்ட சமமின்மைகள் செயல் முறைகளில் மிகப் பயனுள்ள வகையாகும் ஏனெனில், கொடுக்கப்பட்ட $A$, $B$ மதிப்புகளுக்கு $\alpha$ மற்றும் $\beta$-க்கான உயர் எல்லைகளை அளிக்கின்றன. எந்த ஓர் இணையான $(\alpha, \beta)$-வும், தளத்தில் உள்ள இடை அச்சுத்தூரம் '$\alpha$' நெடுக்கும் அச்சுத்தூரம் $\beta$ எனக் கொண்ட புள்ளிமூலம் குறிக்கப்படும்.

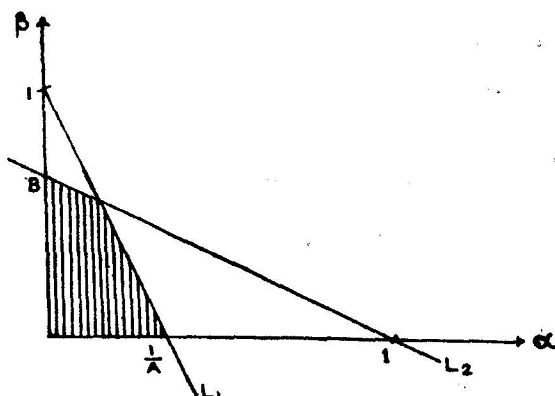
$L_1$ $L_2$ என்னும் நேர்கோடுகள்

$$\alpha A = (1 - \beta)$$
$$\beta = B(1 - \alpha)$$

என்ற சமன்பாடுகளை முறையே கொண்டுள்ளன. $L_1$ என்ற நேர்கோடு குடை அச்சை $\frac{1}{A}$ என்ற புள்ளியிலும், நெடுக்கு அச்சை '1' என்ற புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது. $L_2$ என்ற நேர்

கோடு இடை அச்சை 1-லும், நெடுக்கு அச்சை $\beta = \beta$ என்ற இடத்திலும் வெட்டுகிறது.

(3), (4) என்ற சமமின்மையைப் பூர்த்தி செய்யும் எல்லாப் புள்ளி ($\alpha, \beta$)-களும், $L_1$ $L_2$ என்ற நேர்கோடுகள் ஒன்றை யொன்று வெட்டிக்கொள்வதன்மூலம் உண்டாக்கும் நாற்கத்தின் எல்லையிலும், உள்ளேயும் அமைந்த பரப்பிலுள்ள புள்ளிகளாகும்.




படம் 26.

(3), (4) என்ற சமமின்மை, அடுத்தடுத்த $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ மதிப்புகள் தனித்தனியாக ஒன்றையொன்று சாராதவையென்ற ஊகத்திலேயே பெறப்பட்டவையாகும். $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ மதிப்புகள் தனித்தனியானவை அல்ல எனினும், மேற்காட்டப்பட்ட சமமின்மைகள் பொதுவாக உண்மையானவையே. ஆனால், அம் மாதிரி மதிப்புகள் தனித்தவை அல்ல எனின், அவற்றின் இணைந்த பரவலை, $f(x_1, \theta)\ f(x_2, \theta) \ldots\ldots f(x_n, \theta)$ என்று பெருக்கலாக அமைக்க முடியாது. இவ்விடத்து $H_0$ என்பது மாதிரி $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-ன் பரவல் $P_{0m}(x_1, \ldots x_n)$ என்றளிக்கப் படுகிறது; $H_1$ என்பது $P_{1m}(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ என அளிக்கப்படு கின்றது என்ற கூற்றுகளாக அமையும்.

தனித்த மாதிரி மதிப்புகளைப் போன்றே, $H_0$ஐ $H_1$-க்கு எதிராகச் சோதிப்பதற்கு SPRT சோதனையைப் பெற ஏது வாகிறது. அதாவது, $A$, $B$ என்ற இரண்டு மாறிலிகளைத் ($B < A$) தேர்ந்தெடுத்து, $B < \frac{P_{1m}(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)}{P_{0m}(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)} < A$ என்று

அடைகின்ற வரையில் மேன்மேலும் மதிப்புகளைத் தேர்ந் தெடுத்து சோதனை செய்கிறோம்.

$\frac{P_{1m}}{P_{m_0}} < B$ எனில், $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.

$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} > A$ எனில், $H_0$ நிராகரிக்கப்படும்.

மாதிரி மதிப்புகள் தனித்தவையாக இல்லாதபோது (3). (4) என்ற சமமின்மைகள் இத்தகைய சோதனை திட்ட வரைக்கு உண்மையானவையோ.

ஆனால், SPRT→1. என்பது தேவையான நிபந்தனையாகும். எனவே, பொதுவாக, மாதிரி மதிப்புகள் ஒன்றையொன்று சார்ந்து விளங்கிடினும், சோதனை செல்லுபடியாகிறது.

மாறிலிகள் $A$ மற்றும் $B$ களை நிர்ணயித்தல் : $x_1, x_2 \ldots x_m$ என்பன ஒரு மாதிரியின் "$m$" மதிப்புகள் என்று கொள்க.

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1$$

$$L_m = \frac{P_{1m}}{P_{0m}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} f(x_i, \theta_1)}{\prod_{i=1}^{m} f(x_i, \theta)}$$

$L_m > A \ (A > 1)$ எனில், $H_0$ஐ நிராகரிக்கவும்.

$\theta = \theta_1$ என்றிருக்கும் போது மாதிரியைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\theta = \theta_0$ என்றிருக்கும்போது பெறுவதற்கான நிகழ் தகவைவிட $A$ மடங்காகும். $\theta = \theta_1$ என்றிருக்கும்போது மாதிரி களின் மொத்தத்தைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\theta = \theta_0$ என்றி ருக்கும்போதான நிகழ்தகவைக் காட்டிலும் குறைந்தது $A$ மடங் காகும்.

$$(1-\beta) > A\,\alpha$$
$$A < (1-\beta) / \alpha$$

இதேபோன்று $\beta > \beta / 1 - \alpha$ எனில், $H_0$ ஐ ஏற்றுக் கொள் கிறோம்.

∴ $A$ மற்றும் $B$-க்கான தோராயமான சூத்திரங்கள்

$A \simeq (1-\beta)/\alpha$

$B = \beta \,/\, 1-\alpha$ என்பதாகும்.

உதாரணம் : $x \sim N(\theta, 1)$. $H_0{:}\theta=3$; $H_1{:}\theta=4$. $\alpha=0.03$, $\beta=0.03$ என்று கொண்டுளெடுகோளைச் சோதிக்கவும்.

தீர்வு : $f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$

$$A = (1-\beta)/\alpha = \frac{0.97}{0.03} = 12.1.$$

$$B = \beta/1-\alpha = \frac{0.03}{0.92} = 0.033$$

$$L_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\Sigma(\alpha_i-4)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-3)^2}}$$

$$\Sigma Z_i = \Sigma x_i - \frac{7}{2}\cdot m.$$

$\log \beta < \Sigma Z_i < \log A$ என்றிருப்பின், அல்லது

$$\frac{7}{2} m + \log 0.33 < \sum_{i=1}^{m} X_i < \frac{7}{2} m + \log 12.1.$$

எனில், மேலும் ஒரு மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம்.

## 10.7 சராசரி மாதிரி எண் (Average Sample Number) :

$f(x;\theta)$ என்ற அடர்த்தியைக் கொண்டு மாதிரி அளவு '$n$' நிர்ணயிருக்கப்படலாம்.

$E[z] \neq 0$ எனில்,

$$E_0[n] = \frac{L(\theta)\log B\,[1-L(\theta)]\log A}{E_\theta[Z]}$$

$E[Z] = 0$ எனில்,

$$E_\theta(n) = -\frac{\log A \cdot \log B}{E[Z^2]}.$$

உதாரணம் : $H_0 : \theta = \theta_0$ ; $H_1 : \theta = \theta_1$ என்ற எடுகோளை, மாறுபாடு $\sigma^2$ கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலுக்கு சோதிப்பதற்கான சராசரி கூறு அளவைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $$Z = \log \frac{f(x\,\theta_1)}{f(x\,\theta_0)} = -\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\theta_1)^2 - (x-\theta_0)^2]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(\theta_0-\theta_1)[\theta_0+\theta_1-2x]$$

$$E[Z] = -\frac{1}{2\sigma^2}(\theta_0-\theta_1)[\theta_0+\theta_1-2\theta]$$

$\therefore\ E(n)$

$$= \frac{2\sigma^2\left\{L(\theta)\log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) + [1-L(\theta)]\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\right\}}{(\theta_1-\theta_0)(\theta+\theta_1-2\theta)}$$

$E[Z] = 0$ ; $\theta = \dfrac{\theta_1+\theta_0}{2}$ எனில்,

$$Z^2 = \frac{1}{4\sigma^4}(\theta_0-\theta_1)^2(\theta_0+\theta_1-2x)^2.$$

$$= \frac{1}{4\sigma^4}(\theta_0-\theta_1)^2[(\theta_0+\theta_1)^2-4(\theta_0+\theta_1)-2x+4x^2]$$

$E[Z^2) = \dfrac{1}{\sigma^2}(\theta_0-\theta_1{}^2)$ (எனச் சுருக்கினால்)

$$E(n) \simeq \frac{-\sigma^2\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)}{(\theta_0-\theta_1)^2}$$

$$\theta_0=0;\ \ \theta_1=1;\ \ \sigma=1;\ \ \alpha=0.01;\ \ \beta=0.01$$

எனில்,

$$L(\theta) = (1-\alpha) = 0.99$$

$$\therefore\ E(n) = \frac{(0.99)\log\left(\frac{1}{0.99}\right)+0.01\log 99}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \simeq 9.$$

உதாரணம் : $H_0 : \theta = \theta_0$; $H_1 : \theta = \theta_1 (7\theta_0)$ எனற் எடுகோளை, சராசரி $\theta$ மாறுபாடு "1" எனக் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலில் சோதிக்கப்படுவதற்கு ,$n$-ன் மதிப்பு எவ்வாறு அமையவேண்டும் ?

தீர்வு : இச்சோதனைக்கான பகுதி, $\bar{x} > A$; $A$ மற்றும் $n$ஐத் தீர்மானிக்க :

$$\int_A^\infty \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-\theta_0)^2} \, d\bar{x} = \alpha.$$

$$\int_A^\infty \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-\theta_1)^2} \, d\bar{x} = 1-\beta \quad 0<\alpha;\ \beta<1.$$

$A = \theta_0 \frac{k_\alpha}{\sqrt{n}}$ என்று கொள்க. $k_\alpha$ ஆனது,

$P_r[y < k_\alpha] = \alpha$ என, [$N(0, 1)$ என்று அமைந்துள்ள $y$ மாறிக்கு] அமையும் வண்ணம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

இதே போன்று, $A = \theta_1 + \frac{k_\beta}{\sqrt{n}}$ ; இவ்விடத்து $k_\beta$ ஆனது, $P_r[y < k_\beta] = \beta$ என்றமையும் வண்ணம் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்.

$$\therefore \quad \theta_0 + \frac{k_\alpha}{\sqrt{n}} = \theta_1 + \frac{k_\beta}{\sqrt{n}}$$

$$n = (k_\alpha - k_\beta)^2 / (\theta_1 - \theta_0)^2$$

$$A = (k_\alpha \theta_1 - k_\beta \theta_0) / (k_\alpha - k_\beta)$$

$\theta_0 = 0$; $\theta_1 = 1$; $\alpha = 0.05$; $\beta = 0{\cdot}05$ என்று குறித்துக் கொண்டால்;

$$\sqrt{n} = 3.3$$

$n = 10.89 \simeq 11$ ($n$ என்பது ஒரு முழு எண்ணாக அமைய வேண்டும்)

$$E(n) = \left[\log \frac{0.95}{0.05};\ \log \frac{0.05}{0.95}\right]$$

## பயிற்சிகள்

1. $C = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1)$; $a = \frac{\sigma^2 \log X}{(\theta_1 - \theta_0)}$ ; $b = \frac{\sigma^2 \log B}{(\theta_1 - \theta_0)}$

எனில்; சோதனையின் திறச் சார்பலன்

$$p(\theta) = \frac{1 - e^{2(c-\theta)b/\sigma^2}}{e^{2(c-\theta)\cdot a/\sigma^2} - e^{2(c-\theta)b/\sigma^2}}.$$

எனவும், சராசரி மாதிரி அளவு

$E(n) = \frac{b + P(\theta)(b-a)}{(\theta - c)}$ எனவும் எழுதப்படலாம் என்று காட்டுக.

2. ஒரு பாய்சான் பரவலுக்கு, சராசரிக்கு அமைந்த அடுக்கு வரிசைச் சோதனையின், திறச்சார்பலன், சராசரி மாதிரி அளவு இவற்றிற்கான சூத்திரங்களைக் காண்க.

3. சுட்டுறுப்பு $\lambda t$ என்று கொண்ட பாய்சான் பரவலுக்கு எடுகோள் $\lambda t = 1$ என்பதை $\lambda t = 2$ சோதிக்க எண்ணுகிறோம். மாதிரியின் சராசரியைச் சோதனைக்கான அடிப்படையாகக் கொண்டு, $\alpha = 0.01 = \beta$ என்பதற்கேற்ற, நிராகரிப்புப் பகுதி, மாதிரி அளவு இவற்றைக் கணக்கிடுக.

4. ஒரு பாய்சான் பரவலுக்கு சுட்டுறுப்பு $\mu$-க்கான $\mu = \mu_0$ என்ற எடுகோளை, $\mu = \mu_1 (> \mu_0)$ என்பதற்கு எதிராகச்சோதிப்பதற்கான, அடுக்கு வரிசைச் சோதனையை அமைக்க.

# புள்ளியியல் அட்டவணைகள்

## 1. இயல்நிலை வளைகோட்டின் நிலைத்தூரங்கள்

(Ordinates of Normal Curve)

| X | ·00 | ·01 | ·02 | ·03 | ·04 | ·05 | ·06 | ·07 | 08 | 0·9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·0 | ·3989 | ·3989 | ·3989 | ·3988 | ·3986 | ·3984 | ·3982 | ·3980 | ·3977 | ·3973 |
| 0·1 | ·3970 | ·3965 | ·3961 | ·3856 | ·3951 | ·3945 | ·3939 | ·3932 | ·3925 | ·3918 |
| 0·2 | ·3910 | ·3902 | ·3694 | ·3835 | ·3876 | ·3867 | ·3857 | ·3847 | ·3836 | ·3825 |
| 0·3 | ·3814 | 3802 | ·3790 | ·3778 | ·3765 | ·3752 | ·3739 | ·3725 | ·3712 | ·3637 |
| 0·4 | ·3683 | ·3668 | ·3653 | ·3637 | ·3621 | ·3605 | ·3589 | ·3572 | ·3555 | ·3538 |
| 0·5 | ·3521 | 3503 | ·3485 | ·3467 | ·3448 | ·3429 | ·3410 | ·3391 | ·3372 | ·3352 |
| 0·6 | ·3332 | ·3312 | 3292 | ·3271 | ·3251 | ·3230 | ·3209 | ·3187 | ·3166 | ·3144 |
| 0·7 | ·3123 | ·3101 | ·3079 | ·3056 | ·3034 | ·3011 | ·2989 | ·2966 | ·2943 | ·2920 |
| 0·8 | ·2897 | ·2874 | ·2850 | ·2827 | ·2803 | ·2780 | ·2756 | ·2732 | ·2709 | ·2685 |
| 0 9 | ·2661 | 2637 | ·2613 | ·2589 | ·2565 | ·2541 | ·2516 | ·2492 | ·2468 | ·2444 |
| 1·0 | ·2420 | ·2396 | ·2371 | ·2347 | ·2323 | ·2299 | ·2275 | ·2251 | ·2227 | ·2203 |
| 1·1 | ·2179 | ·2155 | ·2131 | ·2107 | ·2083 | ·2059 | ·2036 | ·2012 | ·1989 | ·1965 |
| 1·2 | ·1942 | ·1919 | ·1895 | ·1872 | ·1849 | ·1826 | ·1804 | ·1781 | ·1758 | ·1736 |
| 1·3 | ·1714 | ·1691 | ·1669 | ·1647 | ·1626 | ·1604 | ·1582 | ·1561 | ·1539 | ·1518 |
| 1·4 | ·1497 | ·1476 | ·1456 | ·1435 | ·1415 | ·1394 | ·1374 | ·1354 | ·1334 | ·1315 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1·5 | ·1295 | ·1276 | ·1257 | ·1238 | ·1219 | ·1200 | ·1182 | ·1163 | ·1145 | ·1127 |
| 1·6 | ·1109 | ·1092 | ·1074 | ·1057 | ·1040 | ·1023 | ·1006 | ·0989 | ·0973 | ·0957 |
| 1·7 | ·0940 | ·0925 | ·0909 | 0893 | ·0878 | ·0863 | ·0848 | ·0833 | 0818 | ·0804 |
| 1·8 | ·0790 | ·0775 | ·0761 | ·0748 | ·0734 | ·0721 | ·0707 | ·0694 | ·0681 | ·0669 |
| 1·9 | ·0656 | ·0644 | 0632 | ·0620 | ·0620 | ·0596 | ·0584 | ·0573 | ·0562 | ·0551 |
| 2·0 | ·0540 | ·0529 | ·0519 | ·0508 | ·0498 | ·0488 | ·0478 | ·0468 | ·0459 | ·0449 |
| 2·1 | ·0440 | ·0431 | ·0422 | ·0413 | ·0404 | ·0396 | ·0387 | 0·379 | ·0371 | ·0363 |
| 2·2 | 0355 | 0347 | ·0339 | ·0332 | ·0325 | ·0317 | ·0310 | ·0303 | ·0297 | ·0290 |
| 2·3 | ·0283 | ·0277 | ·0270 | ·0264 | ·0258 | ·0252 | ·0216 | ·0241 | ·0235 | ·0229 |
| 2·4 | ·0224 | ·0219 | ·0213 | ·0208 | ·0203 | ·0198 | ·0194 | ·0189 | ·0184 | ·0180 |
| 2·5 | ·0175 | ·0171 | ·0167 | ·0163 | ·0158 | ·0154 | ·0151 | ·0147 | ·0143 | ·0139 |
| 2·6 | ·0136 | 0·132 | ·0129 | ·0126 | ·0122 | ·0119 | ·0116 | ·0113 | ·0110 | ·0107 |
| 2·7 | ·0104 | ·0101 | ·0099 | ·0096 | ·0093 | ·0091 | ·0088 | ·0086 | ·0084 | ·0081 |
| 2·8 | ·0079 | ·0077 | ·0075 | ·0073 | ·0071 | ·0069 | ·0067 | ·0065 | ·0063 | ·0061 |
| 2·9 | ·0060 | ·0058 | ·0056 | ·0055 | ·0053 | ·0051 | ·0050 | ·0048 | ·0047 | ·0046 |

தரப்படுத்தப்பட்ட $x$ மாறிக்கு $Z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ என்ற நிலைத்தூரங்கள் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. பேராசிரியர் (காலஞ்சென்ற) R. A. ஃபிஷர், பேராசிரியர் F. யேட்சு இவர்களின் 'Statistical Table For Biological Agricultural and Medical Research' Published by Oliver & Boyd, Edinburgh-லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியீட்டோர்களது அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

## 2. இயல்நிலை வளைகோட்டின் பரப்பளவு

(Aaea of the Normal Curve)

| X | 0 00 | 0.01 | 0·02 | 0 03 | 0·04 | 0·05 | 0·06 | 0 07 | 0·08 | 0·09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·0 | ·0000 | ·0040 | 0080 | ·0120 | ·0160 | ·0199 | ·0239 | ·0279 | ·0319 | ·0359 |
| ·1 | ·0398 | ·0438 | ·0478 | ·0517 | ·0557 | :0596 | ·0636 | ·0675 | ·0714 | ·0753 |
| ·2 | 0793 | ·0832 | ·0871 | ·0910 | ·0948 | ·0987 | ·1026 | ·1064 | ·1103 | ·1141 |
| ·3 | 1179 | ·1217 | ·1255 | ·1293 | ·1331 | ·1368 | ·1406 | ·1443 | ·1480 | ·1517 |
| ·4 | 1554 | ·1591 | ·1628 | ·1664 | ·1700 | ·1736 | ·1772 | ·1808 | ·1844 | ·1879 |
| ·5 | ·1915 | · 950 | ·1985 | ·2019 | ·2054 | ·2088 | ·2123 | ·2157 | ·2190 | ·2224 |
| ·6 | 2257 | ·2291 | ·2324 | ·2357 | ·2389 | ·2422 | ·2454 | ·2486 | ·2517 | ·2549 |
| ·7 | 2580 | 2611 | ·2642 | ·2673 | ·2703 | ·2734 | ·2764 | ·2794 | ·2823 | ·2852 |
| ·8 | ·2881 | 2910 | ·2939 | 2967 | ·2995 | ·3023 | ·3051 | ·3078 | 3106 | ·3133 |
| ·9 | 3159 | ·3186 | ·3212 | ·3238 | ·3264 | ·3289 | ·3315 | ·3340 | ·3365 | ·3389 |
| 1 0 | ·3413 | ·3438 | ·3461 | ·3485 | ·3508 | ·3531 | ·3554 | ·3577 | ·3599 | ·3621 |
| 1·1 | ·3643 | ·3665 | 3686 | 3708 | ·3729 | ·3749 | ·3770 | ·3790 | ·3810 | ·3830 |
| 1 2 | 3849 | ·3869 | ·3888 | 3907 | ·3925 | ·3944 | ·3962 | ·3980 | ·3997 | ·4015 |
| 1·3 | ·4032 | ·4049 | ·4066 | ·4082 | ·4099 | ·4115 | ·4131 | ·4147 | ·4162 | ·4177 |
| 1.4 | ·4192 | ·4207 | ·4222 | ·4236 | ·4251 | ·4265 | ·4279 | ·4292 | ·4306 | 4319 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1·5 | ·4332 | ·4345 | ·4357 | ·4370 | ·4382 | ·4394 | ·4406 | ·4418 | ·4429 | ·4441 |
| 1·6 | ·4452 | ·4463 | ·4474 | ·4484 | ·4495 | ·4505 | ·4515 | ·4525 | ·4535 | ·4545 |
| 1·7 | ·4554 | ·4564 | ·4573 | ·4582 | ·4591 | ·4599 | ·4608 | ·4616 | ·4625 | ·4633 |
| 1·8 | ·4641 | ·4649 | ·4656 | ·4664 | ·4671 | ·4678 | ·4686 | ·4693 | ·4699 | ·4706 |
| 1·9 | ·4713 | ·4719 | ·4726 | ·4732 | ·4738 | ·4744 | ·4750 | ·4756 | ·4761 | ·4767 |
| 2·0 | ·4772 | ·4778 | ·4783 | ·4788 | ·4793 | ·4798 | ·4803 | ·4808 | ·4812 | ·4817 |
| 2·1 | ·4721 | ·4826 | ·4830 | ·4834 | ·4838 | ·4842 | ·4846 | ·4850 | ·4854 | ·4857 |
| 2·2 | ·4861 | ·4864 | ·4868 | ·4871 | ·4875 | ·4878 | ·4881 | ·4884 | ·4887 | ·4790 |
| 2·3 | ·4893 | ·4896 | ·4898 | ·4901 | ·4904 | ·4906 | ·4909 | ·4911 | ·4913 | ·4916 |
| 2·4 | ·4918 | ·4920 | ·4922 | ·4925 | ·4927 | ·4929 | ·4931 | ·4932 | ·4934 | ·4936 |
| 2·5 | ·4938 | ·4940 | ·4941 | ·4943 | ·4945 | ·4946 | ·4948 | ·4949 | ·4951 | ·4952 |
| 2·6 | ·4953 | ·4955 | ·4956 | ·4957 | ·4959 | ·4960 | ·4961 | ·4962 | ·4963 | ·4964 |
| 2·7 | ·4965 | ·4966 | ·4967 | ·4968 | ·4969 | ·4970 | ·4971 | ·4872 | ·4973 | ·4974 |
| 2·8 | ·4874 | ·4975 | ·4976 | ·4977 | ·4977 | ·4978 | ·4979 | ·4879 | ·4980 | ·4981 |
| 2·9 | ·4981 | ·4982 | ·4982 | ·4983 | ·4984 | ·4984 | ·4988 | ·4985 | ·4986 | ·4986 |

பேராசிரியர் (காலஞ்சென்ற) R. A. ஃபிஷர், பேராசிரியர் யேட்சு, 'Statistical Tabies for Biological, Agricultural and Medical Research' Published by Oliver & Boyd, Edinburgh-லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியிட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டது.

## 3. Significant Values of $t$

| $\nu$ | Probability ($P_t$) $\alpha$ : 0·52, $\frac{\alpha}{2}$ : 0·25 | 0·10 / 0·005 | 0·05 / 0.025 | 0·02 / 0·01 | 0·01 / 0·005 | 0·001 / 0·0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1·00 | 6.31 | 12·71 | 31·82 | 63·66 | 636·62 |
| 2 | 0·82 | 2·92 | 4·30 | 6·97 | 9·93 | 31·60 |
| 3 | 0·77 | 2·35 | 3·18 | 4·54 | 5·84 | 12·94 |
| 4 | 0·74 | 2·13 | 2·78 | 3·75 | 4·60 | 8·61 |
| 5 | 0·73 | 2·02 | 2·57 | 3·37 | 4·03 | 6.86 |
| 6 | ·72 | 1·94 | 2·45 | 3·14 | 3·71 | 5·96 |
| 7 | ·71 | 1·90 | 2·37 | 3.00 | 3·50 | 5·41 |
| 8 | ·70 | 1·86 | 2·31 | 2·90 | 3·36 | 5·04 |
| 9 | ·70 | 1·83 | 2·26 | 2·82 | 3·25 | 4·78 |
| 10 | ·70 | 1·81 | 2·23 | 2·76 | 3·17 | 4.59 |
| 11 | ·70 | 1·80 | 2·20 | 2·72 | 3·11 | 4·44 |
| 12 | ·69 | 1·78 | 2·18 | 2·68 | 3·06 | 4.32 |
| 13 | ·69 | 1·77 | 2·16 | 2·65 | 3·01 | 4·22 |
| 14 | ·69 | 1·76 | 2·15 | 2·62 | 2.98 | 4·14 |
| 15 | ·69 | 1·75 | 2·13 | 2·60 | 2·95 | 4·07 |
| 16 | ·69 | 1·75 | 2·12 | 2·58 | 2·92 | 4·02 |
| 17 | ·69 | 1·74 | 2·11 | 2·57 | 2·90 | 3·97 |
| 18 | ·69 | 1·73 | 2·10 | 2·55 | 2·88 | 3·92 |
| 19 | ·69 | 1·73 | 2·09 | 2·54 | 2·86 | 3·88 |
| 20 | ·69 | 1·73 | 2·09 | 2·53 | 2·85 | 3·85 |
| 21 | ·69 | 1·72 | 2·08 | 2·52 | 2·83 | 3·83 |
| 22 | ·69 | 1·72 | 2·07 | 2·51 | 2·82 | 3·79 |
| 23 | ·69 | 1·71 | 2·07 | 2·50 | 2·81 | 3·77 |
| 24 | ·69 | 1·71 | 2·06 | 2·49 | 2·80 | 3·75 |
| 25 | ·68 | 1·71 | 2·06 | 2·49 | 2·79 | 3·73 |
| 26 | ·68 | 1·71 | 2·06 | 2·48 | 2·78 | 3·71 |
| 27 | ·68 | 1·70 | 2·05 | 2·47 | 2·77 | 3·99 |
| 28 | ·63 | 1·70 | 2·05 | 2·47 | 2·76 | 3·67 |
| 29 | ·68 | 1·70 | 2·05 | 2·46 | 2·76 | 3·66 |
| 30 | ·68 | 1·70 | 2·04 | 2·46 | 2·75 | 3·65 |
| ∞ | ·67 | 1·65 | 1·96 | 2·43 | 2·58 | 3·29 |

$Pt = P(|\ t\ |) > t_0$

Significant of $t_0$ of $t$ for given probabilites $Pt$

அட்டவணையின் ஆசிரியர், வெளியீட்டோர் அனுமதி பெறப்பட்டது.

## 4. கை வர்க்கப் பரவல்

[$n$ = இயக்கப் பாகைகள் ; $P_r$ = ஊக அளவுகள்]

| $n$ / $P_r$ | 0·95 | 0·50 | 0·10 | 0.05 | 00·5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0·004 | 0·46 | 2·71 | 3·84 | 6·64 |
| 2 | 0·103 | 1·39 | 4·00 | 5·99 | 9·21 |
| 3 | 0·35 | 2·37 | 6·25 | 7·82 | 11·34 |
| 4 | 0·71 | 3·36 | 7·78 | 9·49 | 13·28 |
| 5 | 1·14 | 4·35 | 9·24 | 11·07 | 15·09 |
| 6 | 1·64 | 5·35 | 10·64 | 12·59 | 16·81 |
| 7 | 2·17 | 6·35 | 12·02 | 14 07 | 18·48 |
| 8 | 2·73 | 7·34 | 13·36 | 15·51 | 20·03 |
| 9 | 2·32 | 8·34 | 14·68 | 16·92 | 21·67 |
| 10 | 3·94 | 9·34 | 15·99 | 18·31 | 23·21 |
| 11 | 4·58 | 10·34 | 17·28 | 19·68 | 24·72 |
| 12 | 5·23 | 11·34 | 18 55 | 21·03 | 26·22 |
| 13 | 5·89 | 12·34 | 19·81 | 22·36 | 27·69 |
| 14 | 6·57 | 13·34 | 21·06 | 23·68 | 29·14 |
| 15 | 7·26 | 14·34 | 22·31 | 25 00 | 30·58 |
| 16 | 7·96 | 15·34 | 23·54 | 26·30 | 32·00 |
| 17 | 8·67 | 16·34 | 24·77 | 27 59 | 33.41 |
| 18 | 9 39 | 17·34 | 25·99 | 28·87 | 34·80 |
| 19 | 10.12 | 18 34 | 27 20 | 30·14 | 36·19 |
| 20 | 10·85 | 19·34 | 28·41 | 31·41 | 37·57 |
| 21 | 11·59 | 20·34 | 29·62 | 32 67 | 38·93 |
| 22 | 12·34 | 21·34 | 30·81 | 33·92 | 40·29 |
| 23 | 13·09 | 22·34 | 32·01 | 35·17 | 41·64 |
| 24 | 13·85 | 23·34 | 33·20 | 36·42 | 42·98 |
| 25 | 14·71 | 24·34 | 34·38 | 37·55 | 44·31 |
| 26 | 15·38 | 25·34 | 35·56 | 38·88 | 45·64 |
| 27 | 16·15 | 26·34 | 36·74 | 40·11 | 46·66 |
| 28 | 16 93 | 27·34 | 37·92 | 41·84 | 48·28 |
| 29 | 17·71 | 28·34 | 39 09 | 42·56 | 49·59 |
| 30 | 18·49 | 29·34 | 40 26 | 43·77 | 50·89 |

பேராசிரியர் (காலஞ் சென்ற R. A. ஃபிஷர், பேராசிரியர் F யேட்சு இவர்களின் "Statistical tables for Biological, Agricultural and Medical Research published by Olived Boyd" Edinburgh-லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியிட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

# 5. F-ன் பரவல்

(1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில்)

[$n_1$ = இயக்கப் பாகைகள் $n_2$ = இயக்கப் பாகைகள்]

| $n_1$ / $n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 49 95 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6022 | 6056 | 6006 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 98·50 | 99·00 | 99·17 | 99·25 | 99·30 | 99·33 | 99·36 | 99·37 | 99·39 | 99·40 | 99·42 | 99·43 | 99·45 | 99·46 | 99·47 | 99·47 | 99·48 | 99·49 | 99·50 |
| 3 | 34·12 | 30·82 | 29·46 | 28·71 | 28·24 | 27·91 | 27·67 | 27·49 | 23·35 | 27·23 | 27·05 | 26·87 | 26·69 | 26·60 | 26·50 | 26·41 | 26·32 | 26·22 | 26·13 |
| 4 | 21·20 | 18·00 | 16·69 | 15·98 | 15·S2 | 15·21 | 14·98 | 14 80 | 14·66 | 14 55 | 14·37 | 14·20 | 14·02 | 13·93 | 13.84 | 13·75 | 13·65 | 13·56 | 13·46 |
| 5 | 16·26 | 13·27 | 12·06 | 11·39 | 10·97 | 10·67 | 10·46 | 10·29 | 10·16 | 10·05 | 9·89 | 9·72 | 9·55 | 9·47 | 9·38 | 9·29 | 9·20 | 9·11 | 9·02 |
| 6 | 3·75 | 10 92 | 9·78 | 9·15 | 8·75 | 8·47 | 8·26 | 8·10 | 7·98 | 7·87 | 7·72 | 7·56 | 7·40 | 7·31 | 7·23 | 7·14 | 7·06 | 6·97 | 6·88 |
| 7 | 12·25 | 9·55 | 8·45 | 7 85 | 7·46 | 7·19 | 6 99 | 6·84 | 6·72 | 6·62 | 6·47 | 6·31 | 6·16 | 6·06 | 5·99 | 5·91 | 6·82 | 5·47 | 5·65 |
| 8 | 11·26 | 8·65 | 7·59 | 7·01 | 6·63 | 6·37 | 6·18 | 6·03 | 5·91 | 5·81 | 5·67 | 5·52 | 5·36 | 5·28 | 5·20 | 5·12 | 5·03 | 4·95 | 4·86 |
| 9 | 10·56 | 8·02 | 6·99 | 6·42 | 6·06 | 5 80 | 5·61 | 5·47 | 5·35 | 4·26 | 5·11 | 4·96 | 4·81 | 4·73 | 4·65 | 4·57 | 4·48 | 4·40 | 4 31 |
| 10 | 10·04 | 7·56 | 6·55 | 5·99 | 5·64 | 5·39 | 5·20 | 5·06 | 4·94 | 4·85 | 4·71 | 4·56 | 4·41 | 4·33 | 4·25 | 4·17 | 4·08 | 4·00 | 3·91 |
| 11 | 9·65 | 7·21 | 6·22 | 9·67 | 5 32 | 5·07 | 4·89 | 4·74 | 4·63 | 4·54 | 4·40 | 4·25 | 4·10 | 4·02 | 3·94 | 3·86 | 3·78 | 3·69 | 3·60 |
| 12 | 9·33 | 6·93 | 5·95 | 5·41 | 5·96 | 4·82 | 4·64 | 4·50 | 4·39 | 4·30 | 4·16 | 4·01 | 3·86 | 3·78 | 3·70 | 3·62 | 3·54 | 3·45 | 3·36 |
| 13 | 9·07 | 6·70 | 5·74 | 5·21 | 4·86 | 4·62 | 4·44 | 4·30 | 4·19 | 4·10 | 3·96 | 3·82 | 3·66 | 3·59 | 3·51 | 3·43 | 3 34 | 3·25 | 3·17 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **14** | 8.86 | 6·51 | 5·56 | 5·04 | 4·69 | 4·46 | 4·38 | 4·14 | 4·03 | 3·94 | 3·80 | 3·66 | 3·51 | 3·43 | 3·35 | 3·27 | 3·18 | 3·09 | 3·00 |
| **15** | 8·68 | 6·36 | 5·42 | 4·89 | 4·56 | 4·32 | 4·14 | 4·00 | 3.89 | 3·80 | 3·67 | 3·52 | 3·37 | 3·29 | 3·21 | 3·13 | 3·05 | 2·96 | 2·87 |
| **16** | 8·53 | 6·23 | 5·29 | 4·77 | 4·44 | 4·20 | 4·03 | 3·89 | 3·78 | 3·69 | 3·55 | 3·41 | 3·26 | 3·18 | 3·10 | 3 02 | 2·93 | 2·84 | 2 74 |
| **17** | 8·40 | 6·11 | 5·18 | 4·67 | 4·34 | 4·10 | 3·93 | 3·79 | 3·68 | 3·59 | 3·46 | 3·31 | 3·16 | 3·08 | 3·00 | 2·92 | 2·83 | 2 75 | 2·65 |
| **18** | 8·29 | 6·01 | 5·09 | 4·58 | 4·25 | 4·01 | 3·84 | 3·71 | 3·60 | 3·51 | 3·37 | 3·23 | 3·08 | 3 00 | 2·92 | 2·84 | 2·75 | 2·66 | 2.57 |
| **19** | 8·18 | 5·93 | 5·01 | 4·50 | 4·17 | 3·94 | 3·77 | 3·66 | 3·52 | 3·43 | 3·30 | 3·15 | 3·00 | 2·92 | 2·84 | 2·76 | 2·67 | 2·58 | 2·49 |
| **20** | 8·10 | 5·85 | 4·94 | 4·43 | 4·13 | 3·87 | 3·70 | 3·56 | 3·46 | 3·37 | 3·23 | 3·09 | 2·94 | 2·86 | 2·78 | 2·69 | 2·61 | 2·52 | 2·44 |
| **22** | 7·95 | 5·72 | 4·82 | 4·31 | 3·99 | 3·76 | 3·59 | 3·45 | 3·35 | 3·26 | 3·12 | 2·98 | 2·83 | 2·75 | 2·67 | 2·58 | 2·50 | 2·40 | 2·31 |
| **24** | 7·82 | 5·61 | 4·72 | 4·22 | 3·90 | 3·67 | 3·50 | 3·36 | 3·26 | 3·17 | 3·03 | 2·89 | 2·74 | 2·66 | 2·58 | 2·49 | 2·40 | 2·31 | 2·21 |
| **26** | 7·72 | 5·53 | 4·64 | 4·14 | 3·82 | 3·59 | 3·42 | 3·29 | 3·18 | 3·09 | 2·96 | 2·81 | 2·67 | 2·58 | 2·50 | 2·42 | 2·33 | 2·23 | 2·13 |
| **28** | 7·64 | 5·45 | 4·57 | 4·07 | 3·75 | 3·53 | 3·36 | 3·23 | 3·12 | 3·03 | 2·90 | 2·75 | 2·60 | 2·52 | 2·44 | 2·35 | 2·26 | 2·17 | 2·06 |
| **30** | 7·56 | 5·39 | 4·51 | 4·02 | 3·70 | 3·47 | 3·30 | 3·17 | 3·07 | 2·98 | 2·84 | 2·70 | 2·55 | 2·47 | 2·39 | 2·30 | 2·21 | 2·11 | 2·01 |
| **40** | 7·31 | 5·18 | 4·31 | 3·83 | 3·51 | 3·29 | 3·12 | 2·99 | 2·89 | 2·80 | 2·66 | 2·52 | 2·37 | 2·29 | 2·20 | 2·11 | 2·02 | 1·92 | 1·80 |
| **60** | 7·08 | 4·98 | 4·13 | 3·65 | 3·34 | 3·12 | 2·95 | 2·82 | 2·72 | 2·63 | 2·50 | 2·35 | 2·20 | 2·12 | 2·03 | 1·94 | 1·84 | 1·73 | 1·60 |
| **120** | 6·85 | 4·79 | 3·95 | 3·48 | 3·17 | 2·96 | 2·79 | 2·66 | 2·56 | 2.47 | 2·34 | 2·19 | 2·03 | 1·95 | 1.86 | 1·76 | 1·66 | 1·53 | 1·38 |
| **∞** | 6·63 | 4·61 | 3·78 | 3·32 | 3·02 | 2·80 | 2·64 | 2·51 | 2·41 | 2·32 | 2·18 | 2·04 | 1·88 | 1·79 | 1·70 | 1·59 | 1·47 | 1·32 | 1·00 |

**பேராசியர்** (**காலஞ் சென்ற**) R. A. **ஃபிஷர்**, **பேராசியர்** F. **யேட்சு இவர்களின்** ‘ Statistical tables for Biological, Agricultnral anq Medical Reserch ’ Published by Oliver K. Boyd, Edinburgh-**லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியிட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.**

## 6. F-ன் பரவல்

(5% சிறப்புக் காண் மட்டத்தில்)
($n_1$, $n_2$ = இயக்கப் பாகைகள்)

| $n_1$ / $n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161·4 | 199·5 | 215·7 | 224·6 | 230·2 | 234·0 | 236·8 | 238·9 | 245·5 | 241·9 | 243·9 | 245·9 | 248 0 | 249·1 | 250·1 | 251·1 | 252·2 | 253·3 | 254·3 |
| 2 | 18·51 | 19·00 | 19·16 | 19·25 | 19·30 | 19·33 | 19·35 | 19·37 | 19·31 | 19·40 | 19·41 | 19·43 | 19·45 | 19·45 | 19·46 | 19·47 | 19·48 | 19·49 | 19·50 |
| 3 | 10·13 | 9·55 | 9·28 | 9·12 | 9·01 | 8·94 | 8·89 | 8·85 | 8·81 | 8·79 | 8·74 | 8·70 | 8·66 | 8·64 | 8·62 | 8·59 | 8·57 | 8·55 | 8·53 |
| 4 | 7·71 | 6·94 | 6·59 | 6·39 | 6·26 | 6·16 | 6·09 | 6·04 | 6·00 | 5·96 | 5·91 | 5·86 | 5·80 | 5·77 | 5·75 | 5·72 | 5·69 | 5·66 | 5·63 |
| 5 | 6·61 | 5·79 | 5·49 | 5·19 | 5·05 | 4·95 | 4·88 | 4 82 | 4·77 | 4·74 | 4·68 | 4·62 | 4·56 | 4·53 | 4·50 | 4 46 | 4·43 | 4·40 | 4·36 |
| 6 | 5·99 | 5·14 | 4·76 | 4·53 | 4·39 | 4·28 | 4·21 | 4·15 | 4·10 | 4·06 | 4·00 | 3·94 | 3·87 | 3·84 | 3·81 | 3·37 | 3·74 | 3·70 | 3·67 |
| 7 | 5·59 | 4·74 | 4·35 | 4·12 | 3·97 | 3·87 | 3·79 | 3·73 | 3·68 | 3·64 | 3·57 | 3·51 | 3 44 | 3·41 | 3·38 | 3·34 | 3 30 | 3·27 | 3·23 |
| 8 | 5·32 | 4·46 | 4·07 | 3 84 | 3·69 | 3·58 | 3·50 | 3·44 | 3·39 | 5·35 | 3·28 | 3·22 | 3·15 | 3·12 | 3·08 | 3·04 | 3·01 | 2·97 | 2·93 |
| 9 | 5·12 | 4·26 | 3·86 | 3·63 | 3·48 | 3·37 | 3·29 | 3 23 | 3·18 | 3·14 | 3·07 | 3·01 | 2·94 | 2·90 | 2·86 | 2·83 | 2·79 | 2·75 | 2·71 |
| 10 | 4·96 | 4·10 | 3·71 | 3·48 | 3·33 | 3·22 | 3·14 | 3·07 | 2·02 | 2·98 | 2·91 | 2·85 | 2·77 | 2·74 | 2·70 | 2·66 | 2·62 | 2·58 | 2·54 |
| 11 | 4·84 | 3·98 | 3·59 | 3·36 | 3·20 | 3·09 | 3·01 | 2·95 | 2·90 | 2·85 | 2·79 | 2·72 | 2·65 | 2·61 | 2·57 | 2·53 | 2·49 | 2·45 | 2·40 |
| 12 | 4·75 | 3·89 | 3·49 | 3·26 | 3·11 | 3·00 | 2·91 | 2·85 | 2·80 | 2·75 | 2·69 | 2·62 | 2·54 | 2·51 | 2·47 | 2·43 | 2·38 | 2 34 | 2·30 |
| 13 | 4·67 | 3·81 | 3·11 | 3·18 | 3·03 | 2·92 | 2·83 | 2·77 | 2·71 | 2·67 | 2·60 | 2·53 | 2·46 | 2·42 | 2·38 | 2·34 | 2·30 | 2·25 | 2·21 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 4·60 | 3·74 | 3·34 | 3·11 | 2·96 | 2·85 | 2 76 | 2·70 | 2·65 | 2·60 | 2·53 | 2·46 | 2·39 | 2·35 | 2·31 | 2·27 | 2·22 | 2·18 | 2·13 |
| 15 | 4·54 | 3·68 | 3·29 | 3·06 | 2·90 | 2·79 | 2·71 | 2·64 | 2·59 | 2·54 | 2·48 | 2·40 | 2·33 | 2·29 | 2 25 | 2·20 | 2 16 | 2·11 | 2·07 |
| 16 | 4·49 | 3·63 | 3·24 | 3·01 | 2·85 | 2·74 | 2·66 | 2·59 | 2·54 | 2·49 | 2·42 | 2·35 | 2·28 | 2·24 | 2·19 | 2 15 | 2·11 | 2·06 | 2·01 |
| 17 | 4·45 | 3·59 | 3·20 | 2·96 | 2·81 | 2·70 | 2·61 | 2·55 | 2·49 | 2·45 | 2·38 | 2·31 | 2·23 | 2 19 | 2·15 | 2·10 | 2 06 | 2·01 | 1·96 |
| 18 | 4·41 | 3·55 | 3 16 | 2·93 | 2·77 | 2·66 | 2·58 | 2·51 | 2·46 | 2·41 | 2·34 | 2·27 | 2·19 | 2 15 | 2·11 | 2·06 | 2 02 | 1·97 | 1·92 |
| 19 | 4·38 | 3·52 | 3·13 | 2·90 | 2·74 | 2·63 | 2·54 | 2·48 | 2 42 | 2·38 | 2.31 | 2·23 | 2·16 | 2·11 | 2·07 | 2 03 | 1·98 | 1·93 | 1·88 |
| 20 | 4·35 | 3·49 | 3·10 | 2·87 | 2·71 | 2·60 | 2·51 | 2·45 | 2·12 | 2 35 | 2·28 | 2·20 | 2·12 | 2·08 | 2·04 | 1 99 | 1·95 | 1·90 | 1·84 |
| 22 | 4·30 | 3·44 | 3·05 | 2 82 | 2·66 | 2·55 | 2·46 | 2·40 | 9·34 | 2 30 | 2·23 | 2·15 | 2·01 | 2·03 | 1·98 | 1·94 | 1·89 | 1·84 | 1·78 |
| 24 | 4·26 | 3·40 | 3·01 | 2·78 | 2·62 | 2·51 | 2·42 | 2·36 | 2·30 | 2·25 | 2·18 | 2·11 | 2·03 | 1·98 | 1·94 | 1·89 | 1·84 | 1·79 | 1·73 |
| 26 | 4·23 | 3·37 | 2·98 | 2·74 | 2·59 | 2·47 | 2·39 | 2·32 | 2·27 | 2·22 | 2·15 | 2·07 | 1·99 | 1·95 | 1·90 | 1·85 | 1·80 | 1·75 | 1·69 |
| 28 | 4·20 | 3·34 | 2·95 | 2·71 | 2·56 | 2·45 | 2·36 | 2·29 | 2 24 | 2·19 | 2:12 | 2 04 | 1:96 | 1·91 | 1·87 | 1·82 | 1·77 | 1 71 | 1·65 |
| 30 | 4·17 | 3·32 | 2·92 | 2·69 | 2·53 | 2·42 | 2·33 | 2·27 | 2·21 | 2·16 | 2·09 | 2·01 | 1·93 | 1·89 | 1·84 | 1·79 | 1·74 | 1· 8 | 1·62 |
| 40 | 4·08 | 3·23 | 2·84 | 2·61 | 2·45 | 2·34 | 2·25 | 2·18 | 3.92 | 2·08 | 2·00 | 1·92 | 1·84 | 1·79 | 1·74 | 1 69 | 1·64 | 1·58 | 1 51 |
| 60 | 4·00 | 3·15 | 2·76 | 2·53 | 2·37 | 2·25 | 2·17 | 2·10 | 2 04 | 1·99 | 1·92 | 1·84 | 1·75 | 1·70 | 1·65 | 1·59 | 1·53 | 1·47 | 1 39 |
| 120 | 3 92 | 3·07 | 2·68 | 2·45 | 2·26 | 2·17 | 2·09 | 2 02 | 1·96 | 1·91 | 1·83 | 1·75 | 1·66 | 1·61 | 1·55 | 1·50 | 1·43 | 1 35 | 1·25 |
| ∞ | 3·84 | 3·00 | 2·60 | 2·37 | 2·21 | 2·10 | 2·01 | 1·94 | 1·88 | 1 83 | 1·75 | 1·61 | 1·57 | 1·52 | 1·46 | 1·39 | 1·32 | 1·22 | 1·00 |

பேராசிரியர் (காலஞ் சென்ற) R. A. ஃபிஷர், பேராசிரியர் F. யேட்சு இவர்களின் " Statistical tables for Biological, Agricultural and Heolieal Research published by Oliver Boyq, Eolimburkh " – லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியிட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

# மேற்கோள் நூற்பட்டியல்


1. *Anderson, R. L., and Bancroft, T. A.*, Statistical Theory in Research. McGraw-Hill, *1952*.

2. *Brunk, H. D.*, An Introduction ro Mathematical Statistics, 2nd cdition, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass, *1965*.

3. *Cramer, H.*, Mathematical Methods of statistics, Princeton University Press, Princeton, N. J., *1946*.

4. *Willfrid J. Dixon & Frank J. Massey J. R.* Introduction to statistical Analysis McGraw Hill & Co.

5. *Feller, F*, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I. 2nd editions, John Willey and Sons, New York, *1997*.

6. *Ferguson, T. S.*, Mathematical Statistics, Academic Press, Inc., New York, *1967*.

7. *Fisher, R. A.*, Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd.

8. *Fraser, D. A. S.*, Non-parametric Methods in Statistics, John Wiley and sons, New Yark, *1957*.

9. *Goldberk, S.*, Probability, An Introduction Prentics-Hall, *1960*.

10. *Goon, A. M., Gupta, M. K., and Das Gupta, B.*, An out line of statistical Theory World Press, *1970*.

11. *Goon, A. M., Gupta, M. K. and Das Gupta, B.*, Fundamentals of Statistics Volume I, II. World Press, *1971*.

12. *S. C. Gupta* and *V. K. Kapoor*, Fundamentals of Mathematical Statistics, S Chand & Sons, *1973*.

13 *Goulden, C. H.*, Methods of Statistical Analysis, John Wiley, *1952*, and Asia Publishing House, *1959*.

14. *William C. Guenther*, Concepts of Statistical Inference, McGraw Hill & Co. *1965*.

15. *Hald, A.*, Statistical Theory With Engineering Applications, John Wiley, *1952*.

16. *P. G. Hoel*, Introduction to Mathematical Statistics, John Wiley & Sons. New York *1964*.

17. *Hogg, R. V., and Graig, A. T.*, Introduction to Mathematical Statistics, MacMillan, *1965*.

18. *Keeping, E. S.*, Introduction to Statistical Inference, Van Nostrand, *1962*, and Affiliated East-West Press.

19. *Kendall, M. G., and Stuart, A.*, Advanced Theory of Statistics, Volume-I, Charles Griffin, *1960*.

20. *Kendall, M. G., and Stuart, A.*, Advanced Theory of Statistics, Volume-II, Charles Griffin, *1961*.

21. *Kenny, J. F., and Keeping, E. S.*, Mathematics of Statistics, Part I. Van Nostrand, *1954*, and Affliated East-West Press.

22. *Lehmann, E. L.*, Testing Statistical Hypotheses, John Wiley & Sons, New York, *1959*.

23. *Meyer, P. L.*, Introductory Probability and Statistical Applications, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass, *1965*.

24. *Mills, F. C.*, Statistical Methods, H. Holt, *1955*.

25. *Mood, A. M.*, Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill Book Co.

26. *Mood, A. M., and Graybill, F A.*, Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill, *1963.*

27. *Moore, P. G.*, Principles of Statistical Techniques, Cambridge University Press, *1958.*

28. *Parzen, E.*, Modern Probability Theory and Its Applications, John Wiley, *1960* and Toppan.

29. *E. S. Pearson and H. O. Hartley*, Biometrika Tables for Statisticians, Volume-I. Cambridge University Press, 1958.

30. *Raiffa, H., and Schlaifer, R.*, Applied Statistical Decision Theory, Published by Division of Research Harvard Business School, Harvard University, Boston, *1961.*

31. *Rao, C. R.*, Advanced Statistical Methods in Biometric Research, John Wiley, *1952.*

32. *Rao, C. R.*, Linear-Statistical Inference and its Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, *1965.*

33. *Scheffe, H.*, The Analysis of Variance, John Wiley & Sons, New York, *1959.*

34. *Siegel, S.*, Non-Parametric Statistics for the Behavioral Sciences, McGraw-Hill, *1956.*

35. *Simpson, G., and Kafka, F.*, Basic Statistics, W.W. Norton *1957*, and Oxford and IBH, *1965.*

36. *Snedecor, G. W.* Statistical Methods, Iowa State College Press, *1956*, and Allied Pacific, *1961.*

37. *H. C. Saxena and P. U. Surendran*, Statistical Inference, S. Chand & Co. *1967.*

38. *Tippett, L. H. C.* Statistics, Oxford University Press, *1948.*

39. *Uspensky, J. V.*, Introduction to Mathematical Probability, McGraw-Hill, *1937.*

40. *Wald, A.*, Sequential Analysis, John Wiley, & Sons, New York, 1947.

41. *Wald, A.*, Principles of Statistical Inference, Notre Dame, 1942.

42. *Walker, H. M., and Lev, J.*, Statistical Inference, Oxford & IBH Publishing Company, 1965.

43. *Wallis, W. A., and Roberts, H. V.*, Statistics, A New Approach, Methuen, 1957.

44. *Weatherburn, C. E.*, A First Course in Mathematical Statistics, Cambridge University Press, 1947.

45. *Wilks, S. S.*, Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York, 1962.

46. *Yale, G. U. and Kendall, M. G.*, An Introduction to the Theory of Statistics, Charles Griffin, 1953.

47. *V. S. Huzurbazar*, Sufficient Statistics (Marcel Dekker, In, New York, 1976).

# கலைச்சொற்கள்

## A

Absolute magnitude — முழுமையான அளவில்
Absolute sum — முழுமையான கூட்டல்
Absolute value — முழுமையான மதிப்பு
Acceptable region — ஏற்கத்தகுந்த பகுதி, ஏற்றுக் கொள்ளும் பகுதி
Advantages — பயன்கள், நன்மைகள்
Algebra of sets — கணங்களின் இயற்கணிதம்
Allocation — பங்கீடு
Alternative hypothesis — மாறெதிரான எடுகோள்
Alternative procedure — மாற்று முறை
Analysis of Variance — மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு
Appendix — பிற்சேர்க்கை
Approximations — தோராயங்கள்
Aposteriori probability — பின் அறிந்த நிகழ்தகவு
Apriori probability — முன்கூட்டிய நிகழ்தகவு
Arbitrarily — யதேச்சையாக
Arithmetic mean — கூட்டிடைச் சராசரி
Arithmetic progression — கூட்டுத் தொடர்
Ascending order — ஏறு வரிசை
Association — ஒட்டுறவு
Association of attributes — குணப் பண்புகளின் ஒட்டுறவு
Association of coefficient — ஒட்டுறவுக் கெழு
Assumptions — அனுமானங்கள்
Asymptotically — தொடர்ந்து இணையாது அணுகிச் செல்கின்ற
Asymptotically most efficient — தொடர்ந்து இணையாது அணுகிச் செல்கின்ற மிகவும் திறன் வாய்ந்த
Averages — சராசரிகள்
Axis — அச்சு

## B

Bell shaped — 'மணி' வடிவுடைய
Best Critical Region(B.C.R.) — சிறந்த தீர்வுக் கட்டப்பகுதி
Biased estimator — நடுநிலையற்ற மதிப்பீடு
Biased variate — பிறழ்ச்சியான மாறி
Binomial variate — ஈருறுப்பு மாறி
Bivariate — இருமாறி
Border line — எல்லைக் கோடு
Boundary — வரம்பு

## C

Census Method — மக்கள் கணிப்பு, முழுமைத் தொகுதிக் கணிப்பு
Central Limit Theorem — நடு எல்லைத் தேற்றம்
Central tendency — மையநிலைப் போக்கு
Chance — வாய்ப்பு
Class — பிரிவு, வகுப்பு
Class frequency — பிரிவு-அலைவெண்
Class interval — பிரிவு-இடைவெளி
Class limit — பிரிவு எல்லை
Classification — பாகுபாடு, பிரிவினை
Classify — பாகுபடுத்து
Coefficient — கெழு
Coefficient of Association — தொடர்புக் கெழு, ஒட்டுறவுக் கெழு
Coefficient of Correlation — உடன்தொடர்புக் கெழு
Coefficient of Dispersion — சிதறல் கெழு
Coefficient of Variation — மாறுபாட்டுக் கெழு
Complement of set — கண நிரப்பி
Conditional probability — நிபந்தனை நிகழ்தகவு
Conditional probability density — நிபந்தனை நிகழ்தகவு அடர்த்தி
Confidence Coefficient — நம்பிக்கைக் கெழு
Confidence intervals for variance — மாறுபாடுகளுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளிகள்
Confidence Limit — நம்பக எல்லை
Constraint — நிபந்தனை, கட்டுப்பாடு

Consumer — துய்ப்போர், நுகருவோர்
Contingency Table — இணைப் பட்டியல்
Continuous random variable — தொடர்ச்சியான ஏரண்டம் மாறி
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous variable — தொடர்ச்சி மாறி
Continuous type — தொடர்ச்சி வகை
Convex functions — குவிந்த சார்பலன்கள்
Correlation — உடன்தொடர்பு
Correlation positive — நேரிடை உடன்தொடர்பு
Correlation negative — எதிர்மறை உடன்தொடர்பு
Correlation rank — அணிவரிசை உடன்தொடர்பு
Correlation table — உடன்தொடர்புப் பட்டியல்
Covariance — உடன் மாறுபாடு
Critical — தீர்வுகட்டமான
Critical region — தீர்வுகட்டப் பகுதி
Cumulative — திரள், குவிந்த
Cumulative distribution function — திரள் பரவல் சார்பலன்
Cumulative frequency — திரள் அலைவெண்
Cumulative frequency curve less than — கீழ் இனத்திரள் அலைவெண் வளைகோடு
Cumulative frequency curve greater than — மேலினத்திரள் அலைவெண் வளைகோடு
Curve — வளைகோடு
Curve fitting — வளைகோட்டைப் பொருத்துதல்
Cyclical fluctuation — சுழற்சி ஏற்றவிறக்கம்

D

Data — விவரங்கள்
Data primary — முதனிலை விவரங்கள்
Data statistical — புள்ளி விவரங்கள்
Data secondary — இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
Degree — பாகை
Degree of freedom — வரையற்ற பாகை
Denominator — பகுதி
Density — அடர்த்தி
Density, Probability — நிகழ்தகவு
Dependent event — சார்புடைய நிகழ்ச்சி

| | | |
|---|---|---|
| Derive | — | வருவி, நிரூபி |
| Degree of correspondence | — | ஒத்திசையின் அளவு |
| Descending order | — | இறங்கு வரிசை |
| Design | — | உருவ அமைப்பு, திட்ட அமைப்பு |
| Deviation | — | வேறுபாடு, விலக்கம், கழிவு |
| Deviation mean | — | சராசரி விலக்கம் |
| Deviation mean, from mean | — | கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம் |
| Deviation mean, from median | — | இடைநிலையிலிருந்து கழிக்கப் பட்ட சராசரி விலக்கம் |
| Deviation mean, from mode | — | முகடிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம் |
| Deviation quartile | — | கால்மான விலக்கம் |
| Deviation standard | — | தர விலக்கம், திட்ட விலக்கம் |
| Diagram, Scatter | — | சிதறல் விளக்கப் படம் |
| Diagram, Statistical | — | புள்ளிவிவர விளக்கப் படம் |
| Die | — | பகடை |
| Differential | — | வகையீடு |
| Discontinuous variable | — | தொடர்பிலா மாறி |
| Discrete variable | — | தனித்தவகை மாறி |
| Dispersion | — | சிதறல் |
| Dispersion matrix | — | மாறுபாட்டு அணி |
| Dispersion, measures of | — | சிதறல் அளவைகள் |
| Distribution | — | பரவல் |
| Distribution binomial | — | ஈருறுப்புப் பரவல் |
| Distribution bivariate normal | — | இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல் |
| Distribution continuous | — | தொடர்ச்சியான பரவல் |
| Distribution discrete | — | தனித்த பரவல் |
| Distribution exponential | — | அடுக்குப் பரவல் |
| Distribution free method | — | பரவலினின்று விடுபட்ட முறைகள் |
| Distribution gamma | — | காமா பரவல் |
| Distribution geometric | — | ஜியோமிதிப் பரவல் |
| Distribution negative binomial | — | எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவல் |
| Distribution normal | — | இயல்நிலைப் பரவல் |
| Distribution poisson | — | பாய்ஸான் பரவல் |
| Distribution rectangular (Uniform) | — | செவ்வகப் பரவல் (ஒரு சீரான பரவல்) |

Distribution sample correlation coefficient, r — மாதிரி உடன் தொடர்புக் கெழுவின் பரவல்
Distribution sample mean — மாதிரிச் சராசரியின் பரவல்
Distribution trinomial — மூன்று உறுப்புப் பரவல்
Distribution sample variance — மாதிரியின் மாறுபாட்டுப் பரவல்
Distribution of F — F-ன் பரவல்
Distribution of $Z$ — Z-ன் பரவல்

E

Efficiency — திறன், நிறைவு, திறமை
Efficient scores — திறன்வாய்ந்த கணிப்பெண்கள்
Equally likely — சரிசம வாய்ப்புள்ள
Equality of two means — இரண்டு சராசரிகளின் சமம்
Empirical formula — அனுபவ ரீதியில் உள்ள சூத்திரம்
Enquiry — கணக்கெடுப்பு
Enumerator — கணக்கெடுப்போர்
Error — பிழை, தவறு
Establish — நிறுவு
Estimators — மதிப்பீடுகள்
Evaluate — கணக்கிடு
Evaluation — கணக்கீடு
Even function — இரட்டைப்படைச் சார்பலன்
Event — நிகழ்ச்சி, விளைவு
Event Dependent — சார்புடைய நிகழ்ச்சி
Event Independent — சார்பற்ற, (சார்பிலா) நிகழ்ச்சி
Event conditional — நிபந்தனை நிகழ்ச்சி
Exhaustive — பூரணமான
Expectation, Mathematical — கணக்கு முறைப்படி எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு
Expected value — எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு, (மதிப்பு)

F

Factor — காரணி
Features — தனிச் சிறப்புகள்
Finite — முடிவுடைய, எல்லையுள்ள
Fit — இணைப்பு, பொருத்தல்
Fluctuation — ஏற்றவிறக்கம்

Forecast — முன் கணிப்பு
Frequency — அலைவெண்
Frequency curve — அலைவெண் வளைகோடு
Frequency cumulative — திரள் அலைவெண்
Frequency distribution — அலைவெண் பரவல்
Function — சார்பலன்
Functions of minimal sufficient statistics — மீச்சிறு போதுமான மாதிரி அளவைகள்
Functionally Independent — சார்பலன்களில் சாராதவாறு

G

Geometric mean — ஜியோமிதிச் சராசரி
Geometric distribution — ஜியோமிதிப் பரவல்
Geometric progression — ஜியோமிதித் தொடர்
Graph — வரைபடம்
Group — தொகுதி, தொகுப்பு

H

Harmonic mean — இசைச் சராசரி
Harmonic progression — இசைத் தொடர்
Homogeneous — சமபடித்தான, ஒருபடித்தான
Hypothesis — எடுகோள்
Hypothesis null — சூன்ய எடுகோள்
Hypothesis alternative — மாறெதிரான எடுகோள்
Hypothesis composite — கலவை எடுகோள்

I

Ideal — நிலையான
Identical — சர்வ சமமுடைய
Incomplete — முழுமையற்ற
Increasing order — அதிகரிக்கும் வரிசை, ஏறும் முகமான
Independence — தனித்தவை. சார்பற்ற தன்மை
Individual — தனித்த
Inference — உய்த்துணர்வு
Infinite — முடிவிலியான, வரையற்ற, எல்லையற்ற
Infinity — முடிவிலி
Interactions — எதிர் எதிர் வினைவுகள்

| | | |
|---|---|---|
| Integral | — | தொகுப்பு |
| Integrate | — | தொகுப்பீடு செய் |
| Interval | — | இடைவெளி |
| Interval estimation | — | இடைவெளி மதிப்பீடு |
| Interval estimation of proportion | — | ஒரு விகிதத்துக்கான இடைவெளி மதிப்பீடு |
| Item | — | உறுப்பு |
| Iteration method | — | திரும்பத் திரும்பச் செய்முறை |

J

| | | |
|---|---|---|
| J-shaped | — | J-வடிவுடைய |
| Joint probability density function | — | இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் |

K

| | | |
|---|---|---|
| Kurtosis | — | தட்டையளவு |
| Kurtic, lepto | — | மிகைத் தட்டை |
| Kurtic, platy | — | குறைத்தட்டை |

L

| | | |
|---|---|---|
| Large samples | — | பெரிய மாதிரிகள் |
| Least squares method | — | மீச்சிறு வர்க்க முறை |
| Level of significance | — | மிகைத் தன்மை மட்டம் (அ) பொருளுடைத்தான மட்டம் (அ) சிறப்பு காண் மட்டம் |
| Likelihood function | — | நிகழும் தன்மைச் சார்பலன் |
| Likelihood ratio test | — | நிகழும் தன்மை விகிதச் சோதனை |
| Limit | — | எல்லை, வரம்பு |
| Literature | — | சுவடிகள் |
| Linear constraint | — | நேர்கோட்டு நிபந்தனை |
| Location parameter | — | மைய இடத்தைப் பற்றிய சுட்டுறுப்பு |
| Log-Normal distribution | — | லாக்-நார்மல் பரவல், மடக்கை இயல்நிலைப் பரவல் |
| Logarithm | — | மடக்கை |
| Lower order moment | — | கீழ் வரிசை திருப்புதிறன் |
| Lower quartile | — | கீழ்க் கால்மானம் |

M

Marginal Probability — விளிம்பு நிகழ்தகவு
Marginal Probability Density Function — விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்
Mathematical model — கணித உருவடிவம்
Maximum — மீப்பெருமம்
Maximum likelihood method — மீப்பெரு நிகழ்தன்மை முறை
Mean — சராசரி
Mean arithemetic — கூட்டுச் சராசரி
Mean weighted — எடைச் சராசரி
Measures of assurance — உறுதி அளவை
Measures of central tendency — மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்
Measures of dispersion — சிதறல் அளவைகள்
Median — இடைநிலை
Median test — இடைநிலைச் சோதனை
Methods of minimum Chi-square — மீச்சிறு கை-வர்க்க முறை
Methods of Estimation — மதிப்பீட்டு முறைகள்
Methods of least squares — மீச்சிறு வர்க்க முறை
Methods of moments — திருப்பு திறன்களின் முறை
Minimum — மீச்சிறு
Minimum variance unbiased estimator — மீச்சிறு மாறுபாட்டு நடுநிலை மாறுத மதிப்பீடு
Minor — சிற்றணி
Mode — முகடு
Modified minimum $\chi^2$-method — திருத்தி அமைக்கப்பட்ட மீச்சிறு கை-வர்க்க முறை
Moments — திருப்பு திறன்கள்
Moment generating function — திருப்பு திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்
Most powerful test (MP test) — மிகத்திறம் வாய்ந்த சோதனை
Most probable — பெரும்பாலாக நிகழக்கூடிய
Multiparameter case — நிறைய சுட்டுறுப்பு வகை
Multiple — மடங்கு
Multiplication-law — பெருக்கல் நியதி
Mutually exclusive — ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை படைத்த

N

Negative binomial — எதிர்மறை ஈருறுப்பு
Negative number — எதிர்மறை எண்

| | | |
|---|---|---|
| Nominal (or) ordinal | — | பெயரளவேயானாலும் அல்லது எண் வகையில் வரிசை முறையில் இருக்கும் |
| Non-negative function | — | எதிர்மறையற்ற சார்பலன் |
| Non-parametric method | — | சுட்டுருப்பைச் சாராத சோதனை |
| Normal curve | — | இயல்நிலை வளைகோடு |
| Normal equation | — | ஒழுங்குச் சமன்பாடு |
| Normal variates | — | இயல்நிலை மாறிகள் |
| Normal population | — | இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி |
| Normal probabilty curve | — | இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோடு |
| Null hypothesis | — | சூன்ய எடுகோள் |

O

| | | |
|---|---|---|
| Observation | — | கண்டறிதல் |
| Odd function | — | ஒற்றைப்படைச் சார்பலன் |
| One-tailed test | — | ஒரு முனைச் சோதனை, ஒரு பக்கச் சோதனை |
| Ordinate | — | நிலைத்தூரம் |
| Origin | — | மூலம், ஆதி |

P

| | | |
|---|---|---|
| Paired-sample test | — | இணைக்கப்பட்ட மாதிரிச் சோதனை |
| Paired variates | — | இணைந்த மாறிகள் |
| Pair-wise | — | இணை இணையாக, சோடிசோடியாக |
| Parameter | — | சுட்டுருப்பு, முழுமைத் தொகுதிப் பண்பளவு |
| Parametric tests | — | சுட்டுருப்புக்கான சோதனைகள் |
| Partial derivatives | — | பகுதி வகைக்கெழுக்கள் |
| Percentie | — | நூற்றுமானம் |
| Point estimates | — | புள்ளி மதிப்பீடு |
| Population | — | முழுமைத் தொகுதி |
| Power | — | திறன் |
| Power calculation | — | திறன் கணக்கீடு |
| Power curve | — | திறன் வளைகோடு |
| Positive number power | — | நேரெண் திறம் |
| Probability | — | நிகழ்தகவு |

Probability density function — நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்
Probability Mathematical — கணக்கியல் நிகழ்தகவு
Probability Statistical — புள்ளியியல் நிகழ்தகவு
Procedures — வழிமுறைகள்
Probable Error — நிகழக்கூடிய பிழை
Psychometrics — உற்றறி பண்பாற்றல் முறை

Q

Qualitative data — பண்பின விவரங்கள்
Quality control — தரக் கட்டுப்பாடு
Quartile — கால்மானம்
Quantitative data — அளவின விவரங்கள்
Quartile de viation — கால்மான விலக்கம்
Quartile range — கால்மான வீச்சு
Quartile range Inter — இடைக் கால்மான வீச்சு

R

Randomness — 'ராண்ட'மான தன்மை
Range — வீச்சு
Rank — அணி வரிசை
Rank correlation — அணி வரிசை-உடன் தொடர்புகள்
Rao-Gramer lower bound — ராவ்-கிராமர் கீழ் எல்லை
Ratio — விகிதம்
Raw data — சீர்படா விவரங்கள்
Recurrence relation — மறுதரவுத் தொடர்பு
Regression analysis — தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு
Regression coefficient — தொடர்புப் போக்குக்கெழு
Regression equation — தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு
Regression estimate — தொடர்புப் போக்கு மதிப்பீடு
Regression linear — நேர்கோட்டுத் தொடர்புப் போக்கு
Relationship — தொடர்பு
Reliability — நம்பகம், நம்பகமை
Run — ஓட்டம்

S

Sample — மாதிரி, கூறு
Sample random — ராண்டம் மாதிரி

Sample size — மாதிரி அளவு
Sampling distribution — கூறுபரவல், மாதிரிப் பரவல்
Sampling error — மாதிரிப் பிழை
Sampling inspection — சோதனைக் கண்காணிப்பு
Sampling simple random — சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை
Sampling statistic — மாதிரிப் பண்பளவை, மாதிரி அளவை
Scale — அலகு
Scores — மதிப்பெண்கள், கணிப் பெண்கள்
Shape — வடிவம்
Sign test — குறிச் சோதனை
Signed-rank test — குறியிடப்பட்ட அணி வரிசைச் சோதனை
Significance — பொருளுடைத் தன்மை, மிகைத் தன்மை, கிடைத் தன்மை
Similar regions — ஒத்த பகுதிகள்
Simultaneous — ஒருங்கே
Single parameter case — ஒரு சுட்டுருப்பு வகை
Single value — தனி மதிப்பு
Size — பருமன், அளவு
Skewness — கோட்டம்
Small samples — சிறிய மாதிரிகள்
Special case — தனிச் சிறப்பு வகை
Standard deviation — திட்ட விலக்கம்
Standardisation — தரப்படுத்துதல்
Standardised — தரப்படுத்தப்பட்ட
Standardised normal distribution — தரப்படுத்தப்பட்ட, (தரமான) இயல்நிலைப் பரவல்
Statistic — மாதிரிப் பண்பளவை, மாதிரி அளவை
Statistics — புள்ளியியல்
Statistics, Mathematical — கணிதப் புள்ளியியல்
Statistical methods — புள்ளியியல் அறிமுறைகள்
Statistical inference — புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு
Siatistical quality control — புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு
Sufficiency — போதிய தன்மை

| | | |
|---|---|---|
| Sufficient statistic | — | போதுமான மாதிரி அளவைகள் (மதிப்பீடுகள்) |
| Sum of positive ranks | — | நேர் அணி வரிசையின் கூட்டல் |
| Sum of negative ranks | — | எதிர்மறை அணியின் கூட்டல் |
| Symmetry | — | சமச் சீரான தன்மை |

T

| | | |
|---|---|---|
| Table | — | அட்டவணை |
| Tabulate | — | பட்டியலமை |
| Techniques | — | உத்தி முறைகள் |
| Test | — | சோதனை |
| Test, chi-square | — | கைவர்க்கச் சோதனை |
| Test, median | — | இடைநிலைச் சோதனை |
| Test, one tailed | — | ஒரு பக்கச் சோதனை |
| Test, of correlation | — | உடன் தொடர்புக்கான சோதனை |
| Test, of equality of means | — | சராசரிகளின் சமத்துவத்துக்கான சோதனை |
| Test, of equality of variance | — | மாறுபாடுகளின் சம தன்மைக்கான சோதனை |
| Test, of significance | — | மிகைத்தன்மை, பொருளுடைமைச் சோதனை |
| Test, runs | — | ஓட்டங்கள் சோதனை |
| Test, sign | — | குறிச் சோதனை |
| Test, signed ranks | — | குறியிடப்பட்ட அணி வரிசைகள் சோதனை |
| Test, students 't' | — | t-சோதனை (ஸ்டுடன்டின்) சோதனை |
| Test, two tailed | — | இரு பக்கச் சோதனை |
| Time trend | — | காலப் போக்கு |
| Ties | — | ஒத்தவை |
| Theory of Estimation | — | மதிப்பீட்டுக் கொள்கை |
| Tools | — | கருவிகள் |
| Transformation | — | உருமாற்றம் |
| Trials | — | முயற்சிகள் |
| Two stage sample | — | இருபடி மாதிரி |
| Two tailed test | — | இரு பக்கச் சோதனை |
| Type I error | — | முதல் வகைத் தவறு, முதல் வகைப் பிழை |

Type II error — இரண்டாம் வகைத் தவறு (பிழை)

U

Unbiased — பிறழ்ச்சியற்ற நடுநிலை மாறாத
Uniform — ஒருசீரான
Uniformly Most Powerful Unbiased Test (UMPU-Test) — சீரான மிகத் திறமைவாய்ந்த நடுநிலை மாறாத சோதனை
Unit — அலகு
Unwarranted — வாத ஆதாரமற்ற
Upper — மேல் மட்ட
Upper quartile — மேல் கால்மானம்

V

Variance — மாறுபாடு
Variate, variable — மாறி
Variate, continuous — தொடர் மாறி
Variable, discrete — தனித்த மாறி
Variable, dependent — சார்புள்ள மாறி
Variable, independent — சார்பற்ற மாறி
Variable, uni — ஒரு மாறி
Variable, bi — இரு மாறி
Variable, multi — பல மாறி
Variance of estimate — மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு
Vactor — திசையிலி

W

Wald-Wolfowitz run test — வால்ட் - வோல்ஃபோவிட்ஸ் ஓட்டச் சோதனை
Weak law of large numbers — பெரிய எண்களின் வலுக்குறைந்த நியதி
Wilcoxon's signed rank test — வில்காக்சின் குறியிட்ட அணி வரிசைச் சோதனை

X

$\chi^2$ — கைவர்க்கம்
$\chi^2$-test — கைவர்க்கச் சோதனை